第 40 届全国中学生物理竞赛预赛试题解答及评分标准

（2023 年 9 月 2 日 9:00-12:00）

一、 选择题（本题 60 分，含 5 小题，每小题 12 分。在每小题给出的 4 个选项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意。将符合题意的选项前面的英文字母写在答题纸对应小题后面的括号内。全部选对的得 12 分，选对但不全的得 6 分，有选错或不答的得 0 分。）

1. D　　2. B　　3. ABD　　4. A　　5. C

二、填空题（本题 100 分，每小题 20 分，每空 10 分。请把答案填在答题纸对应题号后面的横线上。只需给出结果，不需写出求得结果的过程。）

6. $\frac{17}{22}\times100$ 或 77.3，8　　7. 9.63，50.0　　8. 前倾，$\arctan\frac{1}{2}$ 或 $26.6°$

9. 3，12　　10. 2×10^5，1×10^2

三、计算题（本题 240 分，共 6 小题，每小题 40 分。计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分。有数值计算的，答案中必须明确写出数值，有单位的必须写出单位。）

11.

（1）在 A、B 间的软绳刚刚被拉紧后的瞬间，B、C 间的轻质弹簧无形变，故小球 C 的速度为 0

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}=0 \quad ①$$

在 A、B 间的软绳刚刚被拉紧后的瞬间，连接小球 A、B 的软绳与 x 轴的夹角为 θ，小球 B 所受到的来自软绳的作用力沿拉直的绳的方向，因此，在此瞬间 B 的速度沿着软绳指向 A 的方向，即此时 B 的速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$ 为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=v_{\mathrm{B}}(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}), \quad ②$$

式中 $\hat{x}$、$\hat{y}$ 分别为 x、y 坐标轴的方向，v_{B} 是 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}$ 的大小。设此时 A 的速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{A}x}\hat{x}+v_{\mathrm{A}y}\hat{y}, \quad ③$$

A、B 构成的体系在绳被拉紧的过程中动量守恒，有

$$v_{\mathrm{B}}\cos\theta+v_{\mathrm{A}x}=v_0 \quad ④$$

$$v_{\mathrm{B}}\sin\theta+v_{\mathrm{A}y}=0 \quad ⑤$$

由于轻绳柔软（完全无弹性）且不可伸长，在绳刚刚被拉紧后的瞬间 A 相对于 B 的相对运动速度 $\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}$ 必然垂直于 AB 连线，且沿顺时针旋转方向，即

$$v_{\mathrm{A}x}-v_{\mathrm{B}}\cos\theta=v'_{\mathrm{A}}\sin\theta \quad ⑥$$

$$v_{\mathrm{A}y}-v_{\mathrm{B}}\sin\theta=-v'_{\mathrm{A}}\cos\theta \quad ⑦$$

联立①④⑤⑥⑦式，解得

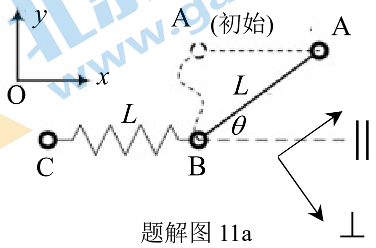
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=v_0\left[\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\hat{x}-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\hat{y}\right] \quad ⑧$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\frac{v_0}{2}(\cos^2\theta\hat{x}+\cos\theta\sin\theta\hat{y}) \quad ⑨$$

由⑧⑨式和题给数据得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=v_0(0.68\hat{x}-0.24\hat{y}) \qquad ⑩$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=v_0(0.32\hat{x}+0.24\hat{y}) \qquad ⑪$$



题解图 11a

【解法 2：在 A、B 间的软绳刚刚被拉紧后的瞬间，B、C 间的轻质弹簧无形变，故小球 C 的速度为 0

$$v_{\mathrm{C}}=0 \qquad ①$$

如题解图 11a，在绳刚刚被拉紧后的瞬间，将 A 的初速度按垂直于连线方向“⊥”和平行于连线方向“||”进行分解

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_{0\perp}+\boldsymbol{v}_{0\parallel} \qquad ②'$$

