2023届高三冲刺卷(一) 全国卷

文科数学试题

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B=$

A.$\{0,2\}$　B.$\{1,2\}$　C.$\{0,1,2\}$　D.$\{1,2,4\}$

2.若复数 z 满足 $\frac{z}{1-2i}=\frac{i}{1+i}$,则 z 在复平面内所对应的点位于

A.第一象限　B.第二象限　C.第三象限　D.第四象限

3.已知 $\cos 2x=-\frac{1}{3}$,则 $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为

A.$\frac{9}{16}$　B.$\frac{5}{6}$　C.$\frac{13}{20}$　D.$\frac{17}{24}$

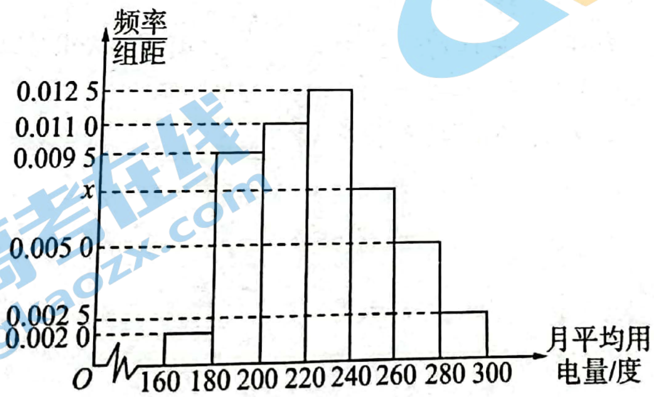
4.已知变量 x,y 满足 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x-2y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-8y$ 的最大值是

A.4　B.6　C.8　D.12

5.一个集合中含有4个元素,从该集合的子集中任取一个,则所取子集中含有3个元素的概率为

A.$\frac{4}{7}$　B.$\frac{3}{5}$　C.$\frac{1}{6}$　D.$\frac{1}{4}$

6.某汽车生产厂家研发了一种电动汽车,为了了解该型电动汽车的月平均用电量(单位:度)情况,抽取了150名户主手中的该型电动汽车进行调研,绘制了如图所示的频率分布直方图,其中,第5组小长方形最高点的纵坐标为 x,则该型电动汽车月平均用电量在[200,280)的户主人数为



A.98　B.103　C.108　D.112

7.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右两焦点分别为 F_1、F_2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，P 是椭圆上一点，$PF_1\perp x$ 轴，则$\frac{|PF_1|}{|F_1F_2|}$的值为

A.$\frac{3}{4}$　　B.$\frac{4}{5}$　　C.$\frac{5}{6}$　　D.$\frac{2}{3}$

8.已知函数 $f(x)=a(3-x)+\frac{bx}{x+1}$的图象过点$(0,1)$与$\left(3,\frac{9}{4}\right)$，则函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最大值为

A.$\frac{3}{2}$　　B.$\frac{7}{3}$　　C.$\frac{5}{4}$　　D.$\frac{8}{5}$

9.已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A、B 两点，$|AF_1|+|AF_2|=24$，$|AF_1|=|BF_1|=5\lambda$，$|AB|=4\lambda$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，则实数 λ 的值为

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.2　　D.4

10.数列$\{a_n\}$满足 $a_n-a_{n+1}=4(a_{n+1}-1)(a_n-1)$，且 $a_1=\frac{3}{2}$，则 $a_{12}=$

A.$\frac{43}{41}$　　B.$\frac{45}{43}$　　C.$\frac{47}{46}$　　D.$\frac{53}{48}$

11.定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足，①对于互不相等的任意 $x_1,x_2\in(0,2]$都有 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$.当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，②$f(x+2)=-f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，③$y=f(x+2)$的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(-10)$、$f\left(-\frac{9}{2}\right)$、$f(3)$的大小关系为

A.$f(-10)<f\left(-\frac{9}{2}\right)<f(3)$　　B.$f\left(-\frac{9}{2}\right)<f(3)<f(-10)$

