百师联盟 2021 届高三 开年摸底联考 全国卷 I
文 科 数 学 试 卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

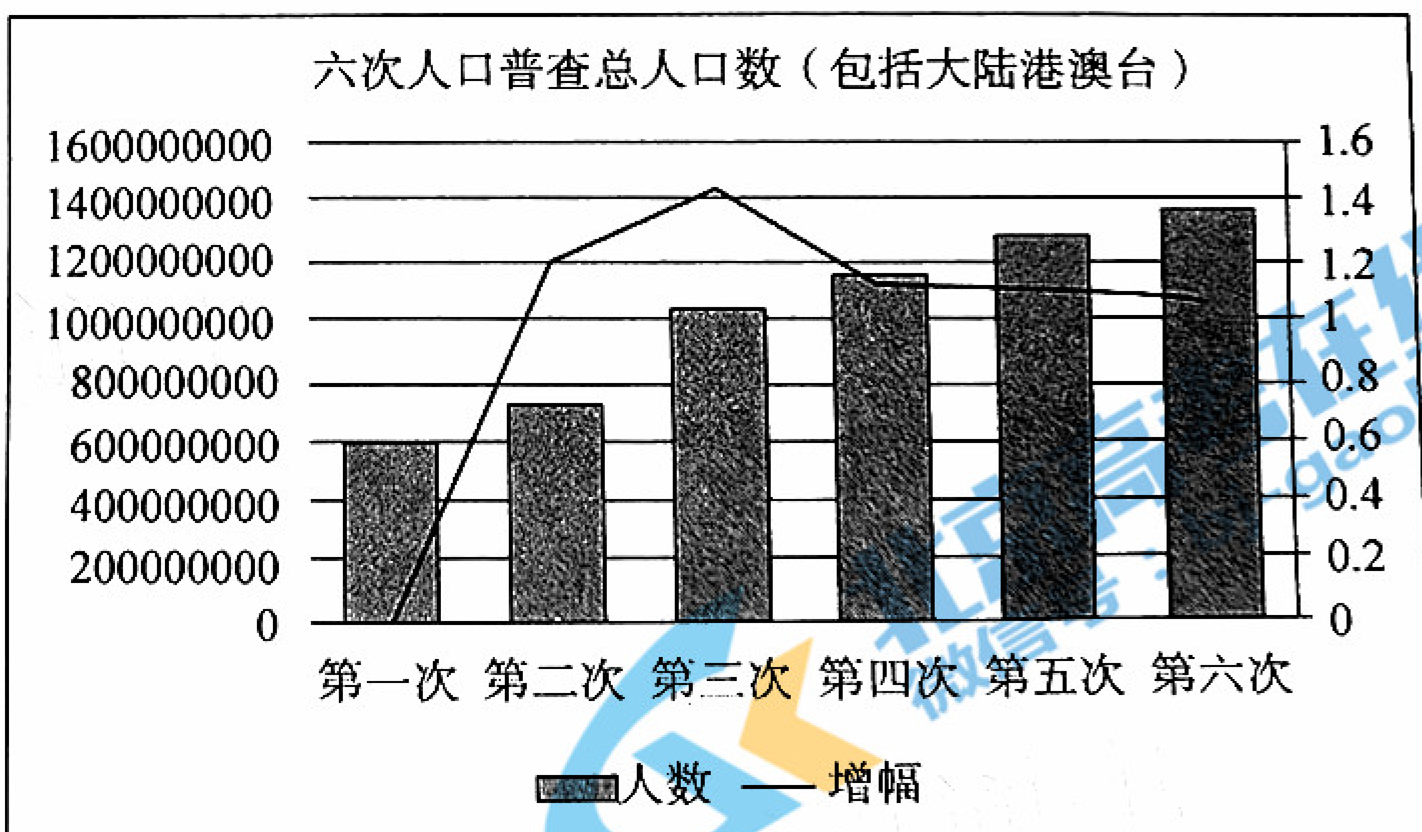
1. 已知复数 z 满足：$\frac{z+1}{1+i}=i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 集合 $M=\{x\in \mathbf{N}|x<3\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，则集合 $M\cap N=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,1,2\}$

