南充市高2024届高考适应性考试（一诊）

理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为(　　)

A. $x=-1$　　B. $x=1$　　C. $y=-1$　　D. $y=1$

2. 当 $1<m<2$ 时,复数 $m-1+(m-2)i$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

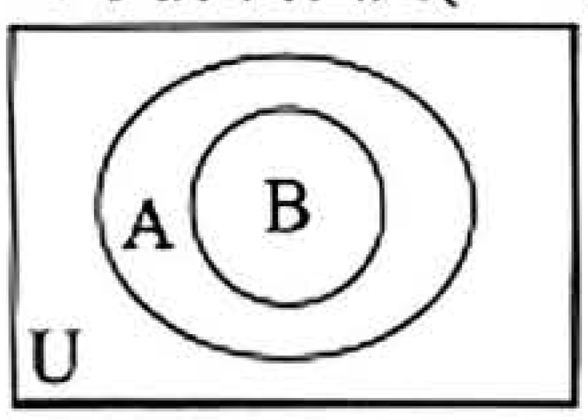
3. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，则 $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}\right|=$(　　)

A. 0　　B. $\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

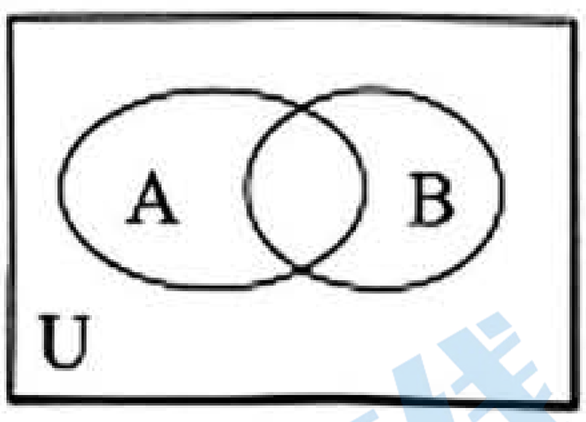
4. 已知直线 m，n 和平面 α，$n\subset\alpha$，$m\not\subset\alpha$，则“$m//n$”是“$m//\alpha$”的(　　)条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

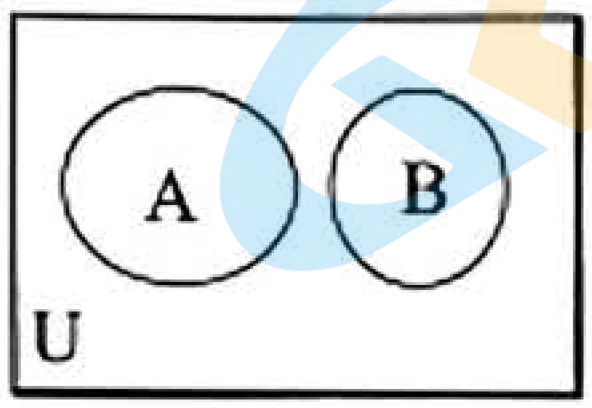
5. 已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x\,|\,\log_3(x-1)<1\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+y^2=1\right\}$，则能表示 A，B，U 关系的图是(　　)



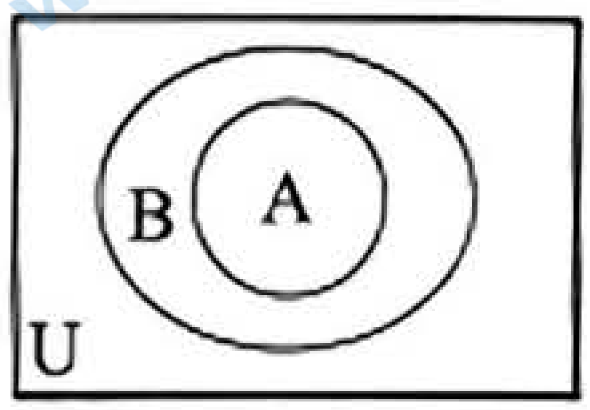
A



B



C



D

6. 某商品的地区经销商对2023年1月到5月该商品的销售情况进行了调查，得到如下统计表.发现销售量 y(万件)与时间 x(月)成线性相关，根据表中数据，利用最小二乘法求得 y 与 x 的回归直线方程为：$\hat{y}=0.48x+0.56$.则下列说法错误的是(　　)

A. 由回归方程可知2024年1月份该地区的销售量为6.8万件

B. 表中数据的样本中心点为(3，2.0)

C. a=2.4

D. 由表中数据可知，y 和 x 成正相关

时间 x(月)	1	2	3	4	5
销售量 y(万件)	1	1.6	2.0	a	3

7. 二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$的展开式中常数项为(　　)

A. -60　　B. 60　　C. 210　　D. -210

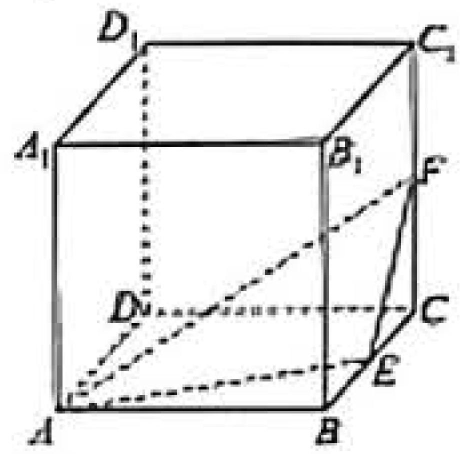
8. 已知：$2^{a+1}=3$，$2^{b-3}=\frac{1}{3}$，则下列说法中错误的是(　　)

A. $a+b=2$　　B. $1<b<\frac{3}{2}$　　C. $b-a<1$　　D. $ab>1$

9. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E，F分别为BC，CC_1的中点，则平面AEF截正方体所得的截面面积为(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{9}{2}$

