2022 北京北师大二附中高三（上）期中

数　　学

一、选择题（共 10 小题：共 40 分）

1. 若集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x-3<0\right\},B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2. 在复平面内，复数 $\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=\sqrt{x}$　　C. $y=-x^3$　　D. $y=\lg x$

4. 已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，将角 α 的终边绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边，则 $\tan\beta$ 等于（　　）

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{5}{4}$

5. 设 $a=8^{\frac{1}{2}}$，$b=\log_3 2$，$c=\log_2 3$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

6. $\{a_n\}$ 为等比数列，若 a_1，a_3，a_5 成等差数列，则 $\frac{a_3+a_5}{a_1+a_3}=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

7. 若 $a>b$，则一定有（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $|a|>|b|$　　C. $\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}$　　D. $a^3>b^3$

8. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

9. 《周髀算经》是中国最古老的天文学和数学著作，它揭示日月星辰的运行规律.其记载“阴阳之数，日月之法，十九岁为一章，四章为一部，部七十六岁，二十部为一遂，遂千百五二十岁”.现恰有 30 人，他们的年龄(都为正整数)之和恰好为一遂(即 1520)，其中年长者年龄介于 90 至 100，其余 29 人的年龄依次相差一岁，则最年轻者的年龄为（　　）

A. 32　　B. 33　　C. 34　　D. 35

10. 设 A，B 是有限集，定义：$d(A,B)=card(A\cup B)-card(A\cap B)$，其中 $\mathrm{card}(A)$ 表示有限集 A 中元

素的个数．命题①：对任意有限集 A，B，“$A \neq B$”是“$d(A,B)>0$”的充分必要条件；命题②：对任意有限集 $A,B,C,d(A,C) \leq d(A,B)+d(B,C)$．则下列选项正确的是（　　）

A 命题①和命题②都成立

B. 命题①和命题②都不成立

C. 命题①成立，命题②不成立

D. 命题①不成立，命题②成立

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是_________.

12. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，向量 $\vec{b}=(2,m)$，若 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 m 的值为__________.

13. 已知 $a \geq 1$，集合 $A=\{x|2-a \leq x \leq a\}$ 中有且只有三个整数，则符合条件的实数 a 的一个值是____________.

14. 已知函数 $f(x)=x \cdot e^x-e^x$，若 $f(x)<a$ 有且仅有两个不同的整数解，则函数 $f(x)$ 的最小值为____________；实数 a 的取值范围是____________.

15. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数，例如，$[2]=2$，$[1.5]=1$，$[-0.3]=-1$．设 a 为正整数，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$，$x_{n+1}=[\dfrac{x_n+[\frac{a}{x_n}]}{2}](n \in N^*)$，现有下列命题：

①当 $a=5$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5,3,2；

②对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k，当 $n \geq k$ 时总有 $x_n=x_k$；

③当 $n \geq 1$ 时，$x_n>\sqrt{a}-1$；

④对某个正整数 k，若 $x_{k+1} \geq x_k$，则 $x_n=[\sqrt{a}]$．

其中的真命题有____________．（写出所有真命题的编号）

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 设函数 $f(x)=2\cos x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)(x \in R)$．

（1）求函数 $y=f(x)$ 的周期和单调递增区间；

（2）当 $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 最大值及对应的自变量取值．

17. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2(x \in \mathbf{R})$ 图象过点 $P(-1,2)$，且在点 P 处的切线恰好与直线 $x-3y=0$ 垂直．

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $[m,m+1]$ 上单调递增，求实数 m 的取值范围．

18. 已知① $c=2\sqrt{3}b$，② $B=\dfrac{\pi}{4}$，③ $a=2$，在这三个条件中任选两个，补充在下面的问题中，并解决该

问题，

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 对边分别为 a，b，c，且满足：$(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$

（1）求角 A 的大小；

（2）已知_________，_________，且 $\triangle ABC$ 存在，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 某辆汽车以 x 公里/小时速度在高速公路上匀速行驶(考虑到高速公路行车安全要求 $60\le x\le 120$)时,每小时的油耗(所需要的汽油量)为 $\frac{1}{5}\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)$ 升.

