

# 2023 北京北师大燕化附中高一（上）期中

## 数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 A.  $\{0\}$                       B.  $\{-1, 0\}$                       C.  $\{0, 1\}$                       D.  $\{-1, 0, 1\}$

2. 已知命题  $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$ , 则  $\neg p$  为 ( )  
 A.  $\forall x \geq 1, x^2 > 1$       B.  $\exists x < 1, x^2 > 1$       C.  $\forall x < 1, x^2 > 1$       D.  $\exists x \geq 1, x^2 > 1$

3. 方程组  $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$  的解集是 ( )

A.  $\{(1, -1), (-1, 1)\}$                       B.  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$   
 C.  $\{(2, -2), (-2, 2)\}$                       D.  $\{(2, 2), (-2, -2)\}$

4. 下面四个条件中，使  $a > b$  成立的充分而不必要的条件是 ( )

A.  $a^2 > b^2$                       B.  $a^3 > b^3$                       C.  $a > b+1$                       D.  $a > b-1$

5. 下列函数中在  $[0, +\infty)$  上单调递增的是 ( )

A.  $y = -x$                       B.  $y = \sqrt{x}$                       C.  $y = x^2 - 2x$                       D.  $y = \frac{1}{x}$

6. 如果奇函数  $f(x)$  在区间  $[3, 7]$  上是增函数且最小值为 5, 那么  $f(x)$  在区间  $[-7, -3]$  上是 ( )

A. 增函数且最小值为 -5                      B. 增函数且最大值为 -5  
 C. 减函数且最小值为 -5                      D. 减函数且最大值为 -5

7. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  的图像是连续不断的，且有如下对应值表：

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	6.1	2.9	-3.5	-1

那么函数  $f(x)$  一定存在零点的区间是 ( )

A.  $(-\infty, 1)$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $(2, 3)$                       D.  $(3, 4)$

8. “ $ab > 0$ ” 是 “ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ” 的 ( )

A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件

9. 根据统计，一名工人组装第  $x$  件某产品所用的时间（单位：分钟）为  $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$  ( $A, c$  为常数).

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟，组装第  $A$  件产品用时 15 分钟，那么  $c$  和  $A$  的值分别是

( )

- A. 75, 25      B. 75, 16      C. 60, 25      D. 60, 16

10. 对于非空数集  $M$ , 定义  $f(M)$  表示该集中所有元素的和. 给定集合  $S = \{2, 3, 4, 5\}$ , 定义集合  $T = \{f(A) | A \subseteq S, A \neq \emptyset\}$ , 则集合  $T$  的元素的个数为 ( )

- A. 11      B. 12      C. 13      D. 14

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. (5 分) 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

12. (5 分) 不等式  $\frac{2x+1}{x-2} \geq 1$  的解集为\_\_\_\_\_.

13. (5 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x-2, & x \leq 1 \end{cases}$ , 则  $f[f(2)] =$ \_\_\_\_\_; 函数  $f(x)$  的值域是\_\_\_\_\_.

14. (5 分) 写出一个使得命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$  恒成立” 是假命题的实数  $a$  的值:\_\_\_\_\_.

15. (5 分) 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 若对  $\forall x_1 \in D, \exists x_2 \in D$ , 使得  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ , 则称函数  $f(x)$  具有性质  $T$ , 给出下列四个结论:

- ① 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  具有性质  $T$ ;
- ② 函数  $f(x) = x - 2$  不具有性质  $T$ ;
- ③ 函数  $f(x) = x^2 + 1$  具有性质  $T$ ;
- ④ 若函数  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [\frac{1}{4}, t]$  具有性质  $T$ , 则  $t = 4$ .

其中, 所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (14 分) 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $P = \{x | x(x-2) \geq 0\}$ ,  $M = \{x | a < x < 2a+6\}$ .

- (1) 求集合  $\complement_U P$ ;
- (2) 若  $\complement_U P \subseteq M$ , 求实数  $a$  的取值范围.

17. (14 分) 已知集合  $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ , 集合  $B = \{x | |x| < a\}$ .

- (1) 当  $a = 2$  时, 求  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ ;
- (2) 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

18. (14 分) 函数  $f(x) = \frac{ax+b}{4x^2+1}$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且  $f(1) = 1$ .

- (1) 求  $a, b$  的值;
- (2) 判断并用定义证明  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  的单调性.

