2017 海淀区高二（下）期中数学（文科）

一．选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.（4 分）下列各数中，是纯虚数的是（　　）

A．i^2　B．π　C．$1+\sqrt{3}i$　D．$(1+\sqrt{3})i$

2.（4 分）函数 $f(x)=x^2+\cos x$ 的导数 $f'(x)$ 为（　　）

A．$x-\sin x$　B．$2x-\sin x$　C．$x+\sin x$　D．$2x+\sin x$

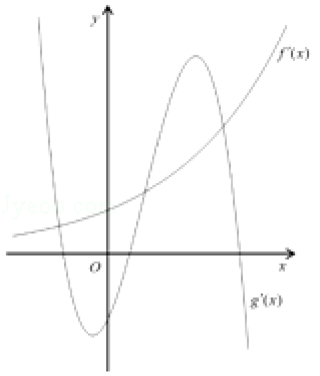
3.（4 分）函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 的单调递增区间是（　　）

A．$(-\infty, -1)$，$(0, +\infty)$　B．$(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$　C．$(-1, 0)$　D．$(-\infty, 0)$，$(1, +\infty)$

4.（4 分）若复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，且 $z_1=1+i$，则 $z_2=$（　　）

A．$1+i$　B．$1-i$　C．$-1-i$　D．$-1+i$

5.（4 分）定义在 R 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，其各自导函数 $f'(x)$ f 和 $g'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 极值点的情况是（　　）



A．只有三个极大值点，无极小值点

B．有两个极大值点，一个极小值点

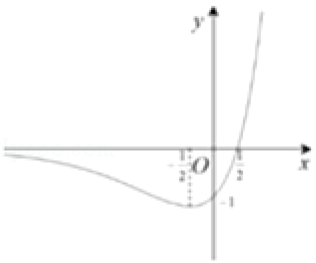
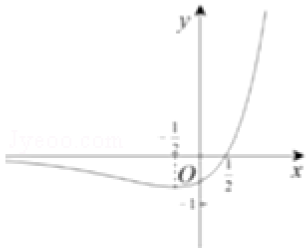
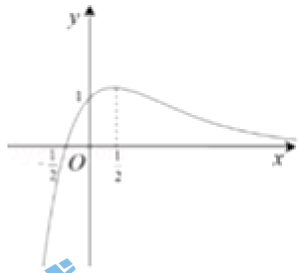
C．有一个极大值点，两个极小值点

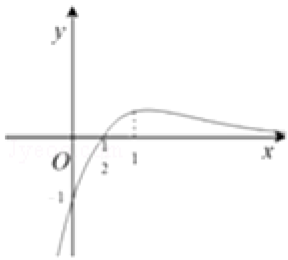
D．无极大值点，只有三个极小值点

6.（4 分）函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=ax^2-a$ 的图象在点（1，0）的切线相同，则实数 a 的值为（　　）

A．1　B．$-\frac{1}{2}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$

7.（4 分）函数 $y=e^x(2x-1)$ 的大致图象是（　　）

A.  B.  C. 

D. 

8.（4 分）为弘扬中国传统文化，某校在高中三个年级中抽取甲、乙、丙三名同学进行问卷调查．调查结果显示这三名同学来自不同的年级，加入了不同的三个社团：“楹联社”、“书法社”、“汉服社”，还满足如下条件：

（1）甲同学没有加入“楹联社”；

（2）乙同学没有加入“汉服社”；

（3）加入“楹联社”的那名同学不在高二年级；

（4）加入“汉服社”的那名同学在高一年级；

（5）乙同学不在高三年级．

试问：甲同学所在的社团是（　　）

A．楹联社　B．书法社

C．汉服社　D．条件不足无法判断

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．

9.（4 分）已知复数 z=（2+3i）i，在复平面内与复数 z 对应的点的坐标为____．

10.（4 分）设函数 f（x），g（x）在区间（0，5）内导数存在，且有以下数据：

x	1	2	3	4
f（x）	2	3	4	1
f′（x）	3	4	2	1
g（x）	3	1	4	2
g′（x）	2	4	1	3

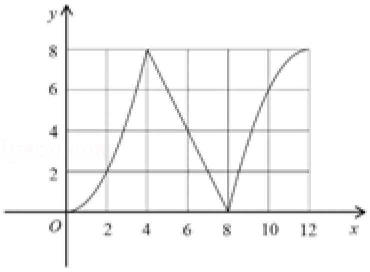
则函数 y=f（x）•g（x）在 x=2 处的导数值是____；曲线 f（x）在点（1，f（1））处的切线方程是____．