(1)欲使每小时 油耗不超过 9 升,求 x 的取值范围;

(2)求该汽车行驶100 公里的油耗 y 关于汽车行驶速度 x 的函数,并求 y 的最小值.

20. 已知函数 $f(x)=\frac{1-x}{e^x}$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的零点和极值；

（3）若对任意 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$，都有 $f(x_1)-f(x_2)\ge -\frac{1}{e^2}$ 成立，求实数 a 的最小值.

21. 设集合 $S,T,S\subseteq \mathrm{N}^*,T\subseteq \mathrm{N}^*,S,T$ 中至少有两个元素，且 S，T 满足：

①对于任意 $x,y\in S$，若 $x\ne y$，都有 $xy\in T$；

②对于任意 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\frac{y}{x}\in S$.

（1）分别对 $S=\{1,2,4\}$ 和 $S=\{2,4,8\}$，求出对应的 $S\cup T$；

（2）如果当 S 中恰有三个元素时，$S\cup T$ 中恰有 4 个元素，证明：S 中最小的元素是 1；

（3）如果 S 恰有 4 个元素，求 $S\cup T$ 的元素个数.

参考答案

一、选择题（共 10 小题：共 40 分）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】先将集合 A 化简，然后根据交集的运算，即可得到结果.

【详解】因为$x^2-2x-3<0$，解得$-1<x<3$

即 $A=\{x|-1<x<3\}$，且 $B=\{-1,0,1,2\}$，

所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$

故选:C.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的乘除运算将复数化为代数形式，然后求出对应点的坐标，再判断对应点的象限即可.

【详解】$\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，其对应点的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$位于第一象限.

故选：A

3. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据解析式可直接判定奇偶性和单调性，得出答案.

【详解】对 A，根据正弦函数的性质可得 $y=\sin x$ 是奇函数，在$(0,1)$单调递增，故 A 正确;

对 B，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为$[0,+\infty)$，不关于原点对称，故不是奇函数，故 B 错误;

对 C，$y=-x^3$ 在$(0,1)$单调递递减，故 C 错误;

对 D，$y=\lg x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，不关于原点对称，故不是奇函数，故 D 错误.

故选：A.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】先由条件求出 $\tan\alpha$，再根据角的旋转及诱导公式即可求解.

【详解】因为角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，

所以 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，

所以 $\tan\beta=\tan(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\cot\alpha=-\frac{3}{4}$,

故选：B

5. 【答案】C

【解析】

【分析】利用中间数和对数函数的单调性可判断三者之间的大小，从而可得正确的选项.

【详解】因为$b=\log_3 2<\log_3 3=1$，$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，故$c>b$.

因为$a=8^{\frac{1}{2}}>4^{\frac{1}{2}}=2=\log_2 4>\log_2 3=c$，故$a>c>b$，

故选：C.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】设公比为$q(q\neq 0)$，即得$\dfrac{a_3+a_5}{a_1+a_3}=q^2$，根据等差中项的性质有$2q^2=1+q^4$，即可求值.

【详解】设$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq 0)$，则$\dfrac{a_3+a_5}{a_1+a_3}=\dfrac{a_3(1+q^2)}{a_1(1+q^2)}=q^2$，而$a_1$，$a_3$，$a_5$成等差数列，

$\therefore 2a_3=a_1+a_5$，即$2q^2=1+q^4$，解得$q^2=1$.

$\therefore \dfrac{a_3+a_5}{a_1+a_3}=1$.

故选：A.

7. 【答案】D

【解析】

【分析】

利用不等式的性质或反例逐项检验后可得正确的选项.

【详解】取$a=1,b=-1$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，$|a|=|b|$，$\sqrt{a^2}=\sqrt{b^2}$，故A、B、C均错误，

由不等式的性质可得$a^3>b^3$，故D正确.

故选：D.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】考虑两者之间的推出关系后可得两者之间的条件关系.