其中

$$v_{0\perp}=\sin\theta\, v_0\ , \qquad v_{0\parallel}=\cos\theta\, v_0 \qquad ③'$$

由轻绳约束条件，在 A、B 间的软绳刚刚被拉紧后的瞬间

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}\parallel}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}\parallel} \qquad ④'$$

再由 A、B 间的动量守恒得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}\parallel}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}\parallel}=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{0\parallel} \qquad ⑤'$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}\perp}=\boldsymbol{v}_{0\perp} \qquad ⑥'$$

于是

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\cos\theta\, v_0\boldsymbol{e}_{\parallel} \qquad ⑦'$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{0\parallel}+\boldsymbol{v}_{0\perp}=\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\cos\theta\, v_0\boldsymbol{e}_{\parallel}+\sin\theta\, v_0\boldsymbol{e}_{\perp} \qquad ⑧'$$

其中，$\boldsymbol{e}_{\parallel}$ 和 $\boldsymbol{e}_{\perp}$ 分别为平行“||”和垂直“⊥”方向的方向向量。于是有

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\frac{2}{5}v_0\boldsymbol{e}_{\parallel} \qquad ⑨'$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=\frac{2}{5}v_0\boldsymbol{e}_{\parallel}+\frac{3}{5}v_0\boldsymbol{e}_{\perp} \qquad ⑩'】$$

【附注：其中平行“||”和垂直“⊥”方向的方向向量为

$$\boldsymbol{e}_{\parallel}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}, \qquad \boldsymbol{e}_{\perp}=\sin\theta\hat{x}-\cos\theta\hat{y}$$

综上，有

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=v_0\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta\hat{x}+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\hat{y}\right)=v_0(\frac{8}{25}\hat{x}+\frac{6}{25}\hat{y})$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=v_0\left(\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\hat{x}-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\hat{y}\right)=v_0\left(\frac{17}{25}\hat{x}-\frac{6}{25}\hat{y}\right)$$

】

（2）在 A、B 间的柔软轻绳刚刚被拉紧时，B、C 间的柔软轻绳处于沿 x 方向伸直的拉紧状态，小球 C 所受到的来自软绳的作用力指向 A，故 C 只可能沿正 x 方向运动，可设

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}=v_{\mathrm{C}}\hat{x}\ ,$$

另设碰后瞬间 A、B 速度分别为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{A}x}\hat{x}+v_{\mathrm{A}y}\hat{y}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=v_{\mathrm{B}x}\hat{x}+v_{\mathrm{B}y}\hat{y}$$

A、B、C 构成的体系在绳被拉紧前与刚刚拉紧后的总动量守恒，有

$$v_{\mathrm{A}x}+v_{\mathrm{B}x}+v_{\mathrm{C}}=v_0 , \qquad ⑫$$

$$v_{\mathrm{A}y}+v_{\mathrm{B}y}=0 ; \qquad ⑬$$

由于 B、C 间的柔软轻绳不可伸长，在 B、C 间的柔软轻绳被拉紧时，B 相对于 C 的相对运动速度沿正 y 方向，即

$$v_{\mathrm{B}x}-v_{\mathrm{C}}=0 \qquad ⑭$$

在此时瞬间 A 相对于 B 的相对运动速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}''$ 垂直于此时 AB 连线，且沿顺时针旋转方向，即

$$v_{\mathrm{A}x}-v_{\mathrm{B}x}=v_{\mathrm{A}}''\sin\theta \qquad ⑮$$

$$v_{\mathrm{A}y}-v_{\mathrm{B}y}=-v_{\mathrm{A}}''\cos\theta \qquad ⑯$$

因为 A 所受冲量只沿 AB 连线方向，故 A 在垂直于 AB 连线方向的速度分量在绳被拉紧前后没有变化，由 AB 连线方向的动量定理得

$$\frac{3}{5}v_{\mathrm{A}x}-\frac{4}{5}v_{\mathrm{A}y}=\frac{3}{5}v_0 \qquad ⑰$$