C.$f(-10)<f(3)<f\left(-\frac{9}{2}\right)$　　D.$f(3)<f(-10)<f\left(-\frac{9}{2}\right)$

12.已知函数 $f(x)$与 $g(x)$定义域都为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x)=\frac{(x+1)g(x)}{e^x}$，且有 $g'(x)+xg'(x)-xg(x)<0$，$g(1)=2e$，则不等式 $f(x)<4$ 的解集为

A.$(1,4)$　　B.$(0,2)$　　C.$(-\infty,2)$　　D.$(1,+\infty)$

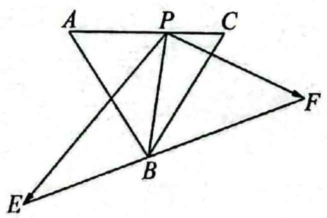
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-6ax+3a<0$”为假命题，则实数 a 的取值范围为________.

14.已知球 O 的一个截面圆内有一内接三角形 ABC，球 O 的表面积为 48π，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$BC=3$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为________.

15.已知圆 C_1 的圆心在直线 $x+2y-1=0$ 上，点$(3,0)$与$(1,-2)$都在圆 C_1 上，圆 $C_2:(x-3)^2+(y+1)^2=1$，则 C_1 与 C_2 的位置关系是________.

16.如图所示，$\triangle ABC$ 是边长为 8 的等边三角形，点 P 为 AC 边上的一个动点，长度为 6 的线段 EF 的中点为点 B，则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的取值范围是________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知$\triangle ABC$的角A,B,C对边分别为a,b,c，满足$\frac{b+c}{a}=\frac{b-a}{b-c}$，且$ab=\frac{1}{3}$，$a+b-\sqrt{2}c=0$，

（1）求C；

（2）求$\triangle ABC$外接圆的半径R.

18.（12 分）某农科所统计了单位面积某种化肥实施量x(kg)和玉米相应产量Y(kg)的相关数据，制作了数据对照表：

x(kg)	16	20	24	29	36
Y(kg)	340	350	362	404	454

若在合理施肥范围内x与Y具有线性相关关系，

（1）求Y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）请利用线性回归方程预测$x=40$ kg 时的玉米产量.

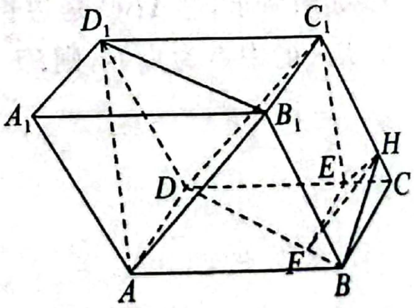
附：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

19.（12 分）如图所示，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$C_1E\perp$平面$ABCD$，$C_1E=4$，点H在CC_1上，且$\frac{CE}{CD}=\frac{CH}{CC_1}=\frac{1}{3}$.

（1）若四边形$ABCD$为平行四边形，求证：$EH\parallel$平面AB_1D_1；

（2）若点F在BD上，$EF\parallel BC$，$\angle DBC=90°$，$BC=3$，$FB=2$，求四棱锥$H-BCEF$的体积.



20.(12 分)已知斜率存在的直线 l 过点 $P(1,0)$且与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$交于 A,B 两点，

(1)若直线 l 的斜率为 1，M 为线段 AB 的中点，M 的纵坐标为 2，求抛物线 C 的方程；

(2)若点 Q 也在 x 轴上，且不同于点 P，直线 AQ,BQ 的斜率满足 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$，求点 Q 的坐标.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=e^x(x-1)-ax^2$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)讨论函数 $f(x)$的极值点的个数.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\varphi,\\ y=1+t\sin\varphi.\end{cases}$($t$ 为参数).

(1)若 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，求直线 l 的普通方程和曲线 C 的的直角坐标方程；

(2)过点 $P(0,-3)$向直线 l 作垂线，垂足为 Q，说明点 Q 的轨迹为何种曲线.

23.[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+3|$.

(1)解不等式 $f(x)+|x-3|>8$；

(2)若 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$在$(-\infty,+\infty)$上恒成立，求实数 m 的最小值.