3. 人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法，是提供全国基本人口数据的主要来源。根据人口普查的基本情况，可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策，是国家科学决策的重要基础工作，人口普查资料是制定人口政策的依据和前提。截止 2020 年 10 月 10 日，我国共进行了六次人口普查，右图是这六次人口普查的人数和增幅情况，下列说法正确的是



A. 人口数逐次增加，第二次增幅最大

B. 第六次普查人数最多，第四次增幅最小

C. 第六次普查人数最多，第三次增幅最大

D. 人口数逐次增加，从第二次开始增幅减小

4. 在空间立体几何中，"两条直线 a,b 平行"是"两条直线 a,b 都垂直于直线 c"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. 对任意实数 a,b,c,在以下命题中,正确的个数有

①若 $ac^2<bc^2$,则 $a<b$;②若 $a>b$,则 $\frac{a}{b}>1$;

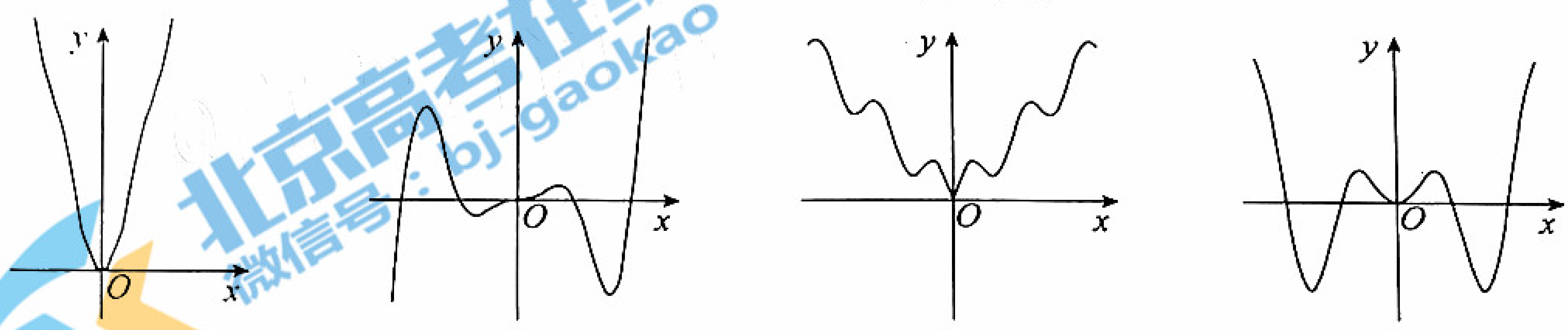
③若 $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$,则 $a<|b|$;④若 $a>1>b>0$,则 $\log_a(a-b)=1-\log_a b>0$

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 0

6. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,$a_3=3$,$a_6=81$,则 $a_5=$

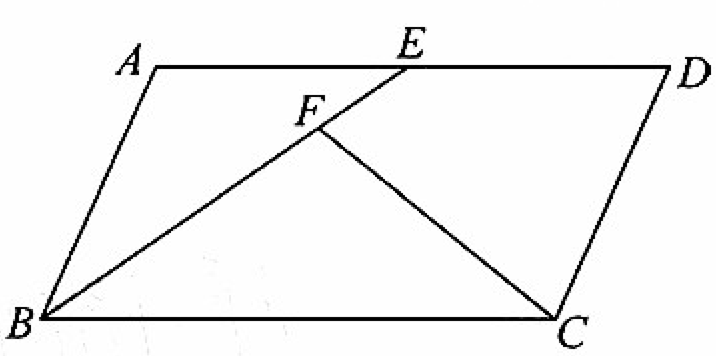
A. 15　　　　B. 16　　　　C. 27　　　　D. 25

7. 我国著名数学家华罗庚先生曾说:数缺形时少直观,形缺数时难入微,数形结合百般好,隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中,常用函数的图像研究函数的性质,也常用函数的解析式来琢磨函数的图象特征. 如函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 的图象大致为