联立⑫⑬⑭⑮⑯⑰式，得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=\frac{13}{21}v_0\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{2}{7}v_0\hat{\boldsymbol{y}} \qquad ⑱$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}=\frac{4}{21}v_0\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{2}{7}v_0\hat{\boldsymbol{y}} \qquad ⑲$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}=\frac{4}{21}v_0\hat{\boldsymbol{x}} \qquad ⑳$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）小问 22 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪式各 2 分；

【解法 2】：①②'③'④' 式各 2 分，⑤'式 4 分，⑥'⑦'⑧'⑨'⑩'式各 2 分；

第（2）小问 18 分，⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

12.

（1）先考虑一般情况。设质量为 m_1'、速度为 v_{10} 的小球 1 和质量为 m_2'、速度 $v_{20}=0$ 的小球 2 发生对心碰撞，碰撞后小球 1 和 2 的速度分别为 v_1 和 v_2，由动量守恒有

$$m_1'v_{10}=m_1'v_1+m_2'v_2 \qquad ①$$

碰撞的恢复系数为

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=\frac{v_2-v_1}{v_{10}} \qquad ②$$

由①②式得

$$v_2=\frac{(1+e)m_1'}{m_1'+m_2'}v_{10} \qquad ③$$

考虑由大球（质量为 m_1）与小球（质量为 m_2）组成的系统，系统落地速度为

$$v_0=\sqrt{2gh_0} \quad ④$$

在以速度 v_0 向下运动的参考系中，碰撞前两球 m_1、m_2 都处于静止状态，而地球（m_0）以速度 v_0 向上与最下面的大球（m_1）碰撞，利用公式③，碰撞后小球（m_1）的速度 u_1 为

$$u_1=\frac{(1+e)m_0}{m_0+m_1}v_0 \quad ⑤$$

然后大球（m_1）与小球（m_2）之间发生碰撞，再利用公式③，碰撞后小球（m_2）的速度 u_2 为

$$u_2=\frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1=\frac{(1+e)^2m_0m_1}{(m_0+m_1)(m_1+m_2)}\sqrt{2gh_0} \quad ⑥$$

考虑到 $m_0>>m_1$，有

$$u_2=\frac{(1+e)^2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh_0} \quad ⑦$$

且地球与大球 m_1 碰后地球速度近似不变，于是小球（m_2）相对于地面的速度为

$$v=u_2-v_0=\left[\frac{(1+e)^2m_1}{m_1+m_2}-1\right]\sqrt{2gh_0} \quad ⑧$$

小球（m_2）上升的高度（相对于地面）为

$$h=\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{(1+e)^2m_1}{m_1+m_2}-1\right)^2h_0 \quad ⑨$$

由⑨式得

$$e=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{h}{h_0}}+1\right)\frac{m_1+m_2}{m_1}}-1 \quad ⑩$$

（2）系统落地时的速度

$$v_0=\sqrt{2gh_0}$$

在以速度 v_0 竖直向下运动的惯性系中，碰撞前，4 个小球都处于静止状态，而地球（m_0）以速度 v_0 竖直向上运动，与最下面的小球碰撞，然后依次引起小球之间的 3 次碰撞。开始两次碰撞后小球（m_2）的速度 u_2 仍为⑥式所示。依次类推，最上面小球(m_4)的碰撞后速度为

$$u=\frac{(1+e)^4m_0m_1m_2m_3}{(m_0+m_1)(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}\sqrt{2gh_0} \quad ⑪$$

考虑 $m_0>>m_1$ 有

$$u=\frac{(1+e)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}\sqrt{2gh_0} \quad ⑫$$