C. 9　　D. 18



10. 如图1是函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$的部分图象，经过适当的平移和伸缩变换后，得到图2中$g(x)$的部分图象，则(　　)

A. $g(x)=f\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

B. $g\left(\frac{2023}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 方程$g(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$有4个不相等的实数解

D. $g(x)>\frac{1}{2}$的解集为$\left(\frac{1}{6}+2k,\ \frac{5}{6}+2k\right)$，$k\in Z$

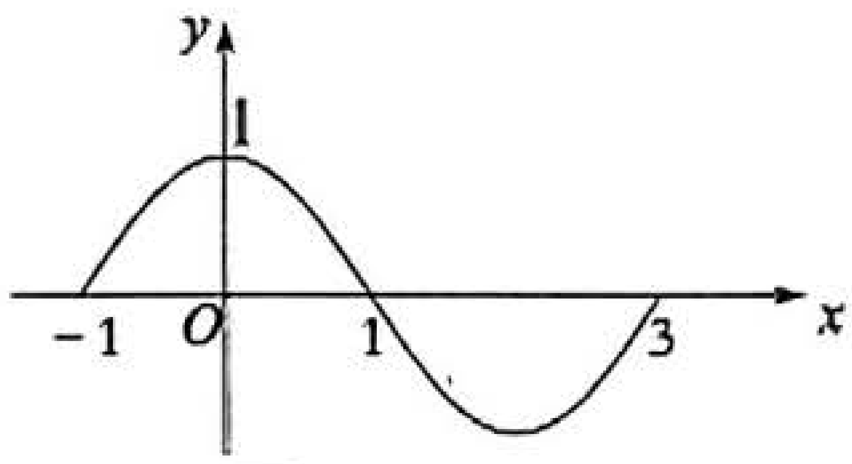


图 1

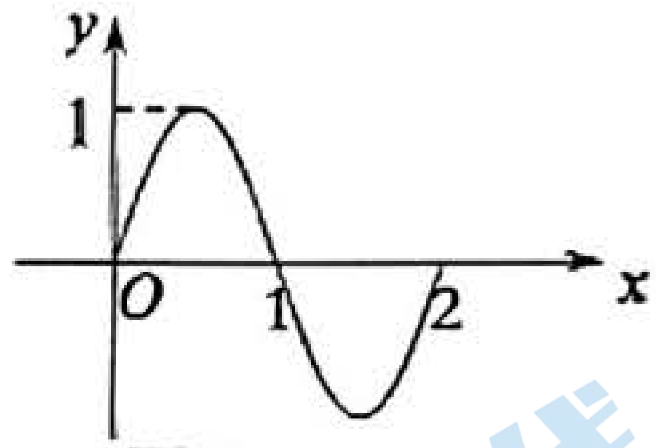


图 2

11. 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左右焦点分别为F_1，F_2，左右顶点分别为A_1，A_2，P为双曲线在第一象限上的一点，若$\cos\angle PF_2F_1=\frac{1}{4}$，则$\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{PA_2}=$(　　)

A. -2　　B. 2　　C. 5　　D. -5

12. 已知函数$f(x)=\left|\ln x-\frac{2}{x}+2\right|-m$ $(0<m<3)$有两个不同的零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，下列关于x_1，x_2的说法正确的有(　　)个

①$\frac{x_2}{x_1}<e^{2m}$　　②$x_1>\frac{2}{m+2}$　　③$e^{\frac{m}{3}}<x_2<\frac{3}{3-m}$　　④$x_1x_2>1$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

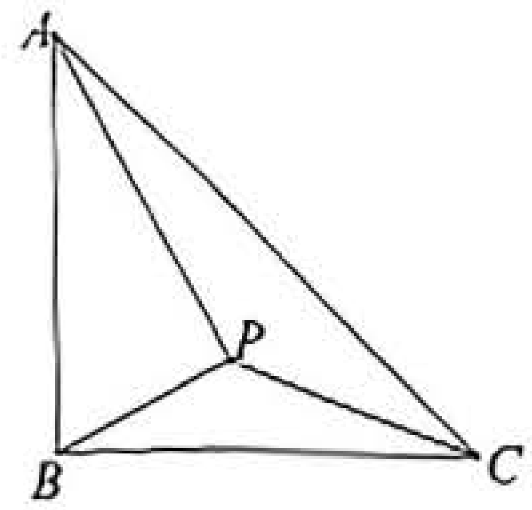
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13、满足约束条件$\begin{cases}x+y-1\le 0\\x-y+3\le 0\\x+2\ge 0\end{cases}$的平面区域的面积为________

14. 已知函数$f(x)$为R上的奇函数，且$f(x)=\begin{cases}2^x-1,(0\le x<3)\\x-5,(x\ge 3)\end{cases}$，则$f(f(3))=$________.

15. 已知圆台O_1O_2的上下底面半径分别为$\sqrt{3}$和$3\sqrt{3}$，若存在一个球同时与该圆台的上、下底面及侧面都相切，则该圆台的体积为________.

附：圆台体积公式为：$V=\frac{1}{3}\left(S_{上}+\sqrt{S_{上}S_{下}}+S_{下}\right)h$



16. 如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=BC=1$，P为ΔABC内一点，且$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$，则$\tan\alpha=$________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17. 已知数列$\{a_n\}$是首项为2的等比数列，且a_4是$6a_2$和a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$的公比$q>0$，设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}$，求$\{b_n\}$的前2023项和$T_{2023}$.