A　　　　B　　　　C　　　　D

8. 如图,平行四边形 $ABCD$ 中,E 是 AD 的中点,F 在线段 BE 上,且 $BF=3FE$,记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$,则 $\overrightarrow{CF}=$



A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$

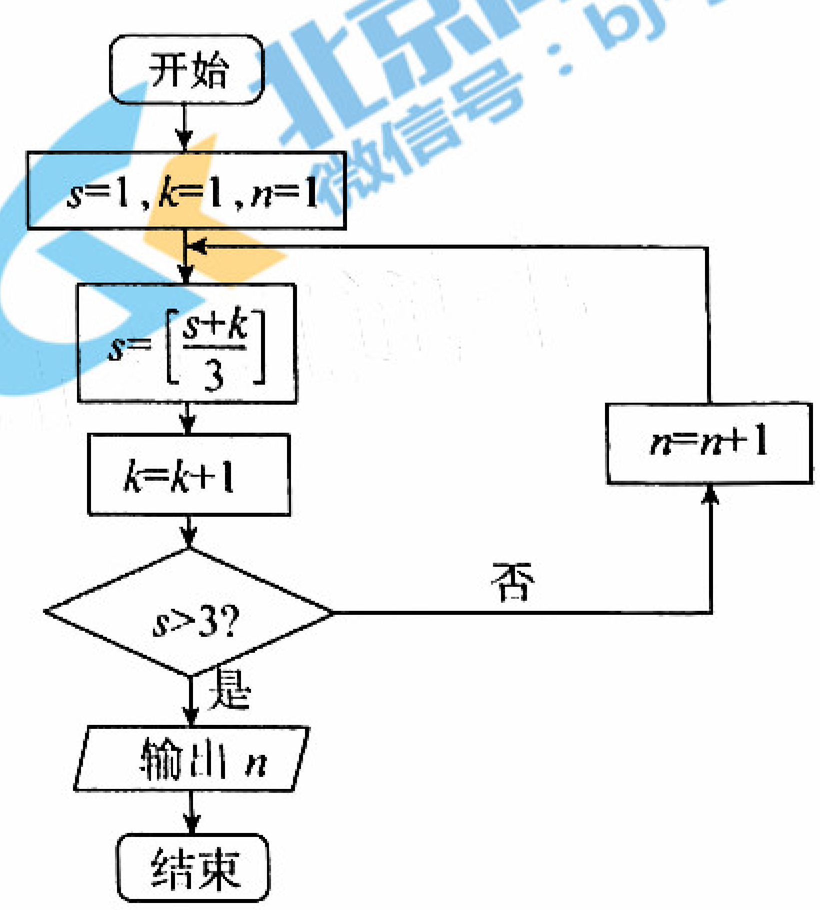
9. 执行如图所示的程序框图,记 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则输出的结果是

A. 6

B. 5,6

C. 9

D. 7,8,9



10. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(1)=0$,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,且 $f'(x)>0$,则不等式 $(x-2)f(x)>0$ 的解集是

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,1)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

11. 如图,“蘑菇”形状的几何体是由半个球体和一个圆柱体组成,球的半径为 2,圆柱的底面半径为 1,高为 3,则该几何体的表面积为

A. 18π　　B. 20π　　C. 22π　　D. 26π

12. 已知点 A,B,C 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上,若 A,B 两点关于原点对称,AC 过右焦点 F,且 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$3|AF|=|CF|$,则双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $1+\sqrt{2}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 桌子上放有 5 张学生的期中考试数学卷,有 3 张在 130 分以上,2 张在 90 分以下,老师为了准确了解学生情况,每次任取一张,不放回地取两次,若第一次取到 130 分以上的一张,则第二次取到 90 分以下的一张试卷的概率为________.

