北京市东城区 2020—2021 学年度第二学期高三综合练习(一)

数　学

2021.4

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|x<1\}$，那么 $A\cup B=$

(A)$(-1,2)$　　(B)$(-1,1)$　　(C)$(-\infty,2)$　　(D)$(-\infty,1)$

(2)在复平面内，复数$(1+2\mathrm{i})\mathrm{i}$对应的点位于

(A)第一象限　　(B)第二象限　　(C)第三象限　　(D)第四象限

(3)某中学高一、高二和高三各年级人数见下表.采用分层抽样的方法调查学生的健康状况，在抽取的样本中，高二年级有 20 人，那么该样本中高三年级的人数为

(A)18

(B)22

(C)40

(D)60

年级	人数
高一	550
高二	500
高三	450
合计	1500

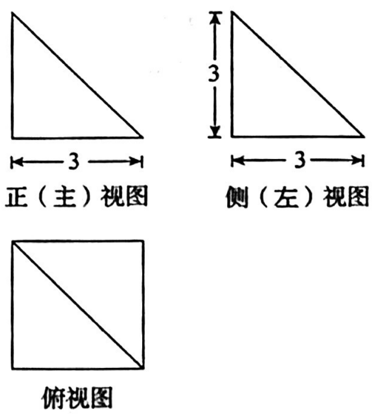
(4)某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的体积为

(A)$\frac{9}{2}$

(B)9

(C)$\frac{27}{2}$

(D)27



(5)已知圆 $x^2+y^2=1$ 截直线 $y=k(x+1)(k>0)$所得弦的长度为 1，那么 k 的值为

(A)$\frac{1}{2}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C)1　　(D)$\sqrt{3}$

(6)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,0<x<2,\\ 6-x,x\geqslant 2,\end{cases}$那么不等式 $f(x)\geqslant\sqrt{x}$的解集为

(A)$(0,1]$　　(B)$(0,2]$　　(C)$[1,4]$　　(D)$[1,6]$

(7)"$|x|<|y|$"是"$\ln x<\ln y$"成立的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

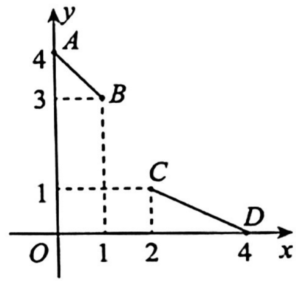
(8)宽与长的比为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$的矩形叫做黄金矩形. 它广泛的出现在艺术、建筑、人体和自然界中,令人赏心悦目. 在黄金矩形 $ABCD$ 中,$BC=\sqrt{5}-1$,$AB>BC$,那么$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值为

(A)$\sqrt{5}-1$　　(B)$\sqrt{5}+1$　　(C)4　　(D)$2\sqrt{5}+2$

(9)已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F 与抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$ 的焦点重合,P 为椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的公共点,且 $PF\perp x$ 轴,那么椭圆 C_1 的离心率为

(A)$\sqrt{2}-1$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D)$\sqrt{3}-1$

(10)如图,将线段 AB,CD 用一条连续不间断的曲线 $y=f(x)$ 连接在一起,需满足要求:曲线 $y=f(x)$ 经过点 B,C,并且在点 B,C 处的切线分别为直线 AB,CD,那么下列说法正确的是



(A)存在曲线 $y=ax^3+bx^2-2x+5(a,b\in\mathbf{R})$满足要求

(B)存在曲线 $y=\frac{\sin ax+\cos bx}{2}+c(a,b,c\in\mathbf{R})$满足要求

(C)若曲线 $y=f_1(x)$和 $y=f_2(x)$满足要求,则对任意满足要求的曲线 $y=g(x)$,存在实数 λ,μ,使得 $g(x)=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$

(D)若曲线 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$ 满足要求,则对任意实数 λ,μ,当 $\lambda+\mu=1$ 时,曲线 $y=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x)$满足要求

第二部分 (非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分。

(11)在$(1-\sqrt{x})^5$ 的展开式中,x^2 的系数为________.(用数字作答)

(12)已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{m}=1$ 经过点$(\sqrt{2},2)$,那么 m 的值为________,C 的渐近线方程为________.

(13)已知$\{a_n\}$为等比数列,$a_1=1$,$a_4=\frac{1}{8}$,那么$\{a_n\}$的公比为________,数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 5 项和为________.