2023 届高三冲刺卷(一)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

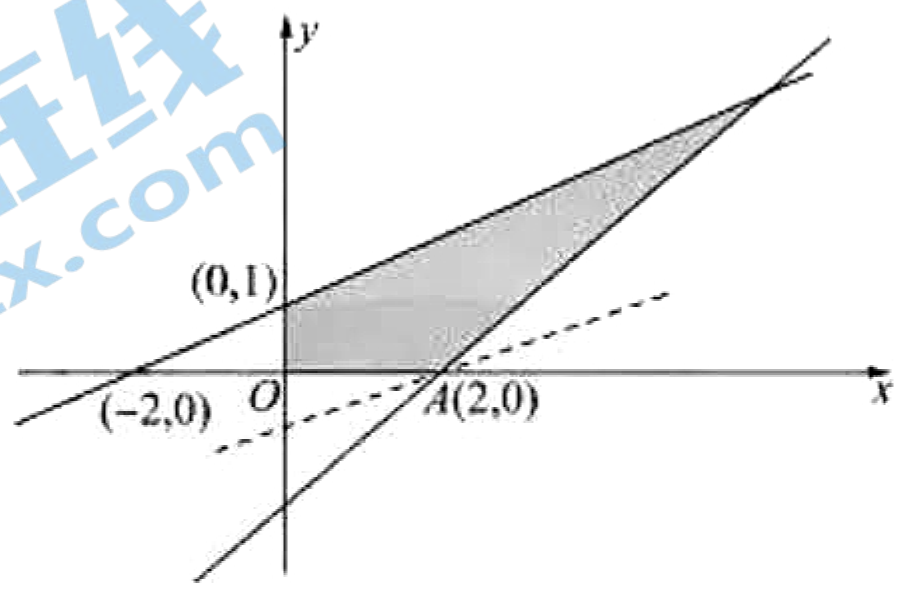
1.C 【解析】$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 C.

2.D 【解析】由 $\dfrac{z}{1-2i}=\dfrac{i}{1+i}$ 得 $z=\dfrac{2+i}{1+i}=\dfrac{3-i}{2}$，$\therefore z$ 在复平面内所对应的点位于第四象限.故选 D.

3.B 【解析】$\cos 2x=-\dfrac{1}{3}$，而 $\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}+\dfrac{1+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}=$

$1+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]=1+\dfrac{1}{2}\cos 2x=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.故选 B.

4.A 【解析】由约束条件画出可行域如图所示



则目标函数 $z=2x-8y$ 在点 $A(2,0)$ 取得最大值，代入得 $2\times2-8\times0=4$，故 $z=2x-8y$ 的最大值为 4.故选 A.

5.D 【解析】4 个元素的集合所有子集共 $2^4=16$ 个，设此集合为 $\{a,b,c,d\}$，事件 A："所取子集中含有 3 个元素"，则事件 A 的基本事件个数为 4 个，即 $\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，所以 $P(A)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.故选 D.

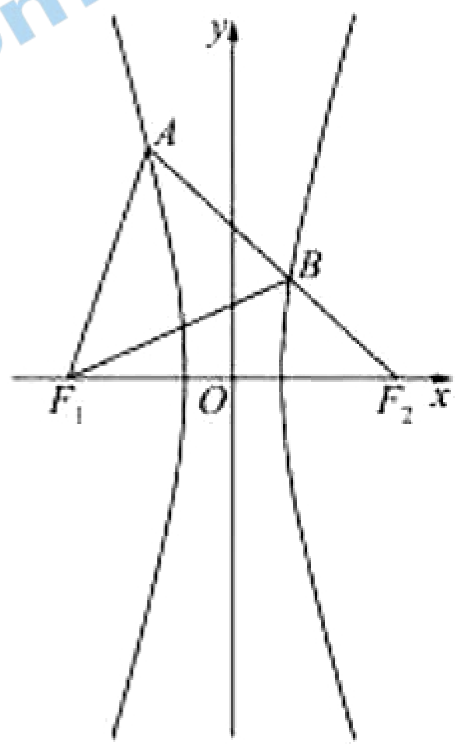
6.C 【解析】由 $(0.002+0.009\,5+0.011+0.012\,5+x+0.005+0.002\,5)\times20=1$，得 $x=0.007\,5$，$\therefore$ 直方图中 $x=0.007\,5$，$\therefore$ 月平均用电量在 $[200,280)$ 的用户有 $20\times(0.011+0.012\,5+0.007\,5+0.005)\times$[illegible]$=$[illegible]8 户.故选 C.