【详解】如图所示，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$,当$AB\perp OC$时，$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{c}$垂直，

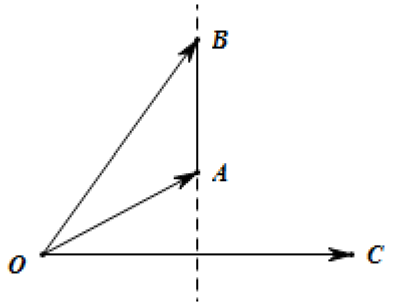
$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，所以$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$成立，此时$\vec{a}\neq\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$不是$\vec{a}=\vec{b}$的充分条件，

当$\vec{a}=\vec{b}$时，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$，$\therefore \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{c}=0$,$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$成立，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$是$\vec{a}=\vec{b}$的必要条件，

综上，“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件



故选：B.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】

设年纪最小者年龄为 n，年纪最大者为 m,由他们年龄依次相差一岁得出

$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+28)+m=1520$，结合等差数列的求和公式得出 $m=1114-29n$，再由

$m\in[90,100]$ 求出 n 的值.

【详解】根据题意可知，这 30 个老人年龄之和为 1520，设年纪最小者年龄为 n，年纪最大者为 m，

$m\in[90,100]$，则有 $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+28)+m=29n+406+m=1520$

则有 $29n+m=1114$，则 $m=1114-29n$，所以 $90\le 1114-29m\le 100$

解得 $34.966\le n\le 35.31$，因为年龄为整数，所以 $n=35$.

故选：D

10. 【答案】A

【解析】

【分析】由题意，结合集合的相关性质，结合充分必要条件的定义，以及 Venn 图，结合作差法，可得答案.

【详解】对于命题①，若 $A\ne B$，则 $card(A\cup B)>card(A\cap B)$，所以

$d(A,B)=card(A\bigcup B)-card(A\bigcap B)>0$，反之可以把上述过程逆推，

故“$A\ne B$”是“$d(A,B)>0$”的充分必要条件，则命题①成立；

对于命题②，

$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$，所以

$d(A,B)=card(A)+card(B)-2card(A\bigcap B)$，

同理可得 $d(A,C)=card(A)+card(C)-2card(A\bigcap C)$，

$d(B,C)=card(B)+card(C)-2card(B\bigcap C)$，

所以 $d(A,B)+d(B,C)-d(A,C)=card(A)+card(B)-2card(A\bigcap B)$

$+card(B)+card(C)-2card(B\bigcap C)-[card(A)+card(C)-2card(A\bigcap C)]$

$=2card(B)-2card(A\cap B)-2card(B\cap C)+2card(A\cap C)$

$=2card(B)+2card(A\cap C)-2\left[card(A\cap B)+card(B\cap C)\right]$

$=2card(B)+2card(A\cap C)-2\left[card((A\cup C)\cap B)+card(A\cap B\cap C)\right]$

$=2card(B)-2card((A\cup C)\cap B)+2card(A\cap C)-2card(A\cap B\cap C)\geq 0$,

命题②成立.

故选：A.

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 【答案】$(1,3]$

【解析】

【分析】根据偶次根式被开方数大于等于零，和对数的真数大于零即可求出答案.

【详解】解：由题意得$\begin{cases}3-x\geq 0,\\ x-1>0,\end{cases}$，解得$1<x\leq 3$，

$\therefore$函数$f(x)$的定义域为$(1,3]$，

故答案为：$(1,3]$.

12. 【答案】$-\dfrac{7}{2}$ ##-3.5

【解析】

【分析】根据向量垂直，利用向量数量积的坐标表示列方程求参数 m.

【详解】由题设$\vec{a}+\vec{b}=(3,2+m)$，又$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，

所以$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=3\times 1+(2+m)\times 2=0$，可得$m=-\dfrac{7}{2}$.

故答案为：$-\dfrac{7}{2}$

13. 【答案】2（答案不唯一）

【解析】

【分析】由题设得$4>a-(2-a)\geq 2$求参数范围，即可得结果.