19. (14 分) 已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$  有两个不相等的实根  $x_1, x_2$ .

- (1) 求  $k$  的取值范围;

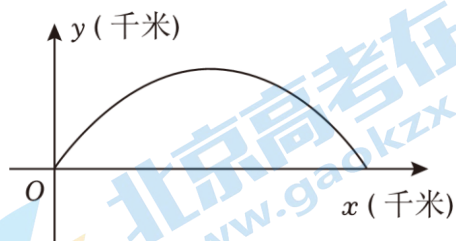
(2) 若  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{7}$ , 求  $k$  的值;

(3) 求  $x_1^2 + x_2^2$  的取值范围.

20. (14分) 如图, 建立平面直角坐标系  $xOy$ ,  $x$  轴在地平面上,  $y$  轴垂直于地平面, 单位长度为 1 千米. 某炮位于坐标原点. 已知炮弹发射后的轨迹在函数  $y = -\frac{1}{20}(1+k^2)x^2 + kx$  ( $k > 0$ ) 表示的图像上, 其中  $k$  是与发射方向有关的参数, 炮的射程是指炮弹落地点到原点的距离.

(1) 求炮的最大射程;

(2) 设在第一象限有一飞行物 (忽略其大小), 其飞行高度为 3.2 千米, 试问它的横坐标不超过多少时, 炮弹可以击中它? 请说明理由.



21. (15分) 如果  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 且对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 均有  $f(-x) \neq -f(x)$ , 则称该函数是“ $X$ -函数”.

(I) 分别判断下列函数: ①  $y = \frac{1}{x^2+1}$ ; ②  $y = x+1$ ; ③  $y = x^2+2x-3$  是否为“ $X$ -函数”? (直接写出

结论)

(II) 若函数  $f(x) = x - x^2 + a$  是“ $X$ -函数”, 求实数  $a$  的取值范围;

(III) 设“ $X$ -函数”  $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in A \\ x, & x \in B \end{cases}$ , 在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 求所有可能的集合  $A$  与  $B$ .

## 参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】B

【分析】找出  $A$  与  $B$  的公共元素，即可确定出两集合的交集。

【解答】解： $\because A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{x | -1 \leq x < 1\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{-1, 0\}$ 。

故选：B。

【点评】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键。

2. 【答案】C

【分析】运用特称命题的否定为全称命题，以及量词和不等号的变化，即可得到所求命题的否定。

【解答】解：由特称命题的否定为全称命题，可得

命题  $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$ ，的否定为  $\neg p: \forall x < 1, x^2 > 1$ ，

故选：C。

【点评】本题考查命题的否定，注意运用特称命题的否定为全称命题，以及量词和不等号的变化，考查转化思想，属于基础题。

3. 【答案】A

【分析】运用代入消元法解方程组即可。

【解答】解：记  $\begin{cases} x+y=0, & \text{①} \\ x^2+y^2=2, & \text{②} \end{cases}$ ，由①得： $x = -y$ ③，将③代入②得  $2y^2=2$ ，解得  $y = \pm 1$ ，

当  $y=1$  时， $x=-1$ ，当  $y=-1$  时， $x=1$ ，

故原方程组的解集为  $\{(1, -1), (-1, 1)\}$ ，

故选：A。

【点评】本题考查解方程组，运用代入法进行消元是关键，属于基础题。

4. 【答案】C

【分析】根据不等式的性质，利用充分而不必要条件的定义进行判断即可。

【解答】解：A. 当  $a = -1$ ， $b = 0$  时，满足  $a^2 > b^2$ ，但  $a > b$  不成立， $\therefore A$  错误。

B.  $\because y = x^3$  是  $R$  上的增函数， $\therefore a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$ ， $\therefore B$  是充要条件，

C. 当  $a > b+1$ ，满足  $a > b$ ， $\therefore a > b+1$  是  $a > b$  成立的充分不必要条件。

D. 当  $a > b$ ，满足  $a > b-1$ ， $\therefore a > b-1$  是  $a > b$  成立的必要不充分条件。

故正确的是 C，

故选：C。

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，要求熟练掌握不等式的性质，比较基础。

5. 【答案】B

【分析】根据题意，依次分析选项中函数的单调性，综合即可得答案。

【解答】解：根据题意，依次分析选项：

对于A， $y = -x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，不符合题意，

对于B， $y = \sqrt{x}$ ，在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，符合题意，

对于C， $y = x^2 - 2x$ ，图象关于 $x = 1$ 对称， $[0, +\infty)$ 上不是单调递增的函数，不符合题意，

对于D， $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减，不满足题意。

故选：B.

