

北京市东直门中学 2021 ~ 2022 学年度第二学期期中考试

高二数学

2022.04

考试时间：120 分钟

总分：150 分

班级_____

姓名_____

学号_____

第一部分（选择题）

一. 选择题：(本题有 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分)

1. 已知 $f(x) = \sqrt{x}$ ，则 $f'(x) =$

- A. \sqrt{x} B. $\frac{1}{x}$ C. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ D. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $(x + \frac{1}{x})^6$ 的展开式中常数项为

- A. 1 B. 6 C. 15 D. 20

3. 从 5 件不同的礼物中选出 3 件分别送给 3 位同学，不同方法的种数是

- A. A_5^3 B. C_5^3 C. 3^5 D. 5^3

4. 可导函数 $f(x)$ 的定义域为 D ， $x_0 \in D$ ，则 “ $f'(x_0) = 0$ ” 是 “ x_0 是 $f(x)$ 的极值点” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 为庆祝中国共产党成立 100 周年，某校合唱团组织“唱支山歌给党听”演唱快闪活动。

合唱团选出 6 个人站在第一排，其中甲、乙作为领唱需要站在第一排的正中间，则这 6 个人的排队方案共有

- A. 24 种 B. 48 种 C. 120 种 D. 240 种

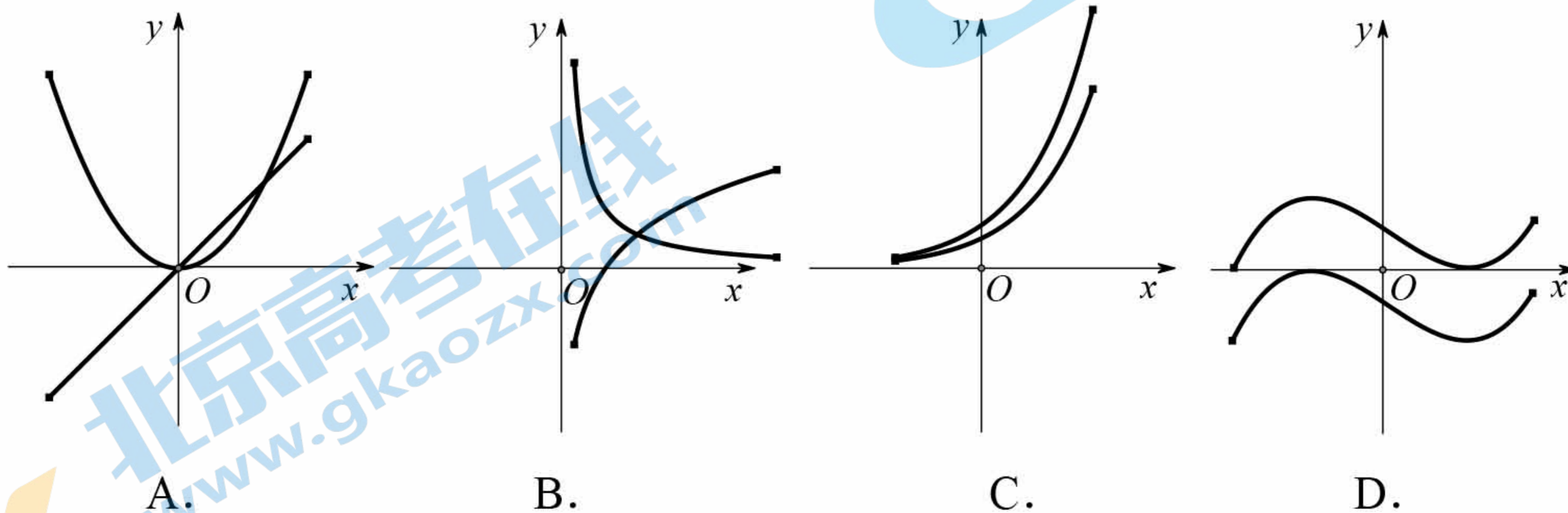
6. 下列求导的运算中，正确的是

- A. $(\frac{\ln x}{x})' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ B. $(\ln(2x - 1))' = \frac{1}{2x - 1}$
C. $(x^3 e^x)' = 3x^2 e^x$ D. $(2^x + \cos x)' = 2^x - \sin x$