【详解】由题设$4>a-(2-a)\geq 2$且$a\geq 1$，可得$2\leq a<3$，

所以，符号条件的一个 a 值为 2.

故答案为：2（答案不唯一）

14. 【答案】 ①. -1 ②. $\left(-\dfrac{2}{e},-\dfrac{3}{e^2}\right]$

【解析】

【分析】求出导函数$f'(x)$，确定$f(x)$的单调性，得最小值$f(0)$，然后比较$f(1)$，$f(-1)$，$f(-2)$的大

小结合单调性可得结论.

【详解】函数 $f(x)=xe^x-e^x$，∴ $f'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$，

∴当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

∴当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，且 $f(x)_{\min}=f(0)=-1$.显然，$f(1)=0$.

当 $x<1$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，

因为 $f(x)<a$ 有且仅有两个不同的整数解，

则 $f(-1)<a\le f(-2)$，即 $-\frac{2}{e}<a\le-\frac{3}{e^2}$，$a\in\left(-\frac{2}{e},-\frac{3}{e^2}\right]$.

故答案为 -1；$\left(-\frac{2}{e},-\frac{3}{e^2}\right]$.

15. 【答案】①③④

【解析】

【详解】若 $a=5$，根据 $x_{n+1}=[\frac{x_n+[\frac{a}{x_n}]}{2}](n\in N^*)$

当 n=1 时，$x_2=[\frac{5+1}{2}]=3$，同理 $x_3=[\frac{3+1}{2}]=2$，故①对.

对于②③④可以采用特殊值列举法：

当 a=1 时，$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$, ……$x_n=1$, …… 此时②③④均对.

当 a=2 时，$x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$, ……$x_n=1$, …… 此时②③④均对

当 a=3 时，$x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=2$……$x_n=1$, ……此时③④均对

综上，真命题有 ①③④

[点评]此题难度较大，不容易寻找其解题的切入点，特殊值列举是很有效的解决办法.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 【答案】(1) $T=\pi$，单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in Z$；(2) $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数有最大值为 3

【解析】

【分析】(1) 化简得到 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，再计算周期和单调增区间得到答案.

(2) $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，得到最值.

【详解】(1) $f(x)=2\cos x(\cos x+\sqrt{3}\sin x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos 2x+1+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，故 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

取 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in Z$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，

即单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$， $k\in Z$.

（2） $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$， $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

故当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数有最大值为 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=3$.

【点睛】本题考查了三角函数的周期，单调区间，最值，意在考查学生对于三角函数知识的综合应用.

17. 【答案】（1） $f(x)=x^3+3x^2(x\in\mathbf{R})$

（2） $m\le-3$ 或 $m\ge 0$

【解析】

【分析】(1)将点 P 坐标代入函数解析式得到关于 a,b 的方程，再根据函数在切点处的导数等于切线的斜率再建立关于 a,b 的另一个方程，即可求出 a,b，即可确定函数 $f(x)$ 的解析式; (2)求出函数的单调区间，利用 $[m,m+1]\subseteq(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$ 可求解.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)=ax^3+bx^2(x\in\mathbf{R})$ 的图象过点 $P(-1,2)$,所以 $-a+b=2$，

又因为 $f'(x)=3ax^2+2bx$,且 $f(x)$ 点 P 处的切线恰好与直线 $x-3y=0$ 垂直,

所以 $f'(-1)=3a-2b=-3$,

由 $\begin{cases}-a+b=2\\3a-2b=-3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$, 所以 $f(x)=x^3+3x^2(x\in\mathbf{R})$.

【小问 2 详解】

由(1)知 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$，

令 $f'(x)>0$，即 $3x(x+2)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>0$，

令 $f'(x)<0$，即 $3x(x+2)<0$，解得 $-2<x<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 单调递增，$(-2,0)$ 单调递减，

$(0,+\infty)$ 单调递增，

根据函数 $f(x)$ 在区间 $[m,m+1]$ 上单调递增，

则有 $m+1\le-2$ 或 $m\ge 0$，解得 $m\le-3$ 或 $m\ge 0$.