【点评】本题考查了基本初等函数在某一区间上的单调性问题，是基础题。

## 6. 【答案】B

【分析】由题意结合奇函数的对称性和所给函数的性质即可求得最终结果。

【解答】解：奇函数的函数图象关于坐标原点中心对称，

则若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值为5，

那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上是增函数且最大值为-5。

故选：B.

【点评】本题考查了奇函数的性质，函数的对称性及其应用等，重点考查学生对基础概念的理解和计算能力，属于中等题。

## 7. 【答案】C

【分析】由已知数表结合函数零点判定定理得结论。

【解答】解： $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续不断的函数，

且 $f(2) = 2.9 > 0$ ， $f(3) = -3.5 < 0$ ，

得 $f(2)f(3) < 0$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 一定存在零点的区间是 $(2, 3)$ 。

故选：C.

【点评】本题考查函数零点判定定理的应用，是基础题。

## 8. 【答案】C

【分析】由 $ab > 0$ 可得 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ，从而可得 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ；由 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ，可得 $\frac{b}{a} > 0$ ，进而可得 $ab > 0$ ，即可得答案。

【解答】解：由 $ab > 0$ 可得 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ，  
当 $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 时，由基本不等式可得 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ，当 $a = b$ 时，等号成立；  
当 $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ 时， $\frac{b}{a} > 0$ ， $\frac{a}{b} > 0$ ，由基本不等式可得 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ，所以充分性满足；  
当 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ 时，设 $t = \frac{b}{a}$ ，



则有  $t + \frac{1}{t} \geq 2$ , 由对勾函数的性质可得  $t > 0$ , 即  $\frac{b}{a} > 0$ , 可得  $ab > 0$ , 所以必要性满足.

故 “ $ab > 0$ ” 是 “ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ ” 的充要条件.

故选: C.

【点评】本题考查了充要条件的判断, 属于基础题.

9. 【答案】D

【分析】首先,  $x=A$  的函数值可由表达式直接得出, 再根据  $x=4$  与  $x=A$  的函数值不相等, 说明求  $f(4)$  要用  $x < A$  对应的表达式, 将方程组联解, 可以求出  $c$ 、 $A$  的值.

【解答】解: 由题意可得:  $f(A) = \frac{c}{\sqrt{A}} = 15$ ,

所以  $c = 15\sqrt{A}$

而  $f(4) = \frac{c}{\sqrt{4}} = 30$ , 可得出  $\frac{15\sqrt{A}}{2} = 30$

故  $\sqrt{A} = 4$ , 可得  $A = 16$

从而  $c = 15\sqrt{A} = 60$

故选: D.

【点评】分段函数是函数的一种常见类型, 解决的关键是寻找不同自变量所对应的范围, 在相应区间内运用表达式加以解决.

10. 【答案】B

【分析】因为  $A \neq \emptyset$ , 所以  $f(A)$  的最小值为 2, 最大值是  $S$  中所有元素之和为 14, 再将不可能的取值剔除即可.

【解答】解: 因为  $A \neq \emptyset$ , 所以  $f(A)$  的最小值为 2,  $f(A)$  的最大值是  $S$  中所有元素之和为 14, 但是  $3+4+5=12$ ,  $2+3+4+5=14$ , 也就是  $f(A)$  无法取到 13, 所以  $T$  中的元素有 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 共 12 个

故选: B.

【点评】本题不要去抓集合  $A$  的所有情况, 只需要判断其元素之和的最小值与最大值, 再剔除掉其中不可能的取值即可, 属于简单题

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】见试题解答内容

【分析】直接由分母中根式内部的代数式大于 0 求解.

【解答】解: 由  $2x+1 > 0$ , 得  $x > -\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$  的定义域为  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ .

故答案为:  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ .

【点评】本题考查函数的定义域及其求法，是基础的计算题。

12. 【答案】  $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$ .