7.A 【解析】$\because PF_1\perp x$ 轴，$\therefore \dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{|PF_1|^2}{b^2}=1(a>b>0)$，可得 $|PF_1|=\dfrac{b^2}{a}$，$\therefore \dfrac{|PF_1|}{|F_1F_2|}=\dfrac{b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{c}{a}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(2-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.故选 A.

8.B 【解析】$\because$ 函数 $f(x)=a(3-x)+\dfrac{bx}{x+1}$ 的图象过点 $(0,1)$ 与 $\left(3,\dfrac{9}{4}\right)$，$\therefore f(0)=1$，$f(3)=\dfrac{9}{4}$，则 $\begin{cases}\dfrac{3b}{4}=\dfrac{9}{4},\\3a=1,\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=3$，故函数 $f(x)$ 的解析式为：$f(x)=\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{x}{3}+1$.

而 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{x}{3}+1=\dfrac{3(x+1)-3}{x+1}-\dfrac{x}{3}+1=\dfrac{13}{3}-\left[\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{x+1}{3}\right]\leqslant\dfrac{13}{3}-2\sqrt{\dfrac{3}{x+1}\cdot\dfrac{x+1}{3}}=\dfrac{7}{3}$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上的最大值为 $\dfrac{7}{3}$.故选 B.

9.C 【解析】如下图所示，设 $|BF_2|=k$，由双曲线的定义及 $|AF_1|=|BF_1|=5\lambda$，$|AB|=4\lambda$，可得



$|AF_2|-|AF_1|=|BF_1|-|BF_2|$，即$(4\lambda+k)-5\lambda=5\lambda-k$，解得 $k=3\lambda$，$2a=|BF_1|-|BF_2|=5\lambda-3\lambda=2\lambda$，即 $\lambda=a$，$|AF_1|=5a$，由$|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|AF_2|=7a$，$\because |AF_1|+|AF_2|=24$，$\therefore 12a=24$，$\therefore a=2$，即 $\lambda=2$，故选 C.

10.C 【解析】由 $a_n-a_{n+1}=4(a_{n+1}-1)(a_n-1)$可得$(a_n-1)-(a_{n+1}-1)=4(a_{n+1}-1)(a_n-1)$，

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=4$，而$\dfrac{1}{a_1-1}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}=2$，$\therefore$数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$为以 2 为首项，4 为公差的等差数列，$\therefore \dfrac{1}{a_n-1}=2+(n-1)4=4n-2$，$\therefore a_n=1+\dfrac{1}{4n-2}$，$\therefore a_{12}=\dfrac{47}{46}$，故选 C.

11.B 【解析】不妨设 $x_1>x_2$，$\because x_1,x_2\in(0,2]$，$\therefore \dfrac{x_1}{x_2}>1$，由于当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，$\therefore f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

因此 $f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore$函数 $f(x)$在区间$(0,2]$上单调递增.

又$\because f(x+2)=-f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$\therefore f(x)$是周期为 4 的周期函数.

$\because y=f(x+2)$的图象关于直线 $x=-2$ 对称，$\therefore y=f(x)$向左平移两个单位长度关于直线 $x=-2$ 对称，$\therefore y=f(x)$关于直线 $x=0$(y 轴)对称，$\therefore y=f(x)$是偶函数，$\therefore f(-10)=f(10)=f(2)$，$f\left(-\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)=f(-1)=f(1)$，

$\therefore f\left(-\dfrac{9}{2}\right)<f(3)<f(-10)$，故选 B.