11.（4 分）如图，函数 f（x）的图象经过（0，0），（4，8），（8，0），（12，8）四个点，试用“>，=，

<”填空：

（1）$\frac{f(4)-f(2)}{2}$____$\frac{f(12)-f(8)}{4}$；

（2）$f'(6)$____$f'(10)$．



12．（4 分）已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是____．

13．（4 分）若数列$\{a_n\}$满足 $2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)=(a_1+a_n)n$，则数列$\{a_n\}$是等差数列．类比上述结论，可以猜想：若数列$\{b_n\}$满足____，则数列$\{b_n\}$是等比数列．

14．（4 分）函数 $f(x)=e^x-a\ln x$（其中 $a\in R$，e 为自然常数）

①$\exists\ a\in R$，使得直线 $y=ex$ 为函数 $f(x)$ 的一条切线；

②对$\forall\ a<0$，函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 无零点；

③对$\forall\ a<0$，函数 $f(x)$ 总存在零点；

则上述结论正确的是____．（写出所有正确的结论的序号）

三．解答题：本大题共 4 小题，共 44 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（10 分）计算：

（Ⅰ）$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

（Ⅱ）　$(1+2i)\div(3-4i)$

16．（10 分）已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$，求函数 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上的最小值．

17．（12 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$，$n\in N^*$．

（Ⅰ）求 a_2，a_3，a_4，并猜想数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，求证：数列$\{S_n\}$不是等差数列．

18．（12 分）已知函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$，其中 $a\in R$．

（Ⅰ）求证：当 $a=1$ 时，函数 $y=f(x)$ 没有极值点；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间．

参考答案与试题解析

一．选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．【解答】$i^2=-1$，则 A，B 为实数，C 为虚数，

根据纯虚数定义可知，D 正确，

故选：D

2．【解答】函数 $f(x)=x^2+\cos x$ 的导数 $f'(x)$ 为 $2x-\sin x$，

故选：B

3．【解答】函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$，

$f'(x)=x^2+x=x(x+1)$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>0$ 或 $x<-1$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 递增，

故选：A．

4．【解答】复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，且 $z_1=1+i$，

则 $z_2=-1+i$．

故选：D．

5．【解答】$F'(x)=f'(x)-g'(x)$，

由图象得 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 有 3 个交点，

从左到右分分别令为 a，b，c，

故 $x\in(-\infty,a)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 递减，

$x\in(a,b)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 递增，

$x\in(b,c)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 递减，

$x\in(c,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 递增，

故函数 $F(x)$ 有一个极大值点，两个极小值点，

故选：C．

6．【解答】由题意，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$，

∵函数 $f(x)=\ln x$ 与函数 $g(x)=ax^2-a$ 的图象在点（1，0）的切线相同，

∴$1=2a$，∴$a=\frac{1}{2}$，

故选 C．

7．【解答】$y'=e^x(2x-1)+2e^x=e^x(2x+1)$，

令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$，

∴当 $x<-\frac{1}{2}$时，$y'<0$，当 $x>-\frac{1}{2}$时，$y'>0$，

∴$y=e^x(2x-1)$在$(-\infty,-\frac{1}{2})$上单调递减，在$(-\frac{1}{2},+\infty)$上单调递增，

当 $x=0$ 时，$y=e^0(0-1)=-1$，∴函数图象与 y 轴交于点（0，－1）；

令 $y=e^x(2x-1)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，∴$f(x)$只有 1 个零点 $x=\frac{1}{2}$，

当 $x<\frac{1}{2}$时，$y=e^x(2x-1)<0$，当 $x>\frac{1}{2}$时，$y=e^x(2x-1)>0$，

综上，函数图象为 A．

故选 A．

8．【解答】假设乙在高一，则加入"汉服社"，与（2）矛盾，

所以乙在高二，根据（3），可得乙加入"书法社"，

根据（1）甲同学没有加入"楹联社"，

可得甲同学所在的社团是汉服社，

故选 C．

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．

9．【解答】∵$z=(2+3i)i=3i^2+2i=-3+2i$，

∴在复平面内与复数 z 对应的点的坐标为（－3，2）．

故答案为：（－3，2）．

10．【解答】∵$y=f(x)\bullet g(x)$，

∴$y=f'(x)\bullet g(x)+f(x)\bullet g'(x)$

$x=2$，$y=f'(2)\bullet g(2)+f(2)\bullet g'(2)$ $4\times1+4\times3=16$，

$f'(1)=3$，$f(1)=2$，∴曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=3x-1$，

故答案为 16；$y=3x-1$.

11.【解答】（1）由函数图象可知 $\frac{f(4)-f(2)}{2}=\frac{6}{2}=3$，$\frac{f(12)-f(8)}{4}=\frac{8}{4}=2$，

∴ $\frac{f(4)-f(2)}{2}>\frac{f(12)-f(8)}{4}$.

（2）∵$f(x)$ 在 $(4,8)$ 上是减函数，在 $(8,12)$ 上是增函数，

∴$f'(6)<0$，$f'(10)>0$，

∴$f'(6)<f'(10)$.