【分析】先将不等式进行化简变形，转化为  $\begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ，求解即可。

【解答】解：不等式  $\frac{2x+1}{x-2} \geq 1$  等价于  $\frac{2x+1}{x-2} - 1 \geq 0$ ，即  $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$ ，

即  $\begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ，解得  $x \leq -3$  或  $x > 2$ ，

所以不等式  $\frac{2x+1}{x-2} \geq 1$  的解集为  $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

故答案为： $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

【点评】本题考查了不等式的求解，主要考查的是分式不等式的解法，解题的关键是将分析不等式进行等价转化，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于基础题。

13. 【答案】 见试题解答内容

【分析】先求  $f(2)$ ，再求  $ff(2)$ ；分  $x > 1$  时与  $x \leq 1$  时讨论，从而求值域。

【解答】解： $f(2) = \frac{1}{2}$ ，

$ff(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$ ；

当  $x > 1$  时， $f(x) = \frac{1}{x}$ ，故  $0 < \frac{1}{x} < 1$ ；

当  $x \leq 1$  时， $f(x) = -x - 2 \geq -3$ ；

故函数  $f(x)$  的值域是  $[-3, +\infty)$ ；

故答案为： $-\frac{5}{2}, [-3, +\infty)$ 。

【点评】本题考查了分段函数的应用，属于基础题。

14. 【答案】 -1

【分析】将条件转化为“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 \leq 0$  成立”，检验  $a = 0$  是否满足条件，当  $a \neq 0$  时，必须  $a < 0$

或  $\begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 12a \geq 0 \end{cases}$ ，从而解出实数  $a$  的取值范围，进而得解。

【解答】解：命题“ $ax^2 - 2ax + 3 > 0$  恒成立”是假命题，即“ $\exists x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 \leq 0$  成立”是真命题 ①。

当  $a = 0$  时，①不成立，

当  $a \neq 0$  时，要使①成立，必须  $a < 0$ ，或  $\begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 12a \geq 0 \end{cases}$ ，

$\therefore a < 0$  或  $a \geq 3$

故答案为：-1。

【点评】本题考查一元二次不等式的应用，注意联系对应的二次函数的图象特征，体现了等价转化和分类讨论的数学思想。

15. 【答案】①②④.

【分析】根据“性质  $T$ ”的定义对四个结论逐一分析，从而确定正确答案.

【解答】解：对于①，函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ ,

对  $\forall x_1 \in \{x|x \neq 0\}$ ,  $f(x_1) = \frac{1}{x_1}$ , 要使  $x_2 \in \{x|x \neq 0\}$ ,  $f(x_2) = \frac{1}{x_2}$ , 且  $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$ ,

只需  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ , 由于  $x_2 = \frac{1}{x_1} \in \{x|x \neq 0\}$ , 所以  $f(x) = \frac{1}{x}$  具有性质  $T$ , ①正确;

对于②, 对于函数  $f(x) = x - 2$ , 由于  $x_1 = 2$  时,  $f(x_1) = 0$ ,

所以不存在  $x_2$ , 使  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ , 所以函数  $f(x) = x - 2$  不具有性质  $T$ , ②正确;

对于③, 对于函数  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $x_1 = 1$  时,  $f(x_1) = 2$ , 而  $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ ,

所以不存在  $x_2$ , 使  $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ , 所以函数  $f(x) = x^2 + 1$  不具有性质  $T$ , ③错误;

对于④, 若函数  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [\frac{1}{4}, t]$  具有性质  $T$ ,

则对于  $\forall x_1 \in [\frac{1}{4}, t]$ ,  $\exists x_2 \in [\frac{1}{4}, t]$ , 使  $f(x_1) \cdot f(x_2) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 1$ ,

即  $x_1 x_2 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ ,  $\frac{1}{x_1} \in [\frac{1}{t}, 4]$ ,

所以  $[\frac{1}{4}, t] = [\frac{1}{t}, 4]$ ,

所以  $t = 4$ , 所以④正确.

综上所述, 正确的结论为①②④.

故答案为: ①②④.

【点评】本题属于新概念题, 考查了一次函数、幂函数及二次函数的性质, 理解定义是关键, 属于中档题.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1)  $(0, 2)$ ;

(2)  $[-2, 0]$ .

【分析】(1) 解一元二次不等式  $x(x-2) \geq 0$ , 可得集合  $P$ , 求出  $C_U P$ ;

(2) 根据  $C_U P \subseteq M$ , 利用区间端点建立不等关系, 解不等式组即可求得结果.