14. 设 M,N 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 图象与直线 $y=2$ 的交点,若 M,N 两点距离的最小值为 6,$P(-\frac{1}{2},2)$ 是该函数图象上的一个点,则 $f(x)$ 的解析式是________.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1=1$,$S_{n+1}=3a_n+2$,则 $a_5=$________.

16. 已知函数 $f(x)=mx-\ln x-m$ 在区间 $(1,e)$ 内有零点,则 m 的取值范围为________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边,且 $5\cos B\cos C+2=5\sin B\sin C+\cos 2A$.

(1)求角 A 的大小;

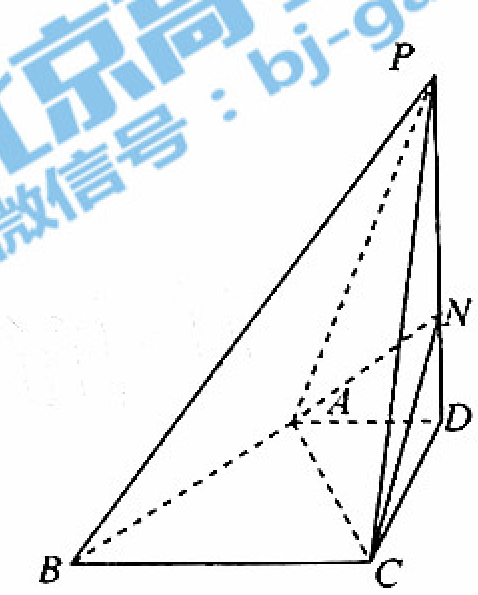
(2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,$c=\sqrt{3}$,求 $\sin B\sin C$ 的值.

18. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 平面 $ABCD$,$PD=1$,$PN=2ND$. 四边形 $ABCD$ 为梯形,$AD/\!/BC$,$BC=2AD=2DC=4$,$\angle ADC=120°$.

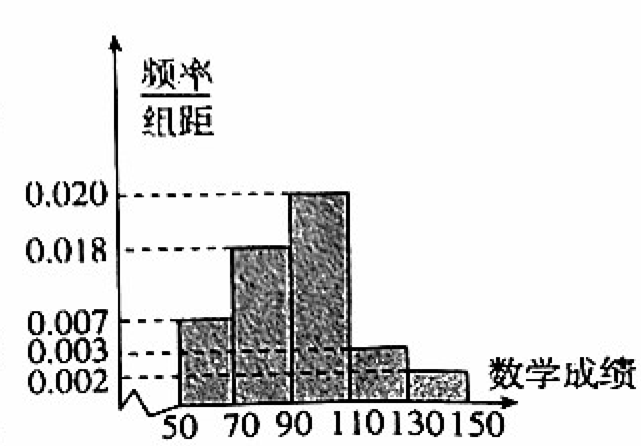
(1)求证:$PB/\!/$ 平面 ACN;

(2)求三棱锥 $N-PBC$ 的体积.



19. (12 分)

在一次模拟考试中,某校共有 100 名文科学生参加考试,其中语文考试成绩低于 130 的占 95%,如果成绩不低于 130 的为特别优秀,数学成绩的频率分布直方图如图.



(1)求数学成绩特别优秀的人数及数学成绩的平均分;

(2)如果语文和数学两科都特别优秀的共有 3 人. 根据以上数据,完成 2×2 列联表,并分析是否有 99% 的把握认为语文特别优秀的同学,

数学也特别优秀.

	语文特别优秀	语文不特别优秀	合计
数学特别优秀			
数学不特别优秀			
合计			

参考数据:①$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$;

②

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	…	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	…	6.635	7.879	10.828

20.(12 分)

已知函数$f(x)=ae^x+\sin x+x,x\in[0,\pi],a<0$

(1)证明:当 $a=-1$ 时,函数$f(x)$有唯一的极大值

(2)若$f(x)<2x-1$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

21.(12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上下顶点为 A,B. P 为直线 $y=2$ 上一动点,当点 P 位于点$(1,2)$时,$\triangle ABP$ 的面积 $S_{\triangle ABP}=1$,椭圆 C 上任意一点到椭圆的左焦点 F_1 的最短距离为 $\sqrt{2}-1$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)连接 PA,PB,直线 PA,PB 分别交椭圆于 M,N 两点,证明:直线 MN 过定点.