18.【答案】（1） $A=\frac{\pi}{6}$

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）由正弦定理将已知式子中的正弦转化为相应的边，后利用余弦定理可得答案.

（2）若选择①②，可求出 C，后可发现 $\frac{c}{b}\neq\frac{\sin C}{\sin B}$，则相应三角形不存在.

若选择①③，利用余弦定理结合 $c=2\sqrt{3}b$，可得到 b 和 c.后利用 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 可得答案.

若选择②③，利用正弦定理结合 $B=\frac{\pi}{4}$，可得到 b.后利用余弦定理得到 c，最后利用 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 得到答案.

【小问 1 详解】

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$

$\Leftrightarrow(b-a)(b+a)=c(\sqrt{3}b-c)$，

即，得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 A 在三角形中，

则 $A=\frac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

若选择①②，因 $B=\frac{\pi}{4}$，$A=\frac{\pi}{6}$，则

$$\sin C=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\neq2\sqrt{3}$，故符合条件的三角形不存在.

若选择①③，由余弦定理有 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，又 $c=2\sqrt{3}b$，$A=\frac{\pi}{6}$，$a=2$

则 $\cos A=\frac{13b^2-4}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $b=\frac{2}{\sqrt{7}}$，则 $c=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$，即 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

若选择②③，由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

又 $B=\frac{\pi}{4}$，$a=2$，$A=\frac{\pi}{6}$.则 $\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，得 $b=2\sqrt{2}$.

又 $B=\frac{\pi}{4}$，$A=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin C=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$，即 $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}+1$.

19. 【答案】(1) $[60,100]$；(2) $y=90000\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{90}\right)^2+\frac{80}{9}$,(其中 $60\le x\le 120$)；最小值为 $\frac{80}{9}$ 升.

【解析】

【分析】

(1)令 $\frac{1}{5}\times\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)\le 9$,求出解集,结合题意得出 x 的取值范围;

(2)写出 y 关于 x 的函数,求出函数的最小值即可.

【详解】(1) 由题意,令 $\frac{1}{5}\times\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)\le 9$,

化简得 $x^2-145x+4500\le 0$,解得 $45\le x\le 100$;

又因为 $60\le x\le 120$,

所以欲使每小时的油耗不超过 9 升, x 的取值范围是 $[60,100]$;

(2) 设该汽车行驶 100 公里的油耗为 y;

则 $y=\frac{100}{x}\cdot\frac{1}{5}\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)=90000\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{90}\right)^2+\frac{80}{9}$,(其中 $60\le x\le 120$);

由 $60\le x\le 120$,知 $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{120},\frac{1}{60}\right]$,

所以 $x=90$ 时,汽车行驶 100 公里的油耗取得最小值为 $\frac{80}{9}$ 升.

【点睛】本题考查了一元二次不等式的解法以及二次函数的最值，属于基础题.

20. 【答案】(1) $2x+y-1=0$；(2) 零点 $x=1$，极小值 $-\frac{1}{e^2}$；(3) 1.

【解析】

【详解】(1) 因为 $f'(x)=\frac{x-2}{e^x}$，　所以 $f'(0)=-2$.

因为 $f(0)=1$，所以曲线 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $2x+y-1=0$.

(2) 令 $f(x)=\frac{1-x}{e^x}=0$，解得 $x=1$，

所以 $f(x)$ 的零点为 $x=1$.

由 $f'(x)=\frac{x-2}{e^x}=0$ 解得 $x=2$，

则 $f'(x)$ 及 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$

$f'(x)$	$-$	0	$+$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 时，取得极小值 $-\frac{1}{e^2}$.

（3）法一：

当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$.

当 $x<1$ 时，$f(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$.

若 $a\le 1$，由（2）可知 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)$，$f(x)$ 的最大值为 $f(a)$，

所以“对任意 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$，有 $f(x_1)-f(x_2)\ge -\frac{1}{e^2}$ 恒成立”等价于 $f(2)-f(a)\ge -\frac{1}{e^2}$

即 $-\frac{1}{e^2}-\frac{1-a}{e^a}\ge -\frac{1}{e^2}$，　解得 $a\ge 1$.　　所以 a 的最小值为 1.