且地球与大球 m_1 碰后地球速度近似不变，故最上面小球(m_4)相对于地面的速度

$$v=u-v_0=\left(\frac{(1+e)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}-1\right)\sqrt{2gh_0} \quad ⑬$$

最上面小球(m_4)竖直升的高度

$$h=\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{(1+e)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}-1\right)^2h_0 \quad ⑭$$

由此可得

$$e=\sqrt[4]{\left(\sqrt{\frac{h}{h_0}}+1\right)\frac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}{m_1m_2m_3}}-1 \qquad ⑮$$

由⑮式和题给数据得，恢复系数 e 的数值为

$$e=0.885 \qquad ⑯$$

(3)只需求

$$\begin{aligned}\Phi(m_2,m_3)&=\frac{m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}\\&=\frac{1}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\left(1+\frac{m_3}{m_2}\right)\left(1+\frac{m_4}{m_3}\right)}\end{aligned}$$

达到最大值的条件。进而，

$$\begin{aligned}\Phi(m_2,m_3)&=\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_3}{m_2}+\frac{m_4}{m_3}+\frac{m_2}{m_1}\frac{m_3}{m_2}+\frac{m_3}{m_2}\frac{m_4}{m_3}+\frac{m_2}{m_1}\frac{m_4}{m_3}+\frac{m_2}{m_1}\frac{m_3}{m_2}\frac{m_4}{m_3}}\\&\le\frac{1}{1+3\sqrt[3]{\frac{m_2}{m_1}\frac{m_3}{m_2}\frac{m_4}{m_3}}+3\sqrt[3]{\frac{m_2}{m_1}\frac{m_3}{m_2}\frac{m_3}{m_2}\frac{m_4}{m_3}\frac{m_2}{m_1}\frac{m_4}{m_3}}+\frac{m_2}{m_1}\frac{m_3}{m_2}\frac{m_4}{m_3}} \qquad ⑰\\&=\frac{1}{1+3\sqrt[3]{\frac{m_4}{m_1}}+3\sqrt[3]{\left(\frac{m_4}{m_1}\right)^2}+\frac{m_4}{m_1}}=\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{m_4}{m_1}}\right)^3}\end{aligned}$$

式中等号仅在

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{m_3}{m_2}=\frac{m_4}{m_3}$$

时成立。即在 m_4 与 m_1 保持不变的条件下，当

$$m_2=m_2=\sqrt[3]{m_1^2m_4}\approx 32.4\ \text{g},\ m_3=\sqrt[3]{m_1m_4^2}\approx 13.7\ \text{g} \qquad ⑱$$

可以使 h/h_0 达到最大值。

这里应用了下述不等式：

对于任意正数 a、b、c，有

$$\frac{a+b+c}{3}\ge(abc)^{\frac{1}{3}}$$

式中等号当且仅当

$$a=b=c$$

时成立。

【附注：

上述不等式可以简单证明如下：

不妨设 a、c 分别是 a、b、c 中最大数、最小数。可令

$$a=k+g、\ b=k-g+h、\ c=k-h，$$

式中 g、$h\ge 0$，且

$$\frac{a+b+c}{3}=k$$

于是

$$abc=(k+g)(k-h)(k+h-g)=[k^2+(g-h)k-gh](k+h-g)$$
$$\le k(k+g-h)(k+h-g)=k[k^2-(g-h)^2]\le k^3=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$
式中等号当且仅当 $g=h=0$ 或（等价的）
$$a=b=c$$
时成立。】

由⑰式知，$\varPhi$ 的极大值为
$$\varPhi_{\max}=\left(\sqrt[3]{\frac{m_4}{m_1}}+1\right)^{-3}$$
这时，
$$\left(\frac{h}{h_0}\right)_{\max}=\left[(1+e)^4\left(1+\sqrt[3]{\frac{m_4}{m_1}}\right)^{-3}-1\right]^2\approx 11.4 \qquad ⑲$$
由⑲式和题给数据得
$$\left(\frac{h}{h_0}\right)_{\max}\approx 11.4 \qquad ⑳$$