(二)选考题:10 分。请考生在第 22、23 题中选定一题作答,并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑。按所涂题号进行评分,多涂、错涂、漏涂均不给分,如果多答,则按所答第一题评分。

22. 选修 4-4:坐标系与参数方程(10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t+2\\y=2t+3\end{cases}$($t$ 为参数)

(1)求直线 l 普通方程;

(2)设 $A(2,3)$,若直线 l 与曲线 C 相交于 P,Q 两点,求$|AP|+|AQ|$的值.

23. 选修 4-5:不等式选讲(10 分)

已知函数$f(x)=|3x-a|+x.(a>0)$

(1)当 $a=4$ 时,求不等式$f(x)<3$ 的解集;

(2)设函数 $g(x)=\left|x+\dfrac{6}{a}\right|-x$. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时,证明:$f(x)+g(x)\geqslant 2\sqrt{2}$.

百师联盟2021届高三开年摸底联考 全国卷Ⅰ
文科数学参考答案及评分意见

1. B 【解析】$z+1=-1+i$，$z=-2+i$，所以$|z|=\sqrt{5}$，选B.

2. C 【解析】$M=\{0,1,2\}$，，$M\cap N=\{0,1,2\}$，选C.

3. C 【解析】C

4. D 【解析】两条直线a,b平行不能推出与直线c垂直，反过来，两条直线a,b都垂直直线c，也不能推出两条直线a,b平行，两条直线a,b可能是异面直线选D.

5. B 【解析】对于①$c^2>0$，根据不等式性质得$a<b$，正确；

对于②，$b=0$不成立，错误；

对于③可得$0<a^2<b^2$，即$|a|<|b|$，因为$a\leqslant|a|$，不等式成立，正确；

对于④对数运算公式错误；选B.

6. C 【解析】$\frac{a_6}{a_3}=q^3=27$，$q=3$，$a_3=a_1q^2=9a_1=3$，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_5=27$，选C.

7. A 【解析】由图可知，该函数为偶函数，B不对；可考虑$x\geqslant0$的情况，

$f'(x)=2x+\sin x+x\cos x$，因为$f'(0)=0$，又$x\geqslant-\sin x$，$1+\cos x\geqslant0$

$f'(x)=x+\sin x+x+x\cos x\geqslant0$. 函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，选A.

8. D 【解析】$\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{8}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}-\frac{5}{8}\boldsymbol{b}$，选D.

9. C 【解析】当$n=1$时，$s=[\frac{1+1}{3}]=0$，$k=2$；

当$n=2$时，$s=[\frac{0+2}{3}]=0$，$k=3$；

当$n=3$时，$s=[\frac{0+3}{3}]=1$，$k=4$；

当$n=4$时，$s=[\frac{1+4}{3}]=1$，$k=5$；

当$n=5$时，$s=[\frac{1+5}{3}]=2$，$k=6$；

当$n=6$时，$s=[\frac{2+6}{3}]=2$，$k=7$；

当$n=7$时，$s=[\frac{2+7}{3}]=3$，$k=8$；

当 $n=8$ 时，$s=[\frac{3+8}{3}]=3$，$k=9$；

当 $n=9$ 时，$s=[\frac{3+9}{3}]=4$，$k=10$；

选 C.

10. A 【解析】由题意可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，又 $f(1)=0$，

$x<1$ 时，$f(x)<0$；$x>1$ 时，$f(x)>0$；

对于 $(x-2)f(x)>0$，当 $x>2$ 时，不等式成立，

当 $1<x<2$ 时，$x-2<0$，$f(x)>0$，不等式不成立；

当 $x<1$ 时，$x-2<0$，且 $f(x)<0$，

不等式成立不等式的解集 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 选 A.