法二：当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$.　　当 $x<1$ 时，$f(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$.

且由（2）可知，$f(x)$ 的最小值为 $f(2)=-\frac{1}{e^2}$，

若 $a<1$，令 $x_1=2,x_2\in[a,1)$，则 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$

而 $f(x_1)-f(x_2)<f(x_1)-0<f(x_1)=f(2)=-\frac{1}{e^2}$，不符合要求，

所以 $a\ge 1$.　　当 $a=1$ 时，$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，$f(x_1)\le 0,f(x_2)\le 0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)\ge f(x_1)-0\ge f(2)=-\frac{1}{e^2}$，即 $a=1$ 满足要求，

综上，a 的最小值为 1.

21　【答案】（1）$S=\{1,2,4\}$ 时 $S\cup T=\{1,2,4,8\}$，$S=\{2,4,8\}$ 时 $S\cup T=\{2,4,8,16,32\}$；

（2）证明见解析；　　（3）7 个元素.

【解析】

【分析】（1）根据定义，应用列表法分别列举得出 $T=\{2,4,8\}$、$T=\{8,16,32\}$，再应用集合并运算求结果；

（2）对于 $S=\{a,b,c\}$ 且 $a<b<c$，$a,b,c\in \mathbb{N}^*$，列举出满足①时 $T=\{ab,ac,bc\}$ 且 $ab<ac<bc$，再结合②及 S 元素个数，讨论 $c=\frac{c}{a}$、$b=\frac{c}{a}$ 求对应 $S\cup T$ 的元素个数，即可证结论；

（3）对于 $S=\{a,b,c,d\}$ 且 $a<b<c<d$，$a,b,c,d\in \mathbb{N}^*$，列举出满足①时 $T=\{ab,ac,bc,ad,bd,cd\}$ 且 $ab<ac<\min\{bc,ad\}<\max\{bc,ad\}<bd<cd$，结合②及 S 元素个数，讨论 $bc>ad$、$bc<ad$、$bc=ad$，进而确定 $S\cup T$ 中的元素即可.

【小问 1 详解】

对于 $S=\{1,2,4\}$，集合 T 的元素如下：

xy 且 $x\neq y$	$x=1$	$x=2$	$x=4$
$y=1$	—	2	4
$y=2$	2	—	8
$y=4$	4	8	—

由表得：$T=\{2,4,8\}$，此时要满足 $x<y$ 有 $\frac{y}{x}\in S$，如下表：

$\frac{y}{x}$ 且 $x<y$	$x=2$	$x=4$	$x=8$
$y=2$	—	—	—
$y=4$	2	—	—
$y=8$	4	2	—

显然 $2,4\in S$ 满足要求，所以 $T=\{2,4,8\}$，则 $S\cup T=\{1,2,4,8\}$；

对于 $S=\{2,4,8\}$，集合 T 的元素如下：

xy 且 $x\neq y$	$x=2$	$x=4$	$x=8$
$y=2$	—	8	16
$y=4$	8	—	32
$y=8$	16	32	—

由表得：$T=\{8,16,32\}$，此时要满足 $x<y$ 有 $\frac{y}{x}\in S$，如下表：

$\frac{y}{x}$ 且 $x<y$	$x=8$	$x=16$	$x=32$
$y=8$	—	—	—
$y=16$	2	—	—
$y=32$	4	2	—

显然 $2,4\in S$ 满足要求，所以 $T=\{8,16,32\}$，则 $S\cup T=\{2,4,8,16,32\}$.