12.D 【解析】由 $f(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{e^x}$可得 $f'(x)=\dfrac{g(x)e^x+(x+1)g'(x)e^x-(x+1)g(x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{xg'(x)+g'(x)-xg(x)}{e^x}$，

而 $g'(x)+xg'(x)-xg(x)<0$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，又 $g(1)=2e$，

而 $f(1)=\dfrac{2\times g(1)}{e^1}=\dfrac{4e}{e}=4$，$f(x)<4=f(1)$，

$\therefore x>1$，故不等式 $f(x)<4$ 的解集为$(1,+\infty)$，故选 D.

13.$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ 【解析】$\because$"$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-6ax+3a<0$"为假命题，$\therefore$"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-6ax+3a\geqslant 0$ 成立"为真命题，于是 $\Delta=36a^2-12a\leqslant 0$，即 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{3}$，故答案为$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

14.3 【解析】设球 O 的半径为 R，三角形 ABC 外接圆半径为 r，球心 O 到平面 ABC 的距离为 h，$\because$球 O 的表面积为 48π，$\therefore 4\pi R^2=48\pi$，解得 $R^2=12$. 由正弦定理：$2r=\dfrac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，$\therefore r=\sqrt{3}$，则 $R^2=h^2+r^2$，$\therefore 12=h^2+3$，解得 $h=3$. 故答案为 3.

15.相交 【解析】设圆 C_1 的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，因为圆心 C_1 在直线 $x+2y-1=0$ 上，且该圆经过$(3,0)$与$(1,-2)$两点，列方程组$\begin{cases}a+2b-1=0,\\(3-a)^2+(0-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=0,\\r=2,\end{cases}$ 即圆 C_1 的标准方程为$(x-1)^2+y^2=4$. 又圆 C_2：$(x-3)^2+(y+1)^2=1$，

$\therefore |C_1C_2|=\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$，$r_1+r_2=3$，$|r_2-r_1|=1$，而 $1<\sqrt{5}<3$，$\therefore C_1$ 与 C_2 的位置关系是相交，故答案为相交.

16.$[39,55]$ 【解析】$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BF})=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BE})=|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{PB}|^2-9$，当点 P 位于点 A 或点 C 时，$|\overrightarrow{PB}|$取最大值 8，当点 P 位于 AC 的中点时，$|\overrightarrow{PB}|$取最小值，即$|\overrightarrow{PB}|_{\min}=8\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，$\therefore |\overrightarrow{PB}|$的取值范围为$[4\sqrt{3},8]$，$\therefore \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的取值范围为$[39,55]$，故答案为$[39,55]$.

17.解：(1)由$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{b-a}{b-c}$可得 $b^2-c^2=ab-a^2$，

$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\because C\in(0,\pi)$ $\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)$\because ab=\dfrac{1}{3}$，$a+b=\sqrt{2}c$，

$\therefore \cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{(b+a)^2-2ab-c^2}{2ab}=\frac{2c^2-\frac{2}{3}-c^2}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$，整理得 $c^2=1$，

$\therefore c=1$.

由正弦定理可得 $2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore R=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………… 12 分

18.**解**：(1) 由表中数据计算得，$\bar{x}=25$，………………………………………… 1 分

$\bar{y}=382$，………………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=1\,438$，………………………………………… 4 分

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=244$，………………………………………… 6 分

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}\approx 5.893$，………………………………………… 7 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=382-5.893\times 25=234.675$. ………………………………………… 8 分

所以回归方程为 $\hat{y}=5.893x+234.675$. ………………………………………… 9 分

(2) 将 $x=40$ kg 代入回归方程得 $\hat{y}=5.893x+234.675$，………………………………………… 10 分

故预测 $x=40$ kg 时，玉米产量约为 $5.893\times 40+234.675=470.395$ kg. ………………………………………… 12 分

19.(1)**证明**：由 $\frac{CE}{CD}=\frac{CH}{CC_1}=\frac{1}{3}$ 可得 $EH\parallel DC_1$，………………………………………… 1 分