11. A 【解析】$S=2\pi R^2+\pi R^2+2\pi rh$，$R=2$，$r=1$，$h=3$，$S=18\pi$，选 A.

12. A 【解析】设双曲线的左焦点为 F_1，连接 AF_1，CF_1，可知 $\angle F_1AC=90°$，设 $|AF|=m$，$|FC|=3m$，$|AF_1|=2a+m$，$|F_1C|=2a+3m$，$(2a+m)^2+(4m)^2=(2a+3m)^2$，解得 $m=a$，$(3a)^2+a^2=4c^2$，$e=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 选 A.

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】记事件 $A=\{$第一次取到的是 130 分以上试卷$\}$，事件 $B=\{$第二次取到的是 90 以下试卷$\}$.

由题意可得事件 B 发生所包含的基本事件数 $n(A\cap B)=3\times2=6$，

事件 A 发生所包含的基本事件数 $n(A)=3\times4=12$，

所以 $P(B|A)=\frac{1}{2}$.

14. $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{2\pi}{3})$ 【解析】函数的最小正周期为 $T=6$，$6=\frac{2\pi}{\omega}$，$\omega=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\varphi)$

$P(-\frac{1}{2},2)$ 在图象上且是最高点，

所以 $\frac{\pi}{3}(-\frac{1}{2})+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{2\pi}{3})$.

15. 18 【解析】$S_2=3a_1+2=5$，$a_2=4$，$S_3=3a_2+2=14$，$a_3=9$，

$S_4=3a_3+2=29, a_4=15, S_5=3\times15+2=47, a_5=18.$

16. $\frac{1}{e-1}<m<1$ 【解析】$f'(x)=m-\frac{1}{x}=\frac{mx-1}{x^2}$,

(1)当 $m\leqslant0$ 时,在区间$(1,e)$内,$f'(x)<0$,$f(x)$在区间$(1,e)$内单调递减,只要满足:

$\begin{cases}f(1)>0\\f(e)<0\end{cases}$,$\begin{cases}0>0\\m<\frac{1}{e-1}\end{cases}$,矛盾

(2)当 $m>0$ 时,$f'(x)=0$,$x=\frac{1}{m}$,

若 $1<\frac{1}{m}<e$,即$\frac{1}{e}<m<1$ 时,$f(x)$在$(1,\frac{1}{m})$单调递减,在区间$(\frac{1}{m},e)$单调递增;

只要$\begin{cases}f(e)>0\\f(\frac{1}{m})\leqslant0\end{cases}$,所以$\begin{cases}m>\frac{1}{e-1}\\1+\ln m-m\leqslant0,\\\frac{1}{e}<m<1\end{cases}$

令 $h(m)=1+\ln m-m$,$h'(m)=\frac{1}{m}-1>0$,$h(m)_{\max}<h(1)=0$,

当$\frac{1}{e-1}<m<1$ 时,$1+\ln m-m\leqslant0$ 恒成立,

所以,$\frac{1}{e-1}<m<1$.

17.【解析】(1)$5\cos(B+C)+2=2\cos^2A-1$,$2\cos^2A+5\cos A-3=0$,

$\cos A=\frac{1}{2}$或 $\cos A=-3$(舍去). ………………………………………… 4 分

$0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

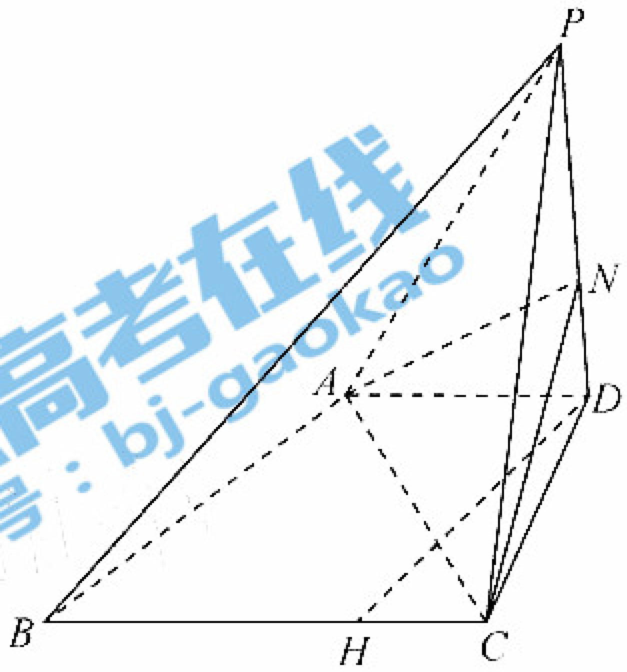
(2)$S=\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$,$bc=6$,