18. 2023年秋季，支原体肺炎在全国各地流行，该疾病的主要感染群体为青少年和老年人，某市医院传染病科在该市各医院某段时间就医且年龄在70岁以上的老年人中随机抽查了200人的情况，并将调查结果整理如下：

	有慢性疾病	没有慢性疾病	合计
未感染支原体肺炎	60	80	140
感染支原体肺炎	40	20	60
合计	100	100	200

（1）是否有99.5%的把握认为70岁以上老人感染支原体肺炎与自身有慢性疾病有关？

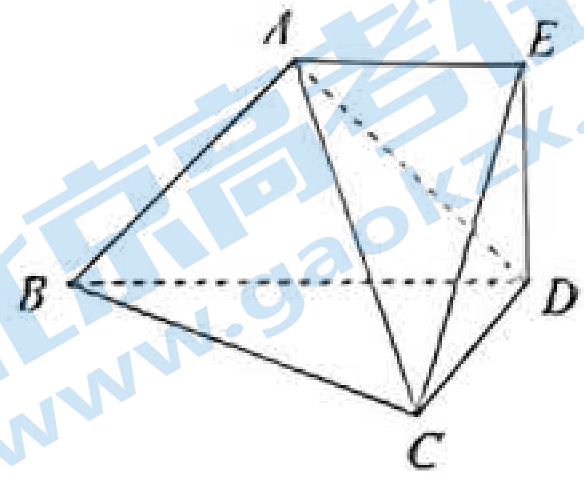
（2）现从感染支原体肺炎的60位老人中按分层抽样的方式抽出6人，再从6人中随机抽出4人作为医学研究对象并免费治疗. 按以往的经验，有慢性疾病的老人每人的研究治疗费用为2万元，没有慢性疾病的老人每人的研究治疗费用为1万元，记抽出的这4人产生的研究治疗总费用为ξ(单位：万元)，求ξ的分布列及数学期望.

附表：

$P(K^2\geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中$n=a+b+c+d$）

19. 如图，在四棱锥 $C-ABDE$ 中，$DE\perp$ 平面BCD，$AB=AD=2\sqrt{3}$，$BD=4$，$DE=2\sqrt{2}$.



（1）求证：$AE\parallel$ 平面BCD；

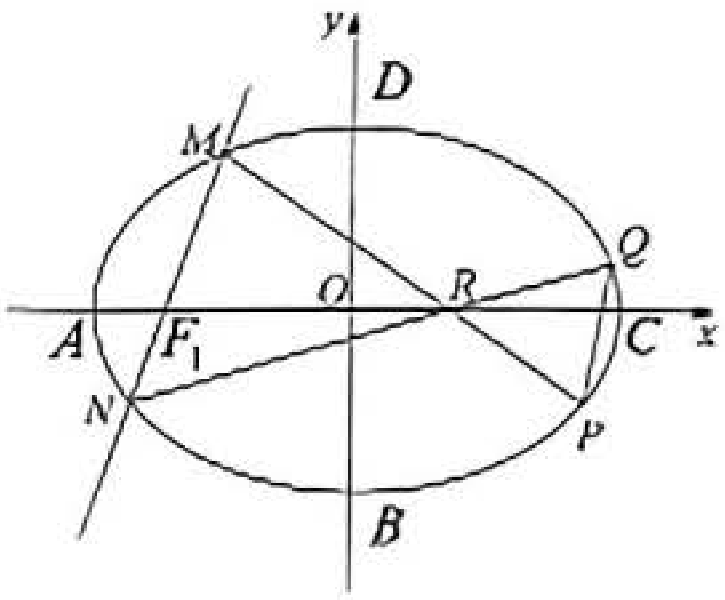
（2）若 $BC\perp CD$，二面角 $A-BC-D$ 的正切值为 $2\sqrt{2}$，求直线 CE 与平面 ABC 所成角的正弦值.

20. 设函数 $f(x)=e^x$（e为自然对数的底数），函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

（1）设函数 $h(x)=\dfrac{mf(x)}{\sin x}$，若 $x\in(0,\pi)$ 时，$h(x)\geq\sqrt{2}$ 恒成立，求 m 的取值范围；

（2）证明：$f(x)$ 与 $g(x)$ 有且仅有两条公切线，且 $f(x)$ 图象上两切点横坐标互为相反数.

21. 如图，椭圆 E：$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的四个顶点为 A，B，C，D，过左焦点 F_1 且斜率为 k 的直线交椭圆 E 于 M，N 两点.



（1）求四边形 $ABCD$ 的内切圆的方程；

（2）设$R(1,0)$，连结 MR，NR 并延长分别交椭圆 E 于 P，Q 两点，设 PQ 的斜率为 k'. 则是否存在常数 λ，使得 $k=\lambda k'$ 恒成立？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. 在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$），把 C_1 绕坐标原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到 C_2，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，取相同的单位长度建立极坐标系.

（1）写出 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2）若曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$，且 C_1 与 C_3 交于点 A，C_2 与 C_3 交于点 B（A，B 与点 O 不重合），求 ΔAOB 面积的最大值.

23. 已知函数 $f(x)=|x-4|-|x+2|$.

（1）若 $f(x)-a^2+5a\geq 0$ 恒成立，求 a 取值范围；

（2）若 $f(x)$ 的最大值为 M，正实数 a，b，c 满足：$a+b+c=M$，求 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$ 的最大值.

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	D	C	A	B	A	B	D	B	D	C	D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13． $\underline{1}$　　14． $\underline{-3}$　　15． $\underline{78\pi}$　　16． $\underline{\frac{1}{2}}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答.第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答.

(一)必考题

17．解：(1)∵数列$\{a_n\}$是等比数列且a_4是$6a_2$和a_3的等差中项

$\therefore 2a_4 = 6a_2 + a_3$　即$2a_1q^3 = 6a_1q + a_1q^2$

整理得:$2q^2 - q - 6 = 0$

解得：$q = 2$或$q = -\frac{3}{2}$ ……………………………………………………4分

当$q=2$时，$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2^n$.