【解答】解: 由  $x(x-2) \geq 0$ , 得  $x \geq 2$  或  $x \leq 0$ ,

$\therefore P = \{x|x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0\}$ .

(1)  $C_U P = \{x|0 < x < 2\} = (0, 2)$ .

(2)  $\because C_U P \subseteq M$ ,  $M = \{x|a < x < 2a+6\}$ ,

$\therefore M \neq \emptyset$ ,  $\begin{cases} 2a+6 > a \\ a < 0 \\ 2a+6 \geq 2 \end{cases}$ , 解得  $-2 \leq a < 0$ .



∴实数  $a$  的取值范围是  $[-2, 0]$ .

【点评】本题考查一元二次不等式的解法，集合的运算，属基础题.

17. 【答案】(1)  $\{x | -3 \leq x \leq -2\}$ ;

(2)  $\{a | a > 3\}$ .

【分析】(1) 解不等式求得  $A, B$ ，由此求得  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ ;

(2) 根据“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件列不等式，从而求得  $a$  的取值范围.

【解答】解：(1)  $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \leq 0$ ，解得  $-3 \leq x \leq 1$ ，

所以  $A = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$ .

当  $a=2$  时， $|x| < 2$  解得  $-2 < x < 2$ ，所以  $B = \{x | -2 < x < 2\}$ ，

所以  $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$ ，

所以  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | -3 \leq x \leq -2\}$ .

(2) 由于“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件，

所以  $B \neq \emptyset$ ， $a > 0$ ， $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ，

所以  $B = \{x | -a < x < a\}$ ，

所以，解得  $a > 3$ ，

所以  $a$  的取值范围是  $\{a | a > 3\}$ .

【点评】本题考查一元二次不等式的解法，集合的运算，充要条件，属中档题.

18. 【答案】见试题解答内容

【分析】(1) 根据题意，由函数的奇偶性分析可得  $f(-1) = -1$ ，则可得  $\begin{cases} \frac{a+b}{5} = 1 \\ \frac{-a+b}{5} = -5 \end{cases}$ ，解可得  $a, b$  的

值；

(2) 由(1)的结论， $f(x) = \frac{5x}{4x^2+1}$ ，利用作差法分析可得答案.

【解答】解：(1) 根据题意， $f(x) = \frac{ax+b}{4x^2+1}$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，且  $f(1) = 1$ ，

则  $f(-1) = -f(1) = -1$ ，

则有  $\begin{cases} \frac{a+b}{5} = 1 \\ \frac{-a+b}{5} = -5 \end{cases}$ ，解可得  $a=5, b=0$ ；

(2) 由(1)的结论， $f(x) = \frac{5x}{4x^2+1}$ ，

设  $\frac{1}{2} < x_1 < x_2$ ，

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5x_1}{4x_1^2+1} - \frac{5x_2}{4x_2^2+1} = \frac{5(1-4x_1x_2)(x_1-x_2)}{(4x_1^2+1)(4x_2^2+1)}$$

又由  $\frac{1}{2} < x_1 < x_2$ , 则  $(1 - 4x_1x_2) < 0$ ,  $(x_1 - x_2) < 0$ ,

则  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ,

则函数  $f(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递减.

【点评】本题考查函数的奇偶性与单调性的性质以及应用, 关键是求出  $a$ 、 $b$  的值, 属于基础题.

19. 【答案】(1)  $k$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ ,

(2)  $k$  的值是 2,

(3)  $x_1^2 + x_2^2$  的取值范围是  $(8, +\infty)$ .

【分析】(1) 由题意可得,  $\Delta > 0$ , 解不等式即可求解,

(2) 根据韦达定理求出两根之和以及两根之积, 再代入求解即可,

(3) 把已知条件转化, 进而求解结论.