$c=\sqrt{3}$,$b=2\sqrt{3}$, ……………………………………………………………… 8 分

有余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=12+3-6=9$,$a=3$,

由正弦定理得$\triangle ABC$外接圆直径 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$, ……………………… 10 分

$(2R)^2\sin B\sin C=6$,所以 $\sin B\sin C=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12 分



18. **解析**：(1)证明：因为 $AD /\!/ BC$，$BC=4=2AD$，

$\triangle ADM \sim \triangle BCM$，$BM=2MD$，$PN=2ND$，连接 MN，$MN /\!/ PB$. …
……………………………………………………… 3 分

又 $MN \subset$ 平面 ACN，$PB \not\subset$ 平面 ACN，

所以 $PB /\!/$ 平面 ACN. ……………………………………………… 5 分

(2)过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H，因为 $AD /\!/ BC$，，$\angle ADC=120°$，所以

$\angle DCB=60°$，$DH=\sqrt{3}$，$S_{\Delta DBC}=2\sqrt{3}$. ……………………………………………… 8 分

设三棱锥 $D-PBC$ 的高为 h，三棱锥 $N-PBC$ 的高为 h_1，则$\dfrac{V_{N-PBC}}{V_{D-PBC}}=\dfrac{h_1}{h}=\dfrac{PN}{PD}=\dfrac{2}{3}$

$V_{D-PBC}=V_{P-DBC}$，$V_{P-DBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DBC}\times PD$，

$V_{P-DBC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，……………………………………………………………… 10 分

$V_{N-PBC}=\dfrac{2}{3}V_{D-PBC}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$. ……………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)共有 100 名文科学生参加考试，其中语文考试成绩低于 130 的占 95%，语文成绩特别优秀的概率为 $P_1=1-0.95=0.05$，语文特别优秀的同学有 $100\times0.05=5$ 人，… 3 分

数学成绩特别优秀的概率为 $P_2=0.002\times20=0.04$，

数学特别优秀的同学有 $100\times0.04=4$ 人. ……………………………………… 5 分

$\bar{x}=0.14\times60+0.36\times80+0.4\times100+0.06\times120+0.04\times140=90$ 分. ………… 6 分

(2)2×2 列联表：

	语文特别优秀	语文不特别优秀	合计
数学特别优秀	3	1	4
数学不特别优秀	2	94	96
合计	5	95	100

所以 $K^2=\dfrac{100\ (3\times94-1\times2)^2}{4\times96\times5\times95}\approx42.982>6.635$. ……………………… 10 分

所以有 99% 的把握认为语文特别优秀的同学，数学也特别优秀. ……………………… 12 分

20.【解析】(1) $f'(x)=ae^x+\cos x+1$，……………………………………………… 2 分

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $1+\cos x\geqslant0$，

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-e^x+\cos x+1$，……………………………………………… 3 分

令 $g(x)=-e^x+\cos x+1$，$g'(x)=-e^x-\sin x<0$，

$g(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调递减；$g(0)=-1+2=1$，$g(\pi)=-e^{\pi}<0$，…………………… 5 分

存在 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$，

所以函数 $f(x)$ 递增是区间 $[0,x_0]$，递减区间是 $[x_0,\pi]$，

所以函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值 $f(x_0)$．…………………………………………………… 6 分