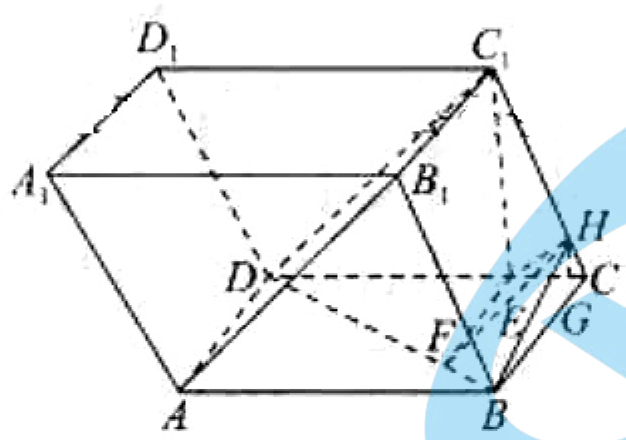
又∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AD\parallel B_1C_1$ 且 $AD=B_1C_1$，

$\therefore$ 四边形 AB_1C_1D 也为平行四边形，………………………………………… 3 分

$\therefore AB_1\parallel DC_1$，$\therefore EH\parallel AB_1$，而 $AB_1\subset$ 平面 AB_1D_1，$EH\not\subset$ 平面 AB_1D_1

$\therefore EH\parallel$ 平面 AB_1D_1. ………………………………………… 5 分

(2)**解**：如图，过点 H 作 $HG\perp DC$ 于点 G，



$\because C_1E\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $DCC_1D_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore HG\perp$ 平面 $ABCD$，………………………………………… 7 分

又 $\because \frac{CH}{CC_1}=\frac{1}{3}$，$C_1E=4$，$C_1E\parallel HG$，$\therefore HG=\frac{4}{3}$. ………………………………………… 8 分

又 $EF\parallel BC$，$\angle DBC=90^\circ$，$BC=3$，

$\therefore EF=\frac{2}{3}BC=2$，且 FB 为直角梯形 $FBCE$ 的高，而 $FB=2$，………………………………………… 10 分

由体积公式知，$V_{H-BCEF}=\frac{1}{3}S_{BCEF}HG=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2+3)\times 2\times\frac{4}{3}=\frac{20}{9}$. ………………………………………… 12 分

20.**解**：(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由题意，直线 l：$y=x-1$. ………………………………………… 1 分

联立 $\begin{cases}y=x-1,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x 得：$y^2-2py-2p=0$，$\therefore y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=p=2$，………………………………………… 3 分

$\therefore$抛物线 C 的方程：$y^2=4x$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)$\because$直线 l 过点 $P(1,0)$ 且与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，

$\therefore$直线 l 的斜率不为 0，于是可设直线 l 的方程为 $x=my-1$. $\because$直线 l 的斜率存在$\therefore m\neq 0$. ……………… 5 分

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2pmy-2p=0$. ……………………………………………………………… 6 分

于是 $\Delta=(-2pm)^2-4\times1\times(-2p)=4p^2m^2+8p>0$ 恒成立，

$y_1+y_2=2pm\neq0, y_1y_2=-2p$. ………………………………………………………………………………… 7 分

设 $Q(x_0,0)$，

$\because k_{AQ}+k_{BQ}=0$，即 $\dfrac{y_1}{x_1-x_0}+\dfrac{y_2}{x_2-x_0}=0$，整理得 $y_1(x_2-x_0)+y_2(x_1-x_0)=0$，……………………… 9 分

则 $y_1(my_2+1)+y_2(my_1+1)-x_0(y_1+y_2)=0$，

$\therefore x_0=\dfrac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+1=\dfrac{2m\cdot(-2p)}{2mp}+1=-2+1=-1$， ………………………………………………… 11 分

$\therefore$点 Q 的坐标为$(-1,0)$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

21.**解**：(1)$\because f(x)=e^x(x-1)-x^2$，$\therefore f'(x)=e^xx-2x$， ……………………………………………………… 1 分

$\therefore f'(1)=e-2$，而 $f(1)=-1$， ………………………………………………………………………………… 2 分

$\therefore$函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程 $y+1=(e-2)(x-1)$， ……………………………………………… 3 分