7. 在 5 道试题中有 2 道代数题和 3 道几何题，每次从中抽出 1 道题，抽出的题不再放回，则在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率为

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，在同一个直角坐标系中， $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象不可能是

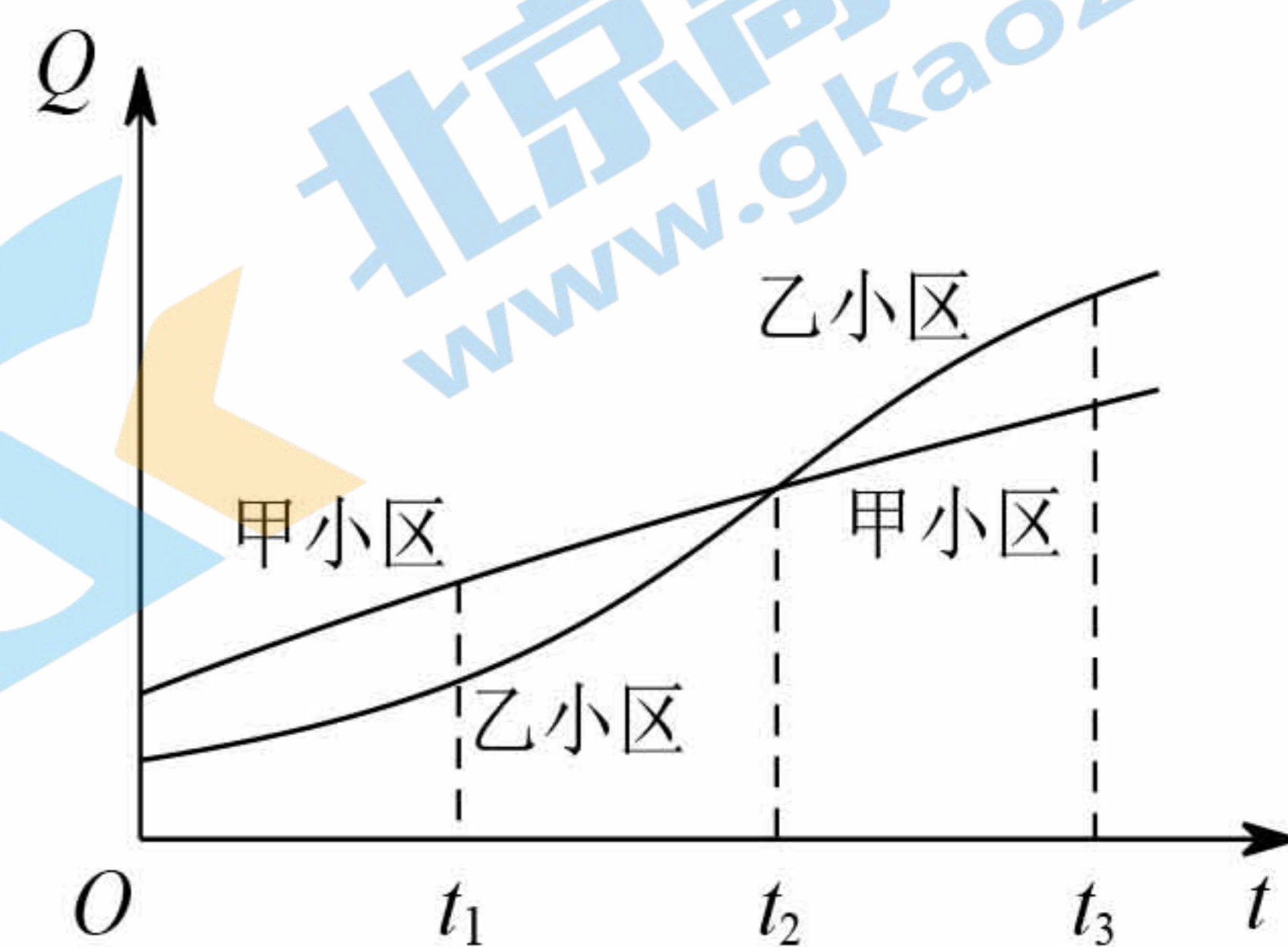


9. 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，则下列不等式正确的是

- A. $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$ B. $x_1 \ln x_1 > x_2 \ln x_2$
 C. $x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2$ D. $x_2 \ln x_1 > x_1 \ln x_2$