故答案为（1）>，（2）<.

12.【解答】若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $f'(x)=x^2-2ax+2\geqslant 0$ 恒成立，

则判别式 $\triangle=4a^2-4\times 2\leqslant 0$，

即 $a^2\leqslant 2$，则 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$，

故实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

故答案为：$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

13.【解答】把数列的项相加改成数列的项相乘，把结论的相乘的系数改成等比数列的指数，可得：

若数列 $\{b_n\}$ 满足 $(b_1b_2b_3\ldots b_n)^2=(b_1b_n)^n$，则数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

故答案为：$(b_1b_2b_3\ldots b_n)^2=(b_1b_n)^n$.

14.【解答】对于①，函数 $f(x)=e^x-a\ln x$ 的导数为 $f'(x)=e^x-\frac{a}{x}$，

设切点为 $(m,f(m))$，则 $e=e^m-\frac{a}{m}$，$em=e^m-a\ln m$，

可取 m=1，a=0，则∃ a∈R，使得直线 y=ex 为函数 $f(x)$ 的一条切线，故①正确；

对于②，∀ a<0，函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=e^x-\frac{a}{x}$，由 x>0，可得 $f'(x)>0$，

则导函数无零点，故②正确；

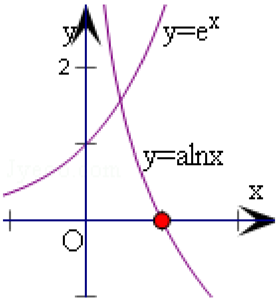
对于③，对∀ a<0，函数 $f(x)=e^x-a\ln x$，

由 $f(x)=0$，可得 $e^x=a\ln x$，

分别画出 $y=e^x$ 和 $y=a\ln x$，(a<0) 的图象，可得它们存在交点，

故 $f(x)$ 总存在零点，故③正确.

故答案为：①②③.



三．解答题：本大题共 4 小题，共 44 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.【解答】(Ⅰ) $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

$=(11-2i)(-2+i)$

$=-20+15i$；

(Ⅱ) $(1+2i)\div(3-4i)$

$=\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

16.【解答】函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$，可得 $f'(x)=3x^2-6x-9$，…（2 分）

$=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$，

$\because x\in[-2,2]$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$．…（4 分）

当 x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 在区间$[-2,2]$上的变化状态如下：

x	-2	(-2，-1)	-1	(-1，2)	2
f′(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	极大	↘	-20

…（9 分）

所以函数 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上的最小值为：-20．…（10 分）

17.【解答】(Ⅰ) 数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}+a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$，$n\in N^*$.

$\therefore a_2=\sqrt{2}-1$，同理可得：$a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$a_4=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，…，

归纳猜想：$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

(Ⅱ) 证明：由（Ⅰ）得：$S_1=a_1=1$，$S_2=a_1+a_2=\sqrt{2}$，$S_3=S_2+a_3=\sqrt{3}$，

假设数列$\{S_n\}$是等差数列，

则 S_1，S_2，S_3 成等差数列，

所以 $S_1+S_3=2S_2$，

即 $1+\sqrt{3}=2\sqrt{2}$，

两边平方得 $\sqrt{3}=2$

这显然不成立，所以假设错误，所以数列 $\{S_n\}$ 不是等差数列．

18．【解答】（Ⅰ）证明：函数 f（x）的定义域是（0，+∞）．

当 a=1 时，$f(x)=x-2\ln x-\frac{1}{x}$，

函数 $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

所以函数 f（x）在定义域（0，+∞）上单调递增，

所以当 a=1 时，函数 y=f（x）没有极值点；

（Ⅱ）$f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$，x∈（0，+∞）

令 f′（x）=0，得 $x_1=1$，$x_2=a$，

①a≤0 时，由 f′（x）＞0 可得 x＞1，

所以函数 f（x）的增区间是（1，+∞）；

②当 0＜a＜1 时，由 f′（x）＞0，可得 0＜x＜a，或 x＞1，

所以函数 f（x）的增区间是（0，a），（1，+∞）；

③当 a＞1 时，由 f′（x）＞0 可得 0＜x＜1，或 x＞a，

所以函数 f（x）的增区间是（0，1），（a，+∞）；

④当 a=1 时，

由（Ⅰ）可知函数 f（x）在定义域（0，+∞）上单调递增．

综上所述，当 a≤0 时，函数 y=f（x）的增区间是（1，+∞）；

当 0＜a＜1 时，所以函数 f（x）的增区间是（0，a），（1，+∞）；

当 a=1 时，函数 f（x）在定义域（0，+∞）上单调递增；

当 a＞1 时，所以函数 f（x）的增区间是（0，1），（a，+∞）．