(2) 由 $f(x)<2x-1$，即令

$h(x)=ae^x+\sin x-x+1<0$，$h'(x)=ae^x+\cos x-1<0$，…………………………………… 9 分

当 $a<0$ 时，

$h(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上是单调减函数，…………………………………………………… 10 分

$h(x)\leqslant h(0)=a+1$，只要 $a+1<0$ 即可，即 $a<-1$．……………………………… 12 分

21.【解析】(1) $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 2b=1$，$b=1$，$a^2-c^2=1$，

设 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，$F(-c,0)$，$MF^2=(x+c)^2+y^2=\dfrac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2$，

对称轴 $x=-\dfrac{a^2}{c}<-a$，区间 $x\in[-a,a]$ 为增区间，$x=-a$ 时，$MF_{\min}=a-c$，即

$a-c=\sqrt{2}-1$，……………………………………………………………………………… 3 分

$a+c=\sqrt{2}+1$，$a=\sqrt{2}$，…………………………………………………………………… 4 分

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．………………………………………………………………… 5 分

(2) 设 $P(t,2)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_1,y_1)$，$\begin{cases} k_{AP}=\dfrac{y_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{t} \\ k_{BP}=\dfrac{y_2+1}{x_2}=\dfrac{3}{t} \end{cases}$，

所以有 $3x_2(y_1-1)=x_1(y_2+1)$，…………………………………………………………… 7 分

因为 $\dfrac{x_1^2}{2}=1-y_1^2=(1-y_1)(1+y_1)$，代入上式得

$\dfrac{-3}{2}x_1x_2=(y_1+1)(y_2+1)$，$\dfrac{-3}{2}x_1x_2=y_1y_2+(y_1+y_2)+1$　①

设直线 MN：$y=kx+m$，代入 $x^2+2y^2=2$，$(1+2k^2)y^2-2my+m^2-2k^2=0$．

$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{2m}{1+2k^2} \\ y_1y_2=\dfrac{m^2-2k^2}{1+2k^2} \end{cases}$，②　…………………………………………………… 10 分

$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0, x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$　③ ………………………………………… 11 分

将②③代入①得 $2m^2+m-1=0, m=\dfrac{1}{2}$ 或 -1(舍去)

直线 MN 过定点 $(0,\dfrac{1}{2})$. ………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)直线 l 普通方程为 $y=2x-1$, ………………………………………………… 4 分

(2)曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$,将直线 l 的参数方程

化为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t \\ y=3+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t \end{cases}$,($t$ 为参数) ………………………………………………… 6 分

代入椭圆方程得: $\dfrac{17}{5}t^2+\dfrac{52}{\sqrt{5}}t+36=0$,

$t_1+t_2=-\dfrac{52\times5}{17\sqrt{5}}, t_1t_2=\dfrac{36\times5}{17}$. ………………………………………………… 8 分

$t_1t_2>0$, t_1, t_2 同号, $|AP|+|AQ|=|t_1+t_2|=\dfrac{52\sqrt{5}}{17}$. ………………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $a=4$ 时, $f(x)=|3x-4|+x$

由 $|3x-4|<3-x$, 得 $x-3<3x-4<3-x$,

解得 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{4}$

所以,不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $\{x|\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{4}\}$. ……………………………………… 4 分

(2) $f(x)+g(x)=|3x-a|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|=\left|3(x-\dfrac{a}{3})\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$

$=2\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$

$\geqslant\left|x-\dfrac{a}{3}\right|+\left|x+\dfrac{6}{a}\right|$(当且仅当 $x=\dfrac{a}{3}$ 时取等号). ………………………………… 7 分

$\geqslant\left|(x-\dfrac{a}{3})-(x+\dfrac{6}{a})\right|$(当且仅当 $(x-\dfrac{a}{3})(x+\dfrac{6}{a})\leqslant0$ 时取等号, $a>0$)

$=\left|\dfrac{a}{3}+\dfrac{6}{a}\right|\geqslant2\sqrt{2}$ 当且仅当 $a=3\sqrt{2}$ 时,等号成立. ………………………… 10 分