评分标准：本题 40 分。
第（1）小问 20 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩式各 2 分；
第（2）小问 12 分，⑪⑫⑬⑭⑮⑯式各 2 分。
第（3）小问 8 分，⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

13.
（1）半径为 r、总电量为 Q 的均匀带电球壳的表面电势 $\varphi(r)$ 由下式给出
$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad ①$$
其中 ε_0 为真空介电常量。记肥皂泡初始半径为 r_1，得
$$Q=4\pi\varepsilon_0 r_1\varphi(r_1) \qquad ②$$
代入题给数据得
$$Q=1.1\times10^{-11}\ \mathrm{C} \qquad ③$$
可知肥皂泡带正电。

（2）记肥皂泡变大后的半径为 r_2，由题给公式得，肥皂泡变大前后静电势能变化为
$$\Delta W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad ④$$
由③④式和题给数据得
$$\Delta W_{\mathrm{e}}=-5.0\times10^{-10}\ \mathrm{J} \qquad ⑤$$

（3）由于球面上电荷元会受到其他部分电荷的静电力，故会产生向外的压强，记为P_e。假设球面从半径r_2变为半径$r_2+\Delta r$，其中$\Delta r << r_2$，此过程中压强P_e所做的功为

$$\Delta W \approx \Delta r\iint P\mathrm{d}S \approx 4\pi P_e r_2^2 \Delta r \qquad ⑥$$

由题给公式可知以上过程中肥皂泡静电势能变化为

$$\Delta E_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(r_2+\Delta r)} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r_2} \approx -\frac{Q^2\Delta r}{8\pi\varepsilon_0 r_2^2} \qquad ⑦$$

而保守力做功等于势能的减少量，即

$$\Delta W = -\Delta E_e \qquad ⑧$$

肥皂泡的表面张力产生的压强与表面张力系数σ的关系为

$$P_T = \frac{4\sigma}{r_2} \qquad ⑨$$

忽略肥皂泡内外气压差，则平衡时表面张力产生的压强与静电力产生的压强相等，故

$$P_T = P_e \qquad ⑩$$

联立⑥⑦⑧⑨⑩式得

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{8r_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi\right)^2 \qquad ⑪$$

代入题给数据得

$$\sigma = 1.1\times10^{-8}\ \mathrm{N/m} \qquad ⑫$$

【解法 2：

当肥皂泡达到平衡时，体系的总势能（电荷的势能与表面张力的势能的和）达到最小。

半径为r的肥皂泡的表面张力产生的压强与表面张力系数σ的关系为

$$P_T = \frac{4\sigma}{r} \qquad ⑥'$$

因此表面张力所对应的势能为

$$U_T = \int^r P_T\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r = 8\pi r^2\sigma + U_0 \qquad ⑦'$$

其中U_0为任意常数。结合题给电势能公式，可知总势能为

$$U = U_T + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \qquad ⑧'$$

由平衡条件可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_2}=16\pi r_2\sigma-\frac{Q^2}{8\pi r_2{}^2\varepsilon_0}=0 \qquad ⑨'$$

解得

$$\sigma=\frac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0 r_2^3} \qquad ⑩'$$

代入题给数据得

$$\sigma=1.1\times10^{-8}\ \mathrm{N/m} \qquad ⑪'$$

】

评分标准：本题 40 分。
第（1）小问 8 分，①式 4 分，②③式各 2 分；
第（2）小问 8 分，④⑤各式 4 分；
第（3）小问 24 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 4 分，⑪⑫式各 2 分。
【解法 2】：⑥'⑦'⑧'⑨'⑩' ⑪' 各 4 分。