【小问 2 详解】

对于 $S=\{a,b,c\}$ 且 $a<b<c$，$a,b,c\in \mathrm{N}^*$，集合 T 的元素如下：

xy 且 $x \neq y$	$x=a$	x = b	$x=c$
$y=a$	–	ab	ac
$y=b$	ab	–	bc
$y=c$	ac	bc	–

由表得：$T=\{ab,ac,bc\}$ 且 $ab<ac<bc$，此时要满足 $x<y$ 有 $\frac{y}{x}\in S$，如下表：

$\frac{y}{x}$ 且 $x<y$	$x=ab$	$x=ac$	$x=bc$
$y=ab$	–	–	–
$y=ac$	$\frac{c}{b}$	–	–
$y=bc$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$	–

其中 $\frac{c}{b}<\frac{c}{a}$、$\frac{b}{a}<\frac{c}{a}$ 且 $\frac{c}{b}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}\in S$，

当 $c=\frac{c}{a}$ 时 $a=1$，此时必有 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=b$，即 $c=b^2$，

故 $S=\{1,b,b^2\}$，$T=\{b,b^2,b^3\}$，则 $S\cup T=\{1,b,b^2,b^3\}$，满足要求；

当 $b=\frac{c}{a}$ 时，必有 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=a$，即 $b=a^2$，$c=ab=a^3$，

故 $S=\{a,a^2,a^3\}$，$T=\{a^3,a^4,a^5\}$，则 $S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$，不满足要求；

综上，当 S 中恰有三个元素时，$S\cup T$ 中恰有 4 个元素，S 中最小的元素是 1，得证.

【小问 3 详解】

对于 $S=\{a,b,c,d\}$ 且 $a<b<c<d$，$a,b,c,d\in \mathrm{N}^*$，集合 T 的元素如下：

xy 且 $x \neq y$	$x=a$	x = b	$x=c$	$x=d$
$y=a$	–	ab	ac	ad
$y=b$	ab	–	bc	bd
$y=c$	ac	bc	–	cd
$y=d$	ad	bd	cd	–

由表得：$T=\{ab,ac,bc,ad,bd,cd\}$ 且 $ab<ac<\min\{bc,ad\}<\max\{bc,ad\}<bd<cd$，此时要满足

$x<y$ 有 $\frac{y}{x} \in S$，如下表：

$\frac{y}{x}$ 且 $x<y$	$x=ab$	$x=ac$	$x=bc$	$x=ad$	$x=bd$	$x=cd$
$y=ab$	–	–	–	–	–	–
$y=ac$	$\frac{c}{b}$	–	–	–	–	–
$y=bc$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$	–	*	–	–
$y=ad$	$\frac{d}{b}$	$\frac{d}{c}$	*	–	–	–
$y=bd$	$\frac{d}{a}$	$\frac{bd}{ac}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{b}{a}$	–	–
$y=cd$	$\frac{cd}{ab}$	$\frac{d}{a}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{c}{b}$	–

当 $bc>ad$ 时，上表第一列有 $\frac{cd}{ab}>\frac{d}{a}>\frac{c}{a}>\frac{d}{b}>\frac{c}{b}$ 且均属于集合S，而 $S=\{a,b,c,d\}$，矛盾；

当 $bc<ad$ 时，上表第一列有 $\frac{cd}{ab}>\frac{d}{a}>\frac{d}{b}>\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$ 且均属于集合S，而 $S=\{a,b,c,d\}$，矛盾

当 $bc=ad$ 时，则 $\frac{cd}{ab}>\frac{d}{a}>\max\{\frac{bd}{ac},\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\}>\min\{\frac{bd}{ac},\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\}>\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$ 且均属于集合S，而 $S=\{a,b,c,d\}$，

此时只需满足 $\frac{bd}{ac}=\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$，则 $\begin{cases}\frac{d}{c}=\frac{b}{a}=a\\ \frac{bd}{ac}=\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=b\\ \frac{d}{a}=c\\ \frac{cd}{ab}=d\end{cases}$，可得 $S=\{a,a^2,a^3,a^4\}$，且 $T=\{a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$，

注意 a 不等于 1，

所以 $S\cup T=\{a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$，故共有 7 个元素.

【点睛】关键点点睛：后两问，首先设出集合S，根据题设集合的性质①列举出集合 T 中可能元素，再结合集合的性质②，由S中元素个数分类讨论确定所设元素的数量关系，即可得结果.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。