10. 2020 年 5 月 1 日，北京市开始全面实施垃圾分类，家庭厨余垃圾的分出量不断增加. 已知甲、乙两个小区在 $[0, t]$ 这段时间内的家庭厨余垃圾的分出量 Q 与时间 t 的关系如图所示. 给出下列四个结论:

- ① 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内，甲小区的平均分出量比乙小区的平均分出量大；
 ② 在 $[t_2, t_3]$ 这段时间内，乙小区的平均分出量比甲小区的平均分出量大；
 ③ 在 t_2 时刻，甲小区的分出量比乙小区的分出量增加的慢；
 ④ 甲小区在 $[0, t_1]$ ， $[t_1, t_2]$ ， $[t_2, t_3]$ 这三段时间中，在 $[t_2, t_3]$ 的平均分出量最大.



- 其中所有正确结论的序号是
 A. ①② B. ②③ C. ①④ D. ③④

二. 填空题: (本题有 5 道小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 设 $(2x - 1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值为_____.

12. 设函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, 若 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取到极小值, 则 $x_0 =$ _____.

13. 学校要邀请 9 位学生家长中的 6 人参加一个座谈会, 其中甲、乙两位家长不能同时参加, 则邀请的不同方法为_____.

14. 已知 $f(x) = -x^3 + ax + 3$ 在定义域上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 我国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书里给出了杨辉三角, 书中是用汉字来表示的, 如图 1. 研究发现, 杨辉三角可以由组合数来表示, 如图 2.