14.
（1）在小方块内金属片的运动速度大小为

$$v=\omega r \qquad ①$$

方向沿矢经 **r** 末端切向。它们切割磁力线产生的电动势近似为

$$\varepsilon=Bav \qquad ②$$

该电动势沿径向。由①②式得

$$\varepsilon=Ba\omega r \qquad ③$$

（2）记小方块内金属片的总电阻为 $R_{内}$。每片金属片的电阻为

$$R=\rho\frac{a}{dh} \qquad ④$$

小方块内金属片的数目为

$$n=\frac{a}{b+d} \qquad ⑤$$

由④⑤式得，

$$R_{内}=\frac{1}{n}R=\frac{\rho a}{ndh}=\frac{\rho(b+d)}{dh} \qquad ⑥$$

（3）记小方块外金属片的总电阻为 $R_{外}$。由于密集的金属片在圆环上均匀分布，$\frac{2\pi r}{b+d}$ 是正整数。小方块外金属片的数目为

$$m=\frac{2\pi r-a}{b+d} \qquad ⑦$$

由④⑦式得，小方块外金属片的总电阻为

$$R_{外}=\frac{1}{m}\frac{\rho a}{dh}=\frac{b+d}{2\pi r-a}\frac{\rho a}{dh} \qquad ⑧$$

（4）记通过小方块的电流为 I 。由欧姆定律，通过小方块的电流为

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{内}+R_{外}} \quad ⑨$$

由③⑥⑧⑨式得

$$I=\frac{\varepsilon}{R_{内}+R_{外}}=\frac{Ba\omega r}{\frac{b+d}{a}\frac{\rho a}{dh}+\frac{b+d}{2\pi r-a}\frac{\rho a}{dh}}=\frac{(2\pi r-a)Badh\omega}{2\pi(b+d)\rho} \quad ⑩$$

（5）小方块内所有金属片所受到的总安培力为

$$F=IaB \quad ⑪$$

方向沿与圆盘上的金属片垂直。该安培力对圆盘的阻力矩近似为

$$M=rF \quad ⑫$$

由⑩⑪⑫式得，相对于圆盘转轴，阻碍圆盘转动的电磁力矩为

$$M=rIaB=\frac{(2\pi r-a)B^2a^2dh\omega r}{2\pi(b+d)\rho} \quad ⑬$$

评分标准：本题 40 分。
第（1）小问 10 分，①②式各 4 分，③式 2 分；
第（2）小问 8 分，④式 4 分，⑤⑥式各 2 分；
第（3）小问 4 分，⑦⑧式各 2 分；
第（4）小问 8 分，⑨式 4 分，⑩式 4 分（写成近似表达式也同样给分）；
第（5）小问 10 分，⑪⑫式各 4 分，⑬式 2 分（写成近似表达式也同样给分）。

15.
（1）锌的逸出功

$$A=h\nu_c=\frac{hc}{\lambda_c} \quad ①$$

式中 ν_c 是相应的截止频率。电子的最大初动能

$$E_{k\max}=h\nu-A=hc\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_c}\right)=8.677\times10^{-20}\,\text{J} \quad ②$$

由于

$$E_{k\max}=\tfrac{1}{2}m_e v^2 \quad ③$$

式中 v 是光电子从锌球逸出时的最大运动速度。由①②③式及题给数据得

$$v=\sqrt{\frac{2hc}{m_e}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_c}\right)}=4.37\times10^5\,\text{m/s} \quad ④$$

（2）电子从锌球附近运动到无穷远，由能量守恒有

$$E_{k\max}+e\varphi_0=\frac{1}{2}m_e v_2^2 \quad ⑤$$

式中 v_2 以最大速率从锌球逸出的电子运动到离锌球无穷远处时的速度。由⑤式及题给数据得

$$v_2=\sqrt{\frac{2(E_{k\max}+e\varphi_0)}{m_e}}=6.05\times10^5\,\text{m/s} \quad ⑥$$