当$q = -\frac{3}{2}$时，$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2\cdot(-\frac{3}{2})^{n-1}$.

$\therefore a_n = 2^n$或$a_n = 2\cdot(-\frac{3}{2})^{n-1}$　$(n \in N^*)$. ……………………………………………6分

（2）∵由(1)得，若$q>0$，$a_n = 2^n$

$$b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}} = \frac{1}{\log_2 2^n \cdot \log_2 2^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$ ……………………8分

$$T_{2023} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2022} + b_{2023}$$
$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}) + (\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024})$$
$$= 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$$ ……………………………………………………12分

18 解：(1).由题意得 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(60\times20-80\times40)^2}{100\times100\times140\times60}$

$$= \frac{200}{21} \approx 9.524 > 7.879$$ ……………………4分

故有 99.5%的把握认为 70 岁以上老人感染支原体肺炎与自身有慢性疾病有关. ……………5分

(2).现从感染支原体肺炎的 60 位老人中按分层抽样的方式抽出 6 人，则 6 人中有慢性疾病 4 人，无有慢性疾病 2 人. ……………6分

再从 6 人中随机抽出 4 人，则抽出的 4 人中可能有以下 3 种组合：

①有慢性疾病 4 人；　此时 $\xi=8$ 万元

②有慢性疾病 3 人，无有慢性疾病 1 人；　此时 $\xi=7$ 万元

③有慢性疾病 2 人，无有慢性疾病 2 人；　此时 $\xi=6$ 万元

所以 ξ 的可能取值为8，7，6 ……………8分

故 $P(\xi=8)=\dfrac{C_4^4}{C_6^4}=\dfrac{1}{15}$；$P(\xi=7)=\dfrac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\dfrac{8}{15}$；$P(\xi=6)=\dfrac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\dfrac{6}{15}$

故 ξ 的分布列为：

ξ	8	7	6
P	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{2}{5}$

……………11分

则 ξ 的数学期望 $E(\xi)=8\times\dfrac{1}{15}+7\times\dfrac{8}{15}+6\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{20}{3}$(万元) ……………12分

19 (1).方法一：

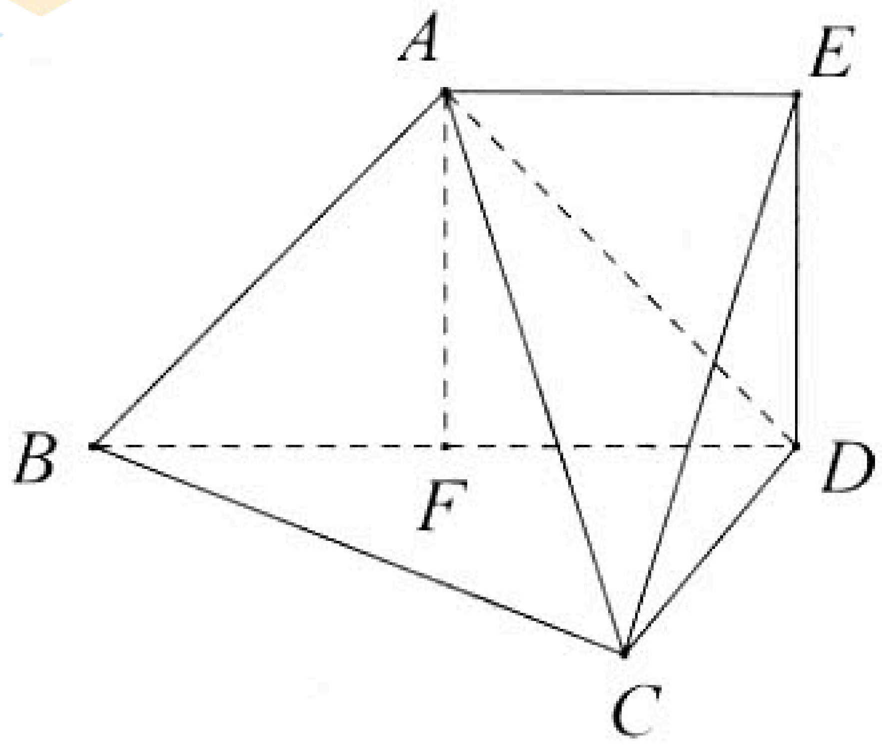
证明：取 BD 的中点 F，连结 AF

$\because AD=AB$

$\therefore AF\perp BD$

$\because BD=4\quad AD=2\sqrt{3}$

$\therefore DF=2\quad AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ……………2分