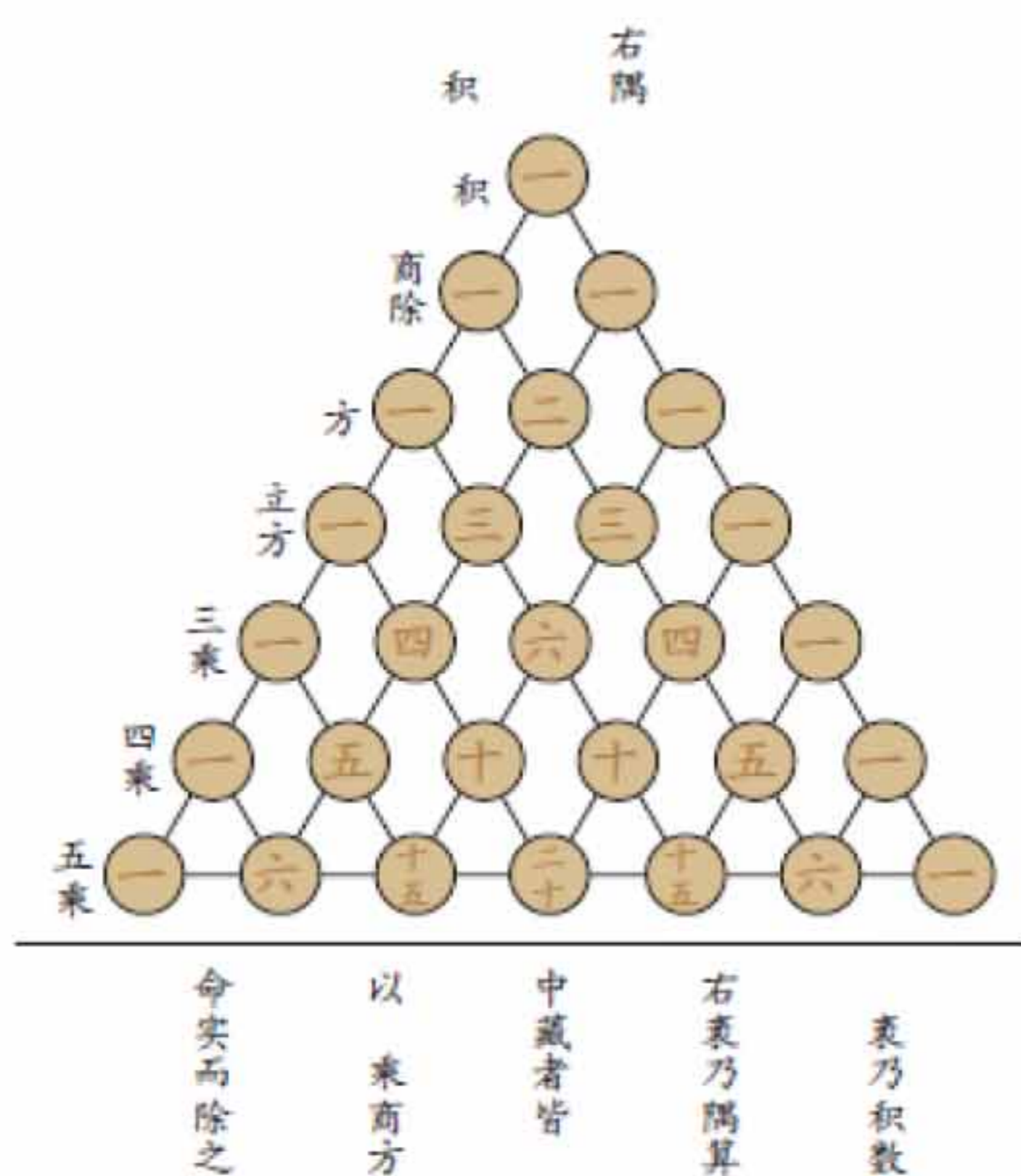


图 1

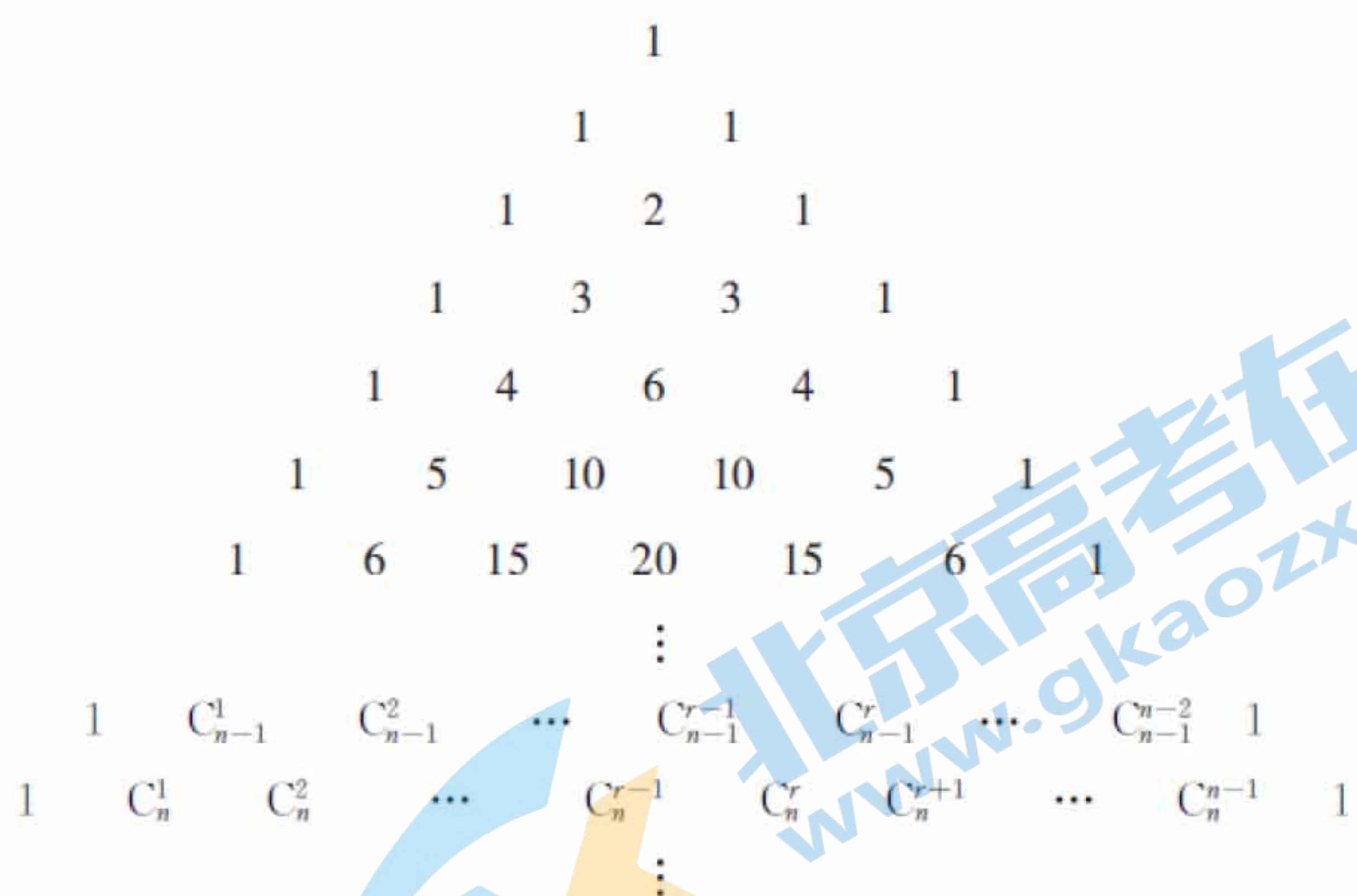


图 2

杨辉三角有很多有趣的性质, 如杨辉三角的两个腰上的数字都是 1, 用组合数表示为 $C_n^0 = C_n^n = 1$. 请写出一条其他的性质, 用组合数表示为: _____;

从杨辉三角蕴含的规律可知:

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_k^2 + \dots + C_{49}^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三. 解答题: (本题有 6 道小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

16. (本小题 13 分)

自由购是通过自助结算方式购物的一种形式. 某大型超市为调查顾客使用自由购的情况, 随机抽取了 100 人, 统计结果整理如下:

年龄	20 以下	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70]	70 以上
使用人数	3	12	17	6	4	2	0
未使用人数	0	0	3	14	36	3	0

- (I) 现随机抽取 1 名顾客, 试估计该顾客年龄在[30, 50)且未使用自由购的概率;
- (II) 从被抽取的年龄在[50, 70]使用自由购的顾客中, 随机抽取 3 人进一步了解情况, 用 X 表示这 3 人中年龄在[50, 60)的人数, 求随机变量 X 的分布列及数学期望.

17. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$).

(I) 当 $\omega = 1$ 时, 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(II) 当函数 $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是 $\frac{\pi}{2}$ 时, _____.

从①②③中任选一个, 补充到上面空格处并作答.

① 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值;