（3）照射时间足够长，逸出的电子足够多，以至于锌球带正电，其电势 φ_1 满足

$$E_{k\max}+e\varphi_1=0 \quad ⑦$$

由⑦式及题给数据得

$$\varphi_1 = -\frac{E_{\rm k\,max}}{e} = +0.54\ \text{V} \qquad ⑧$$

（4）带有电荷量为 q 的锌球的电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad ⑨$$

由⑨式得

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{R} \qquad ⑩$$

设整个照射过程中从锌球跑出的光电子的数目为 N，则

$$\Delta q = N(-e) \qquad ⑪$$

由⑩⑪式得

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{N(-e)}{R} \qquad ⑫$$

由⑫式及题给数据得

$$N = 4\pi\varepsilon_0\frac{R(\varphi_1 - \varphi_0)}{-e} = 7.2\times10^6 \qquad ⑬$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）小问 14 分，①②式各 4 分，③式 2 分，④式 4 分；

第（2）小问 8 分，⑤⑥式各 4 分；

第（3）小问 8 分，⑦⑧式各 4 分；

第（4）小问 10 分，⑨⑩⑪⑫⑬式各 2 分。

16.

（1）根据薄透镜成像公式有

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f} \qquad ①$$

$$\frac{1}{s+d} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f} \qquad ②$$

由①②式和题给数据有

$$s_1' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}} = 30.00\ \text{cm},\ s_2' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s+d}} = 24.29\ \text{cm} \qquad ③$$

于是

$$D = s_1' - s_2' - d = 3.714\ \text{cm},\ L = B - s_1' = 20.00\ \text{cm} \qquad ④$$

（2）如解题图 16a，在以 O 点为圆心的环带区域（图中用粗实线段标出）内有干涉条纹，且

$$\text{OA} = \frac{r_1}{s_2'}\text{OS}_2' = \frac{r_1}{s_2'}(L+D) = 1.357\ \text{cm} \qquad ⑤$$

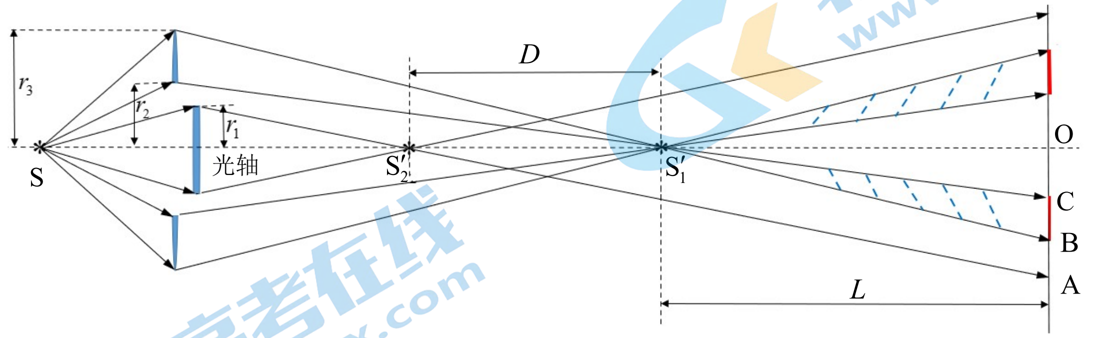
$$\text{OB} = \frac{r_3}{s_1'}\text{OS}_1' = 1.334\ \text{cm} \qquad ⑥$$