$\because DE\perp$ 平面BCD

$\therefore DE\perp BD$

$\because DE=2\sqrt{2}$

$\therefore AF\,//\,DE$，$AF=DE$

$\therefore$四边形$FDEA$为矩形 ……………4分

$\therefore AE\,//\,BD$

$\because AE\not\subset$ 平面BCD　$BD\subset$ 平面BCD

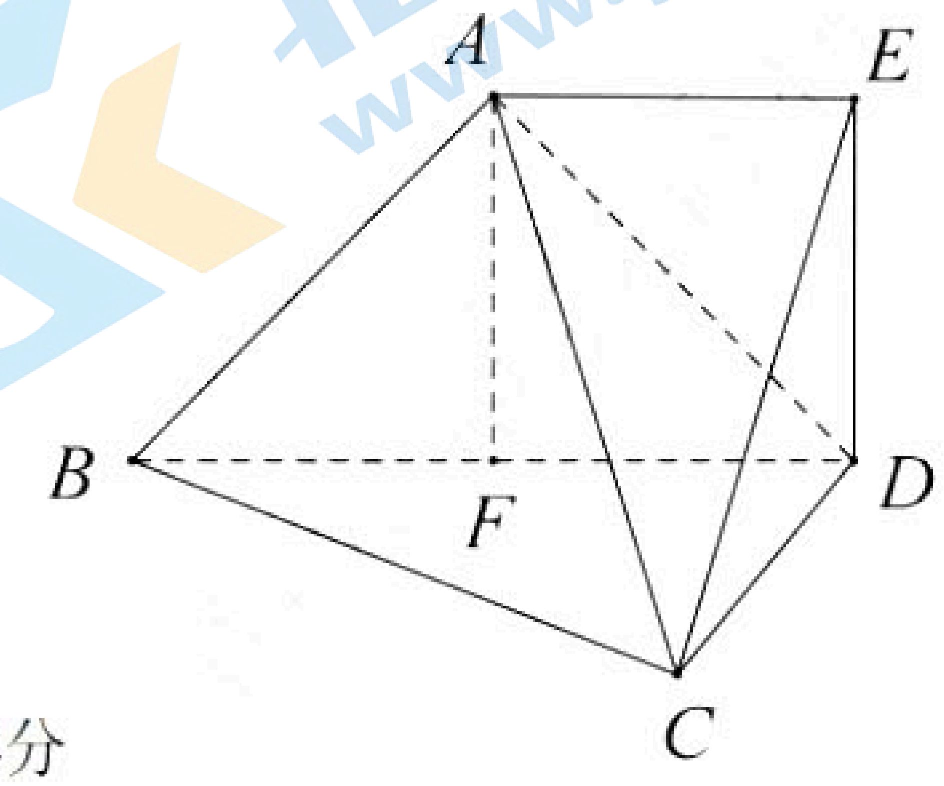
$\therefore AE\,//$ 平面BCD ……………6分

方法二：

证明：取 BD 的中点 F ,连结 AF

$\because AD=AB=2\sqrt{3}$ ，$BD=4$

$\therefore AF\perp BD$



$\therefore AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ································2分

$\because DE\perp$平面BCD ，$DE\subset$平面$ABDE$

$\therefore$平面$ABDE\perp$平面BCD

$\because AF\subset$平面$ABDE$ ，平面$ABDE\cap$平面$BCD=BD$

$\therefore AF\perp$平面BCD ···4分

$\therefore AF // DE$，$AF=DE$

$\therefore$四边形$FDEA$为矩形 ···5分

$\therefore AE // BD$

$\because AE\not\subset$平面BCD　$BD\subset$平面BCD

$\therefore AE //$平面BCD ··6分

(2)取 BC 的中点 M ，连结 AM,FM .

$\because \angle BCD=90^\circ$

$\therefore CF=FB=2$，

$\because AF // DE$，$DE\perp$平面BCD

$\therefore AF\perp$平面BCD

$\therefore AF\perp CF$

又$CF=2$，$AF=2\sqrt{2}$

$\therefore AC=\sqrt{AF^2+CF^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore AC=AB$

$\because M$为BC的中点

$\therefore BC\perp MF, BC\perp AM$

$\therefore \angle AMF$为二面角$A-BC-D$的平面角

$\therefore Rt\Delta AFM$中，$\tan\angle AMF=\dfrac{AF}{MF}=2\sqrt{2}$

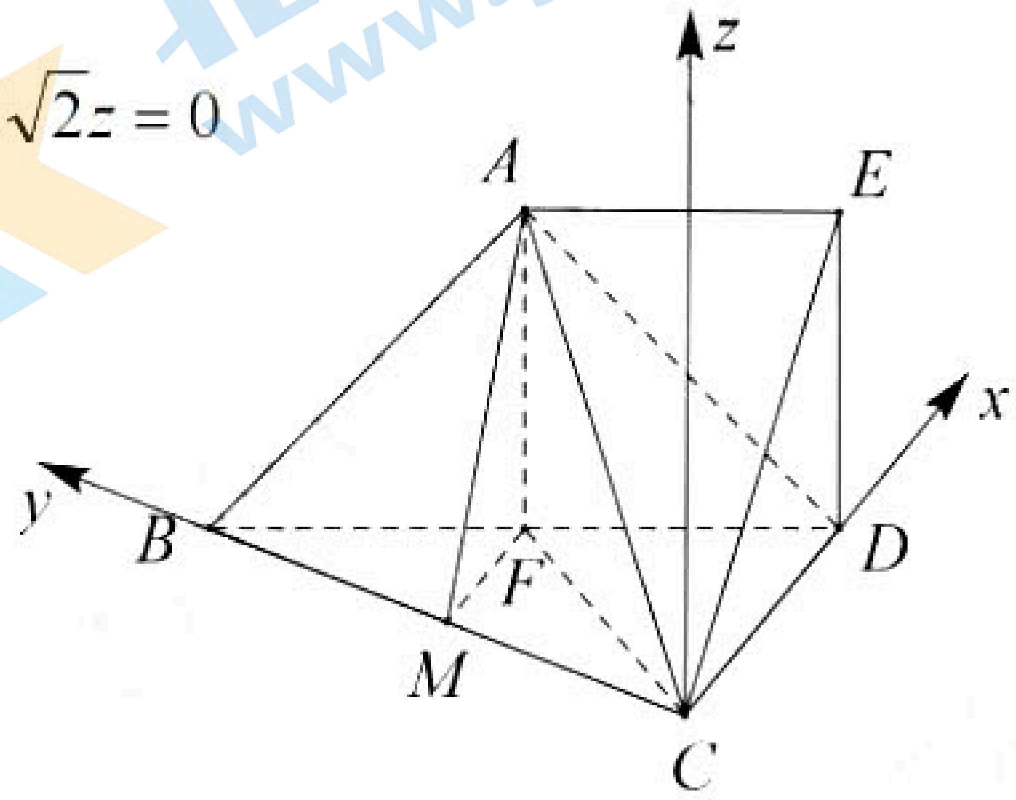
$\therefore FM=1$

$\therefore CD=2$，$BC=2\sqrt{3}$ ································8分

方法一：以C为坐标原点，CD为x轴，CB为y轴，建立如图所示的空间直角坐标系$C-xyz$，

$\therefore C(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$E(2,0,2\sqrt{2})$，$A(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$B(0,2\sqrt{3},0)$.