即$(e-2)x-y-e+1=0$. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)所以 $f'(x)=e^xx-2ax=x(e^x-2a)$，

当 $a\leqslant0$，$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$存在一个极值点 $x=0$. ……………………………………………… 6 分

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$时，则 $\ln 2a<0$，

当 $x\in(-\infty,\ln 2a)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\ln 2a,0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$时时，$f'(x)>0$，

此时 $f(x)$存在两个极值点 $x=0$，$x=\ln 2a$. ……………………………………………………………………… 8 分

当 $a=\dfrac{1}{2}$时，$\ln 2a=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$没有极值点. …………………… 9 分

当 $a>\dfrac{1}{2}$时，$\ln 2a>0$，

当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,\ln 2a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln 2a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$存在两个极值点 $x=0$，

$x=\ln 2a$. …… 11 分

综上所述：当 $0<a<\dfrac{1}{2}$或 $a>\dfrac{1}{2}$，存在两个极值点；

当 $a\leqslant0$ 时，存在一个极值点；

当 $a=\dfrac{1}{2}$时，没有极值点. …………………………………………………………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\cos\varphi,\\ y=1+t\sin\varphi,\end{cases}$

$\because \varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ ……………………………………………………………………………… 1 分

$\therefore$直线 l 的普通方程为 $y-1=x+1$，……………………………………………………………

即 $y=x+2$. ………………………………………………………………………………………… 3 分

由 $\rho=4\cos\varphi$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$. ……………………………………………………………………… 4 分

因为 $x=\rho\cos\theta$, $x^2+y^2=\rho^2$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$. ……………………………………………………… 5 分

(2)若 $\varphi=0$, 由 $\dfrac{y-1}{x+1}=\tan\varphi$ 可知直线 l 的方程为 $y=1$, 于是过点 $P(0,-3)$ 向直线 l 作垂线, 垂足为 $Q(0,1)$.

若 $\varphi\neq0$, 由直线 l 的参数方程可知直线 l 的斜率为 $\tan\varphi$,

∴过点 $P(0,-3)$ 且与直线 l 垂直的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{\tan\varphi}x-3$. ……………………………… 7 分

联立方程组 $\begin{cases} y=\tan\varphi\cdot(x+1)+1, \\ y=-\dfrac{1}{\tan\varphi}x-3, \end{cases}$ 整理得 $y^2+2y-3=-x^2-x$,

∴点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2+x+2y-3=0$, ……………………………………………………… 9 分

即 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{17}{4}$, 显然, 点 $(0,1)$ 也在 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\dfrac{17}{4}$ 上,

所以动点 Q 的轨迹为以点 $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$ 为圆心, $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 为半径的圆. ……………………………… 10 分

23. **解**: (1)∵ $f(x)+|x-3|=|x+3|+|x-3|$, ∴解不等式 $|x+3|+|x-3|>8$,

而 $|x+3|+|x-3|=\begin{cases} -2x, x\leqslant-3, \\ 6, -3<x\leqslant3, \\ 2x, x>3, \end{cases}$ ……………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant-3$ 时, $-2x>8$, 解得 $x<-4$; ……………………………………………………… 3 分

当 $x>3$ 时, $2x>8$, 解得 $x>4$. ……………………………………………………… 4 分

∴不等式 $f(x)+|x-3|>8$ 的解集为 $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$. ………………………………… 5 分

(2)由 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$ 可得 $m\geqslant\dfrac{|x+3|}{|x-3|+|x+9|}$. ……………………………… 6 分

∵ $|x-3|+|x+9|\geqslant2|x+3|$, 当且仅当 $(x-3)(x+9)\geqslant0$, 即 $x\leqslant-9$ 或 $x\geqslant3$ 时, 等号成立. ……… 8 分

∴ $\dfrac{|x+3|}{|x-3|+|x+9|}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立. ……………………………………… 9 分

故要使 $f(x)\leqslant m(|x-3|+|x+9|)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立, 只须 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$,

即实数 m 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。