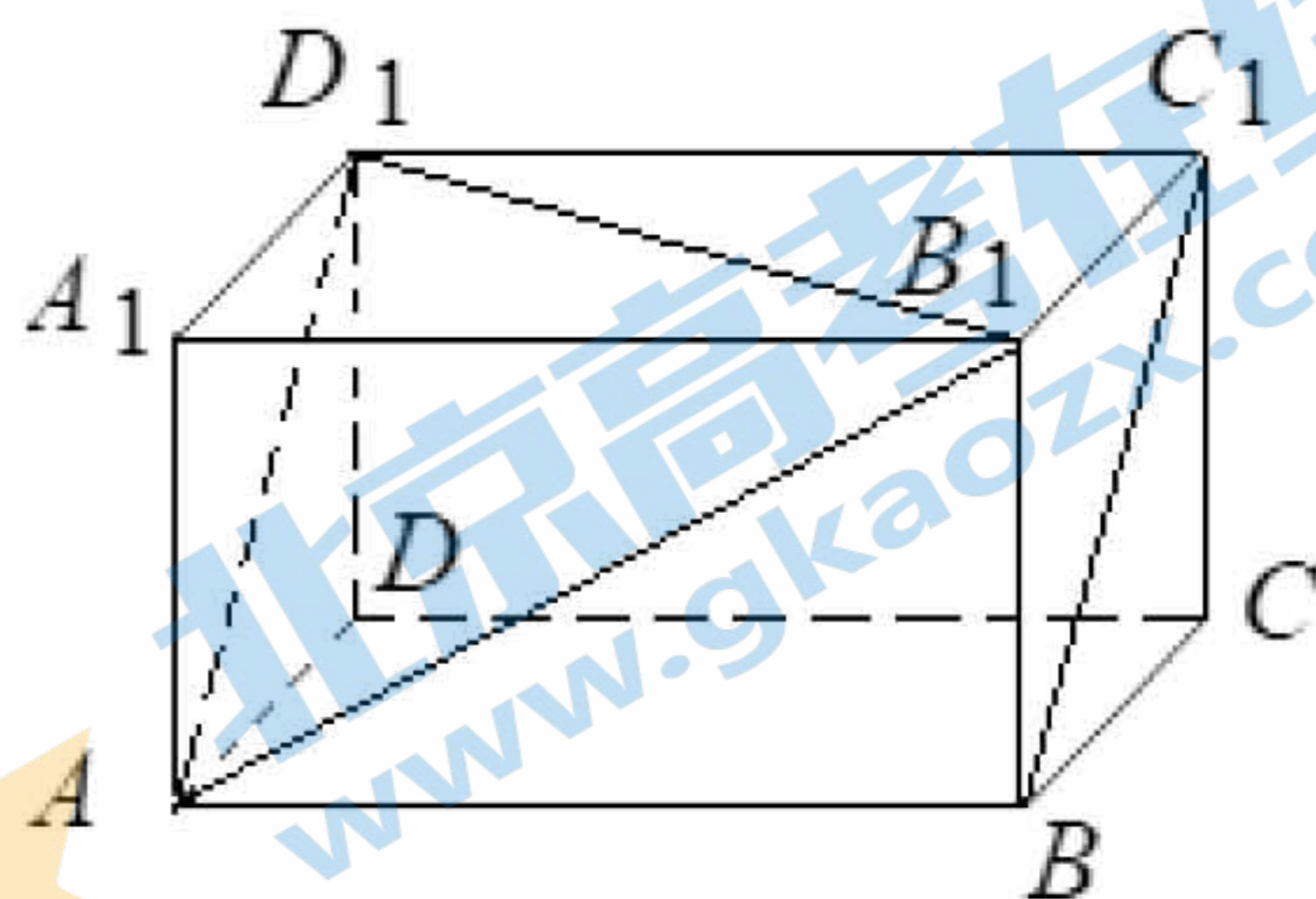
② 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

③ 若 $f(x) \geq 0$, 求 x 的取值范围.

18. (本小题 14 分)

如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$,
 $BC=CC_1=1$.

- (I) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D_1 ;
- (II) 求平面 AB_1D_1 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值;
- (III) 求点 B 到平面 AB_1D_1 的距离.



19. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{x^2}{2} - (a+1)x$, $a \in \mathbb{R}$.

- (I) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (II) 求 $f(x)$ 在区间 $[2, e]$ 上的最小值;
- (III) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点个数. (只需写出结论)

20. (本小题 15 分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 上顶点为 $B(0, 1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y = kx - 2$ 交 y 轴于 C 点, 交椭圆于 P, Q 两点, 直线 BP, BQ 分别交 x 轴于点 M, N .

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 求证: $S_{\triangle BOM} \cdot S_{\triangle BCN}$ 为定值.

21. (本小题 15 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 b , 等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 b , 公比为 a .

(I) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -n^2 + 3n$, 求 a, b 的值;

(II) 若 $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$, 且 $a < b < a_2 < b_2 < a_3$.

(i). 求 a 的值;

(ii). 对于数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 满足关系式 $a_m + k = b_n$, k 为常数, 且 $k \in \mathbb{N}^*$, 求 b 的最大值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](https://www.gkzxx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。