$\therefore \overrightarrow{CE}=(2,0,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CA}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$



设平面ABC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0\\ 2\sqrt{3}y=0\end{cases}$

取$z=-1$ 得：$\vec{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$ ……………………………10分

设直线CE与平面ABC所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{CE}>\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{2}\times2-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

$\therefore$直线CE与平面ABC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{9}$. ……………………………12分

方法二：

过C作BD的垂线交BD于H

$\therefore CH\perp BD$

$\because DE\perp$平面BCD，$CH\subset$平面BCD

$\therefore DE\perp CH$

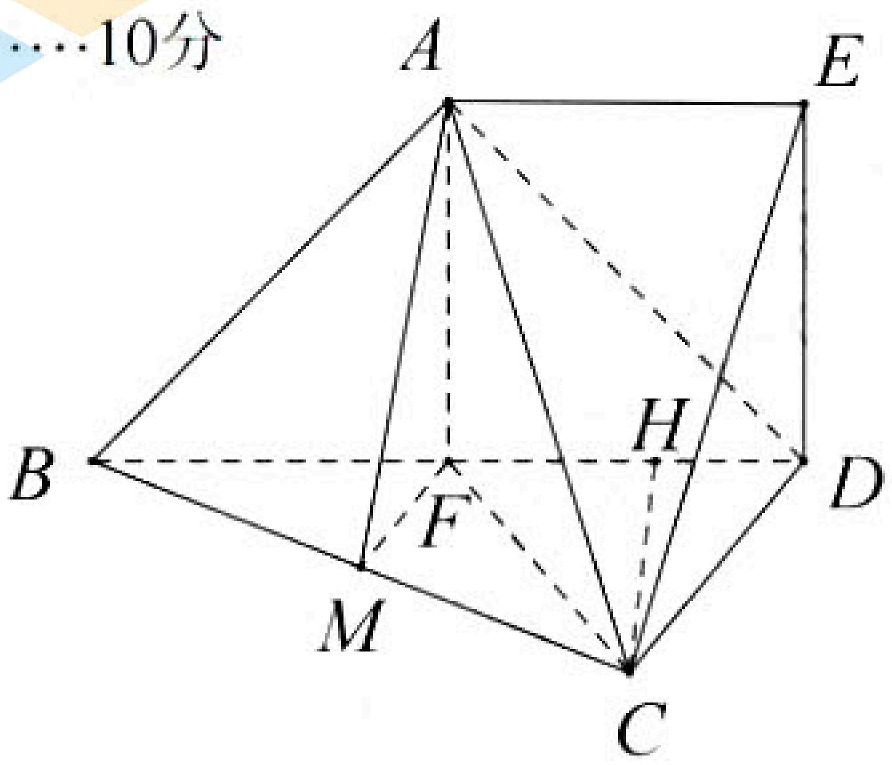
又$BD\cap DE=D$

$\therefore CH\perp$平面$ABDE$

在ΔBCD中，由$S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BC\times CD=\dfrac{1}{2}BD\times CH$，得$CH=\sqrt{3}$

又$S_{\Delta BAE}=S_{\Delta DAE}=\dfrac{1}{2}AE\times DE=2\sqrt{2}$

$\therefore V_{C-BAE}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BAE}\times CH=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ……………………………10分



又$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$

$\therefore\Delta ABC$为等边三角形，$S_{\Delta ABC}=3\sqrt{3}$

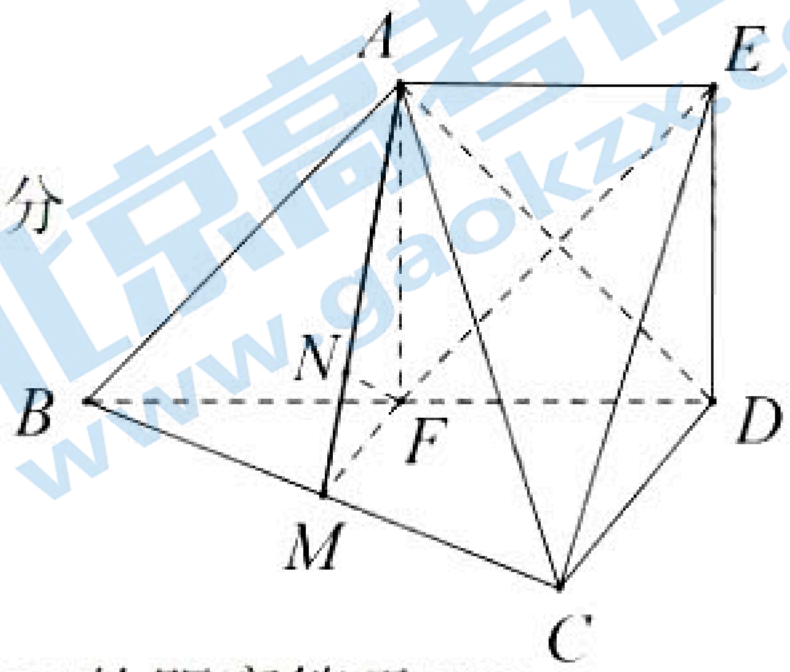
设点E到平面ABC的距离为h，由$V_{E-ABC}=V_{C-BAE}$得：$h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故点E到平面ABC的距离为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………………11分

又$Rt\Delta CDE$中，$DE=2\sqrt{2}$，$CD=2$

$\therefore CE = 2\sqrt{3}$

所以直线 CE 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\dfrac{h}{CE} = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ………………12分



注：以下方法酌情给分

由 EF // 平面 ABC 知，E、F 到平面 ABC 的距离相等，如右图，

取 BC 中点 M，过 F 作 $FN \perp AM$ 于 N，则可证 $FN \perp$ 平面 ABC，即 E 到平面 ABC 的距离等于 FN.