$$\text{OC} = \frac{r_2}{s_1'}\text{OS}_1' = 0.9980\ \text{cm} \qquad ⑦$$

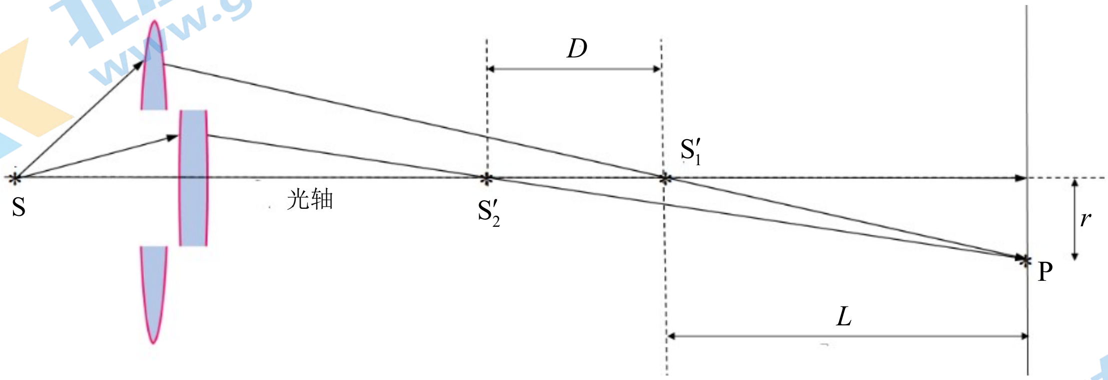
由于

$$OA > OB > OC$$

干涉条纹应分布在屏幕上 B、C 点之间的环带区域（以 O 点为中心），该环形区域中的点 P 与 O 点之间的距离 h_p 满足



解题图 16a.



解题图 16b.

$0.9980\ \text{cm} \le h_p \le 1.334\ \text{cm}$ ⑧

（3）如解题图 16b，两条光路的光程差为

$$\Delta L_P = D + \sqrt{r^2 + L^2} - \sqrt{r^2 + (L+D)^2} = D + L\sqrt{1+\left(\frac{r}{L}\right)^2} - (L+D)\sqrt{1+\left(\frac{r}{L+D}\right)^2}$$

$$\approx D + L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}\right)^2\right] - (L+D)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L+D}\right)^2\right] = \frac{r^2 D}{2L(L+D)} \quad ⑨$$

亮纹半径应满足

$$\Delta L_P = k\lambda, \quad ⑩$$

从而有

$$r_k = \sqrt{\frac{2kL(L+D)\lambda}{D}}, \quad k = 0,1,2,3,\cdots \quad ⑪$$

干涉条纹是以光轴和屏幕交点 O 为圆心的一系列同心圆环(仅存在于(2)中给出的区域中)，第 k 级明环的半径为

$$r_k = \sqrt{\frac{2kL(L+D)\lambda}{D}} = \sqrt{k} \times 1.130\ \text{mm}, \quad k_1 \le k \le k_2 \quad ⑫$$

其中

$$k_1 = \left(\frac{OC}{1.130\text{mm}}\right)^2 = 78.0003 \approx 78, \quad ⑬$$

$$k_2 = \left(\frac{OB}{1.130\text{mm}}\right)^2 = 139.363 \approx 139 \quad ⑭$$

能观测到的亮纹条数为

$$N = k_2 - k_1 + 1 = 62 \quad ⑮$$

附注：（傍轴近似公式的误差分析）

如果计算条纹级数 k 时不用傍轴近似，而用严格公式，我们有

$$k_1 = \frac{D + \sqrt{OC^2 + L^2} - \sqrt{OC^2 + (L+D)^2}}{\lambda} = 77.88 \approx 78,$$

$$k_2 = \frac{D + \sqrt{OB^2 + L^2} - \sqrt{OB^2 + (L+D)^2}}{\lambda} = 138.97 \approx 139$$

可以看到，与严格结果相比，使用傍轴近似公式对条纹级数 k 进行计算时，相对误差小于 0.003，绝对误差小于 0.4，不会影响最终结果。

评分标准：本题 40 分。

第（1）小问 12 分，①②式各 4 分，③④式各 2 分；

第（2）小问 12 分，⑤式 2 分，⑥⑦式各 4 分，⑧式 2 分；

第（3）小问 16 分，⑨式 4 分，⑩⑪⑫⑬⑭⑮式各 2 分。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。