【解答】解: (1)  $\because$  关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$  有两个不相等的实根  $x_1, x_2$ ,

$$\therefore \Delta = [-2(k+1)]^2 - 4(k^2 + 3) > 0 \Rightarrow k > 1,$$

$\therefore k$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ ,

(2)  $\because$  关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$  有两个不相等的实根  $x_1, x_2$ ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2(k+1), x_1 \cdot x_2 = k^2 + 3,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{7} \text{ 即 } \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{2(k+1)}{k^2 + 3} = \frac{6}{7},$$

$$\therefore 3k^2 - 7k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ (} k = \frac{1}{3} \text{ 舍),}$$

$\therefore k$  的值是 2,

$$(3) \because x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = [2(k+1)]^2 - 2(k^2 + 3) = 2(k^2 + 4k - 1) = 2(k+2)^2 - 10,$$

$\because k > 1$ ,

$$\therefore 2(k+2)^2 - 10 > 2 \times (1+2)^2 - 10 = 8,$$

$\therefore x_1^2 + x_2^2$  的取值范围是  $(8, +\infty)$ .

【点评】本题主要考查了一元二次方程的根的存在条件以及韦达定理的应用, 属于中档题.

20. 【答案】(1) 10 千米;

(2) 6 千米.

【分析】(1) 求炮的最大射程即求  $y = kx - \frac{1}{20}(1+k^2)x^2$  ( $k > 0$ ) 与  $x$  轴的横坐标, 求出后应用基本不等式求解;

(2) 求炮弹击中目标时的横坐标的最大值, 由一元二次方程根的判别式求解.

【解答】解: (1) 函数  $y = -\frac{1}{20}(1+k^2)x^2 + kx$  ( $k > 0$ ),

$$\text{令 } y = 0 \text{ 得, } -\frac{1}{20}(1+k^2)x^2 + kx = 0,$$

$$\therefore x = \frac{20k}{1+k^2} = \frac{20}{\frac{1}{k}+k} \leq \frac{20}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot k}} = 10, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{k}=k, \text{ 即 } k=1 \text{ 时, 等号成立,}$$

$\therefore$  炮的最大射程为 10 千米;

(2)  $\because x > 0,$

$\therefore$  炮弹可以击中目标等价于存在  $k > 0,$  使得  $-\frac{1}{20}(1+k^2)x^2+kx=3.2$  成立,

即关于  $k$  的方程  $x^2k^2 - 20xk + x^2 + 64 = 0$  有正根,

$$\text{由韦达定理可得, } \begin{cases} \Delta = (-20x)^2 - 4x^2(x^2 + 64) \geq 0 \\ \frac{-20x}{x^2} > 0 \\ \frac{x^2 + 64}{x^2} > 0 \end{cases},$$

解得  $0 < x \leq 6,$

$\therefore$  它的横坐标不超过 6 千米时, 炮弹可以击中它.

**【点评】** 本题主要考查了函数模型的应用, 考查了基本不等式的应用, 以及学生的计算能力, 属于中档题型.

21. **【答案】** 见试题解答内容

**【分析】** (I) 直接利用信息的应用求出结果.

(II) 利用信息的应用求出参数的取值范围.

(III) 利用函数的单调性的应用和应用的例证求出结果.

**【解答】** 解: (I) ①②是“X-函数”, ③不是“X-函数”.

(II)  $\because f(-x) = -x - x^2 + a,$

$-f(x) = -x + x^2 - a,$

函数  $f(x) = x + x^2 + a$  是“X-函数”,  $\therefore f(-x) = -f(x)$  无实数解,

即  $-x - x^2 + a = x + x^2 - a, x^2 = a$  无实数解,

$\therefore a < 0$

$\therefore a$  的取值范围为  $\{a | a < 0\}$

(III) 对任意的  $x \neq 0,$

若  $x \in A$  且  $-x \in A,$  则  $-x \neq x, f(-x) = f(x),$  与  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调增矛盾, 舍去;

若  $x \in B$  且  $-x \in B, f(-x) = -f(x),$  与  $f(x)$  是“X-函数”矛盾, 舍去;

$\therefore$  对任意的  $x \neq 0, x$  与  $-x$  恰有一个属于  $A,$  另一个属于  $B.$

$\therefore (0, +\infty) \subseteq A, (-\infty, 0) \subseteq B,$

假设  $0 \in B,$  则  $f(-0) = -f(0),$  与  $f(x)$  是“X-函数”矛盾, 舍去;

$\therefore 0 \in A,$

经检验,  $A = [0, +\infty), B = (-\infty, 0)$  符合题意.

【点评】本题考查的知识要点：信息题型的应用，反证法的应用，主要考查学生的运算能力和转换能力及思维能力，属于中档题型。



# 北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