20 题：(1).由 $h(x) \geq 2$ 得：$\dfrac{mf(x)}{\sin x} \geq 2$

$\therefore x \in (0, \pi)$ 时 $m \geq \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{e^x}$ 恒成立 ………………………………1分

令 $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{e^x}\ (0 < x < \pi)$

$\therefore \varphi'(x) = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{e^x}$ ……………………………2分

由 $\varphi'(x) > 0$ 得：$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$；由 $\varphi'(x) < 0$ 得：$\dfrac{\pi}{4} < x < \pi$

$\varphi(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{4})$ 上单调递增；在 $(\dfrac{\pi}{4}, \pi)$ 上单调递减

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(\dfrac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$ ……………………………………4分

所以 m 的取值范围为 $[e^{-\frac{\pi}{4}}, +\infty)$ …………………………5分

(2).由已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称

$\therefore g(x) = \ln x$ …………………………6分

设公切线与 $f(x) = e^x$ 相切于点 (s, e^s)，与 $g(x) = \ln x$ 相切于点 $(t, \ln t)$

由 $f'(x) = e^x$，$g'(x) = \dfrac{1}{x}$ 知公切线可分别表示为：

$y - e^s = e^s(x - s)$，即 $y = e^s x + e^s(1 - s)$ 或 $y - \ln t = \dfrac{1}{t}(x - t)$，即 $y = \dfrac{1}{t}x + \ln t - 1$

$\therefore \begin{cases} e^s = \dfrac{1}{t} & \cdots\cdots① \\ e^s(1-s) = \ln t - 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$ 由①②消去 t 得：$e^s(1-s) = -1 - s$

即 $e^s(s-1) - s - 1 = 0$ …………………………8分…………(*)

令 $F(x) = (x-1)e^x - x - 1$，则 $F'(x) = xe^x - 1$，

显然 $x \leq 0$ 时，$F'(x) < 0$

当 $x > 0$ 时，令 $\mu(x) = F'(x) = xe^x - 1$，

$\therefore \mu'(x) = (x+1)e^x > 0$，故 $\mu(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又 $F'(0)=-1<0$，$F'(1)=e-1>0$

$\therefore \exists x_0\in(0,1)$ 使得 $F'(x_0)=x_0e^{x_0}-1=0$

$\therefore$ 当 $x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增…………10分

又 $F(-2)=-\dfrac{3}{e^2}+1>0$，$F(-1)=-\dfrac{2}{e}<0$；$F(1)=-2<0$，$F(2)=e^2-3>0$

所以 $F(x)$ 有且仅有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1\in(-2,-1)$，$x_2\in(1,2)$.……………………11分

由 $F(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$ 知：

$$F(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\frac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$$

由 $x_1\in(-2,-1)$ 知 $x_1\neq -x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即 $x_1+x_2=0$

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 有且仅有两条公切线，且 $f(x)$ 图像上两切点横坐标互为相反数.…………12分

注：(*)处由①②消去 t 得：$e^s-\dfrac{s+1}{s-1}=0$ 或 $e^s=\dfrac{s+1}{s-1}$

或由①②消去 s 得：$(t-1)\ln t-t-1=0$ 或 $\ln t-\dfrac{t+1}{t-1}=0$

再构造函数证明，具体过程可参照文科20题(2)的解法，评分标准酌情处理

21 解：(1).显然四边形 $ABCD$ 为菱形，

故其内切圆以 O 为圆心，半径 r 为 O 到直线 AD 的距离 …………1分

又由 $A(-\sqrt{5},0)$，$D(0,1)$ 得直线 AD 的方程为：$x-\sqrt{5}y+\sqrt{5}=0$ …………3分

故原点到直线 AD 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{1+5}}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}=r$ …………4分

故四边形 $ABCD$ 内切圆的标准方程为：$x^2+y^2=\dfrac{5}{6}$ …………5分

(2).方法一：

由题意可知 $F_1(-2,0)$，故 MN 方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则直线 MP 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}+y^2=1\\ y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)\end{cases}$ 得：$[5y_1^2+(x_1-1)^2]x^2-10y_1^2x+5y_1^2-5x_1^2+10x_1-5=0$……(*)

又$M(x_1,y_1)$在椭圆E上，故 $\frac{x_1^2}{5}+y_1^2=1$，即$5y_1^2=5-x_1^2$

代入(*)式整理得：$(3-x_1)x^2-5y_1^2x+5x_1-3x_1^2=0$ ……………………8分

显然$3-x_1\neq 0$，$\Delta>0$

$\therefore x_1\cdot x_P=\frac{5x_1-3x_1^2}{3-x_1}$

$\therefore x_P=\frac{3x_1-5}{x_1-3}$， $y_P=\frac{y_1}{x_1-1}(x_P-1)=\frac{2y_1}{x_1-3}=\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}$

故$P\left(\frac{3x_1-5}{x_1-3},\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}\right)$ ……………………9分