(14)已知函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$,其中 x 和 $f(x)$部分对应值如下表所示:

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	-2	$-2\sqrt{3}$	-2	2	$2\sqrt{3}$

那么 $A=$________.

(15)设 A 是非空数集,若对任意 $x,y\in A$,都有 $x+y\in A$,$xy\in A$,则称 A 具有性质 P. 给出以下命题:

①若 A 具有性质 P,则 A 可以是有限集;

②若 A_1,A_2 具有性质 P,且 $A_1\cap A_2\neq\varnothing$,则 $A_1\cap A_2$ 具有性质 P;

③若 A_1,A_2 具有性质 P,则 $A_1\cup A_2$ 具有性质 P;

④若 A 具有性质 P,且 $A\neq\mathbf{R}$,则 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 不具有性质 P.

其中所有真命题的序号是________.

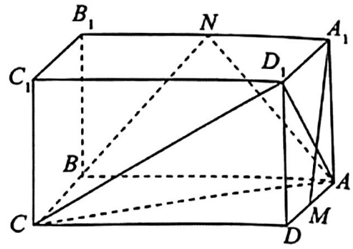
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 BCC_1B_1 是边长为 1 的正方形，$AB=2$，M，N 分别为 AD，A_1B_1 的中点.

(Ⅰ)求证：MA_1 // 平面 ANC；

(Ⅱ)求直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值.



(17)(本小题 13 分)

在△ABC 中，$\cos C=\frac{1}{7}$，$c=8$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

(Ⅰ)b 的值；

(Ⅱ)角 A 的大小和△ABC 的面积.

条件①：$a=7$；

条件②：$\cos B=\frac{11}{14}$.

注：如果选择条件①、条件②分别解答，按第一个解答计分.

(18)(本小题 14 分)

小明同学两次测试成绩(满分 100 分)如下表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物
第一次	87	92	91	92	85	93
第二次	82	94	95	88	94	87

(Ⅰ)从小明同学第一次测试的科目中随机抽取 1 科，求该科成绩大于 90 分的概率；

(Ⅱ)从小明同学第一次测试和第二次测试的科目中各随机抽取 1 科，记 X 为抽取的 2 科中成绩大于 90 分的科目数量，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

(Ⅲ)现有另一名同学两次测试成绩(满分 100 分)及相关统计信息如下表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物	6 科成绩均值	6 科成绩方差
第一次	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	x_1	D_1
第二次	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	x_2	D_2

将每科两次测试成绩的均值作为该科的总评成绩，这 6 科总评成绩的方差为 D_3.

有一种观点认为：若 $x_1=x_2$，$D_1<D_2$，则 $D_1\leqslant D_3\leqslant D_2$. 你认为这种观点是否正确？(只写“正确”或“不正确”)

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+1$,其中 $a>0$.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(Ⅱ)若曲线 $y=f(x)$在点$(-a,f(-a))$处的切线与 y 轴的交点为$(0,m)$,求 $m+\frac{1}{a}$的最小值.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $D(-2,0)$,且焦距为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)过点 $A(-4,0)$的直线 l(不与 x 轴重合)与椭圆 C 交于 P,Q 两点,点 T 与点 Q 关于 x 轴对称,直线 TP 与 x 轴交于点 H.是否存在常数λ,使得$|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$成立,若存在,求出 λ 的值;若不存在,说明理由.

(21)(本小题 15 分)

设 $n(n\geqslant2)$为正整数,若 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足:

①$x_i\in\{0,1,\cdots,n-1\},i=1,2,\cdots,n$;

②对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$,均有 $x_i\neq x_j$.

则称 α 具有性质 $E(n)$.

对于 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义集合 $T(\alpha,\beta)=\{t\mid t=|x_i-y_i|,i=1,2,\cdots,n\}$.

(Ⅰ)设 $\alpha=(0,1,2)$,若 $\beta=(y_1,y_2,y_3)$具有性质 $E(3)$,写出一个 β 及相应的 $T(\alpha,\beta)$;

(Ⅱ)设 α 和 β 具有性质 $E(6)$,那么 $T(\alpha,\beta)$是否可能为$\{0,1,2,3,4,5\}$,若可能,写出一组 α 和 β,若不可能,说明理由;

(Ⅲ)设 α 和 β 具有性质 $E(n)$,对于给定的 α,求证:满足 $T(\alpha,\beta)=\{0,1,\cdots,n-1\}$的 β 有偶数个.