同理：$Q\left(\frac{3x_2-5}{x_2-3},\frac{2k(x_2+2)}{x_2-3}\right)$；

$$\therefore k'=\frac{\frac{2k(x_1+2)}{x_1-3}-\frac{2k(x_2+2)}{x_2-3}}{\frac{3x_1-5}{x_1-3}-\frac{3x_2-5}{x_2-3}}=\frac{2k[(x_1+2)(x_2-3)-(x_2+2)(x_1-3)]}{(3x_1-5)(x_2-3)-(3x_2-5)(x_1-3)}$$

$$=\frac{2k(5x_2-5x_1)}{4x_2-4x_1}=\frac{5k}{2}$$ ……………………11分

故$k'=\frac{5k}{2}$，即$k=\frac{2}{5}k'$

所以：存在常数$\lambda=\frac{2}{5}$满足题意 ……………………12分

方法二：

由题意可知$F_1(-2,0)$，故MN方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

设$\overrightarrow{MR}=t\overrightarrow{RP}$

$\therefore(1-x_1,-y_1)=t(x_3-1,y_3)$

$\begin{cases}1-x_1=t(x_3-1)\\-y_1=ty_3\end{cases}$ 得：$\begin{cases}x_1+tx_3=1+t\\y_1+ty_3=0\end{cases}$……(*) ……………………7分

$\because\begin{cases}\frac{x_1^2}{5}+y_1^2=1\cdots\cdots①\\\frac{x_3^2}{5}+y_3^2=1\cdots\cdots②\end{cases}$ 由①$-$②$\times t^2$得：$\frac{x_1^2-t^2x_3^2}{5}+y_1^2-t^2y_3^2=1-t^2$

$\therefore\frac{(x_1+tx_3)(x_1-tx_3)}{5}+(y_1+ty_3)(y_1-ty_3)=1-t^2$

将(*)带入上式得：$\frac{(1+t)(x_1-tx_3)}{5}+0=1-t^2$ 即：$x_1-tx_3=5-5t$ ……………………9分

又$\because x_1+tx_3=1+t$

$\therefore x_1=3-2t$ ，$x_3=3-\frac{2}{t}$

$\therefore y_3=-\frac{1}{t}y_1=-\frac{1}{t}k(x_1+2)=k(2-\frac{5}{t})$

设$\overrightarrow{NR}=\mu\overrightarrow{RQ}$，同理可得：

$x_4=3-\frac{2}{\mu}$，$y_4=k(2-\frac{5}{\mu})$ ………………………………10分

$\therefore k'=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{k(2-\frac{5}{t})-k(2-\frac{5}{\mu})}{(3-\frac{2}{t})-(3-\frac{2}{\mu})}=\frac{5k(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}{2(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}=\frac{5}{2}k$ ……………………11分

故$k'=\frac{5k}{2}$，即$k=\frac{2}{5}k'$

所以：存在常数$\lambda=\frac{2}{5}$满足题意 ……………………12分

22.解：(1).显然C_1是过原点且倾斜角为α的直线 ……………………1分

$\therefore C_1$的极坐标方程为$\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\rho\in R)$ ……………………3分

C_2的极坐标方程为$\theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\rho\in R)$. …………………5分

(2).由$\begin{cases}\rho=8\sin\theta\\ \theta=\alpha\end{cases}$ 得A的极坐标为$(8\sin\alpha，\alpha)$

由$\begin{cases}\rho=8\sin\theta\\ \theta=\alpha+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 得B的极坐标为$\left(8\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})，\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$，即$\left(8\cos\alpha，\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. ……7分

$\therefore |OA|=8\sin\alpha$，$|OB|=8\cos\alpha$ ………………8分

$\therefore \Delta AOB$的面积为：$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=32\sin\alpha\cos\alpha=16\sin2\alpha$ …………………9分

又$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$时，$\Delta AOB$面积的最大值为16. …………………10分

23.解：(1) $f(x)=|x-4|-|x+2|=\begin{cases}6 & x<-2\\ -2x+2 & -2\le x<4\\ -6 & x\ge 4\end{cases}$ ……………2分

$\therefore$ 当$x\ge 4$时，$f(x)_{\min}=-6$ ……………3分

$\because f(x)-a^2+5a\ge 0$ 恒成立

$\therefore -6-a^2+5a\ge 0$ 即 $a^2-5a+6\le 0$

$\therefore 2\le a\le 3$

故a的取值范围为$[2,3]$. ……………5分

(2) 由(1)知：$M=6$. 即$a+b+c=6$ ……………6分

法 1：

$\therefore(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3})^2$

$=a+1+b+2+c+3+2\sqrt{(a+1)(b+2)}+2\sqrt{(a+1)(c+3)}+2\sqrt{(b+2)(c+3)}$

$\le a+b+c+6+(a+1)+(b+2)+(a+1)+(c+3)+(b+2)+(c+3)$

$=3(a+b+c)+18=36$ ……………8分

当且仅当$\begin{cases}\sqrt{a+1}=\sqrt{b+2}=\sqrt{c+3}\\ a+b+c=6\end{cases}$，即$\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\end{cases}$时等号成立 ……………9分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$的最大值为6. ……………10分

法 2：（柯西不等式）

$\because a>0\quad b>0\quad c>0$

$\therefore(\sqrt{a+1}\cdot 1+\sqrt{b+2}\cdot 1+\sqrt{c+3}\cdot 1)^2$

$\le\left[(\sqrt{a+1})^2+(\sqrt{b+2})^2+(\sqrt{c+3})^2\right]\cdot(1^2+1^2+1^2)$

$=(a+b+c+6)\times 3=36$ ……………8分

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{b+2}}{1}=\dfrac{\sqrt{c+3}}{1}\\ a+b+c=6\end{cases}$，即$\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\end{cases}$时等号成立 ……………9分

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$的最大值为6. ……………10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！