2023 北京顺义一中高二（上）期中

数　　学

本试卷共 4 页，150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1. 经过 $A(-2,0), B(-5,3)$ 两点的直线的斜率是（　）

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. $-\frac{3}{2}$

2. 已知向量 $\vec{a}=(m,2,1)$，$\vec{b}=(-1,0,4)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 m 的值为（　）.

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. -2

3.已知圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$ 外切，则 $r=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 已知方程 $x^2+y^2+2x-y+m=0$ 表示圆，则实数 m 的取值范围是

A. $m>\frac{5}{4}$　　B. $m>-\frac{5}{4}$　　C. $m<\frac{5}{4}$　　D. $m<-\frac{5}{4}$

5. 设 $a\in\mathrm{R}$，则“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C.充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A，B，以线段 AB 为直径的圆的方程为（　　）

A. $x^2+y^2-4x-2y-1=0$　　B. $x^2+y^2-4x-2y=0$

C. $x^2+y^2-4x-2y+1=0$　　D. $x^2+y^2-2x-4y=0$

7. 椭圆 $x^2+2y^2=4$ 的焦点坐标为（　）

A. $(\sqrt{2},0)$，$(-\sqrt{2},0)$　　B. $(0,\sqrt{2})$，$(0,-\sqrt{2})$

C. $(\sqrt{6},0)$，$(-\sqrt{6},0)$　　D. $(0,\sqrt{6})$，$(0,-\sqrt{6})$

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点，则直线 AM 和 CN 所成角的余弦值是（　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\frac{2\sqrt{5}}{15}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

9. 布达佩斯的伊帕姆维泽蒂博物馆收藏的达·芬奇方砖，在正六边形上画了具有视觉效果的正方体图案（如图 1），把三片这样的达·芬奇方砖形成图 2 的组合，这个组合表达了图 3 所示的几何体．若图 3 中每个正方体的棱长为 1，则点 A 到平面 QGC 的距离是（　）

图1

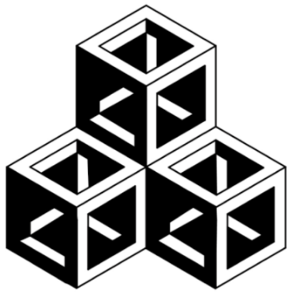


图2

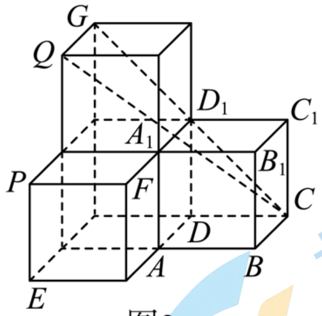


图3

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知直线 $kx-y+2k+1=0$ 与 $x+2y-4=0$ 的交点在第四象限，则实数 k 的取值范围为（　）

A. $(-6,2)$　　B. $\left(-\frac{1}{6},0\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 已知向量 $\vec{a}=(1,-3,2)$，$\vec{b}=(-2,1,1)$，则 $|2\vec{a}+\vec{b}|=$______.

12. 已知直线 x-y-1=0 和圆（x-1）^{2}+y^2=1 交于 A，B 两点，则$|AB|$=________.

13. 点 $A(1,3)$ 关于直线 $x-y+3=0$ 的对称点的坐标为______ .

14. 点 $P(2,-1)$ 到直线 $kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$ 的最大距离为____________.

15. 关于曲线 $C: x^2+y^2=|x|+|y|$，给出下列四个结论：①曲线 C 关于原点对称，也关于 x 轴、y 轴对称；②曲线 C 围成的面积是 $2\pi+2$；③曲线 C 上任意一点到原点的距离者不大于 $\sqrt{2}$；④曲线 C 上的点到原点的距离的最小值为 1.其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0,4)$，$B(-2,6)$，$C(-8,0)$，求：

（1）边 AC 上的中线所在直线的方程；

（2）边 AC 上的高所在直线的方程；

（3）边 AC 的垂直平分线的方程.

17. 已知直线 l_1：$ax-2y+3=0$，l_2：$x+(a-3)y+5a=0$.

（1）当 a=1 时，求两直线的距离；

（2）若 $l_1\perp l_2$.求 a 的值；

（3）写出原点到直线 l_1 的距离，并求出该距离的最大值.

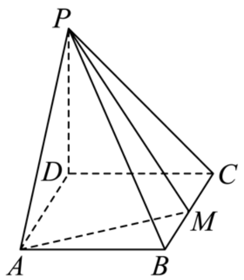
18. 已知圆 C 经过坐标原点 O 和点 $(2,2)$，且圆心在 x 轴上.

（1）求圆 C 的标准方程；

（2）设直线l经过点$\left(1,2\right)$，且l与圆C相交所得弦长为$2\sqrt{3}$，求直线l的一般式方程；

（3）求过点$P\left(4,3\right)$与圆C相切的直线方程.

19. 如图，四棱锥$P-ABCD$的底面是矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，$PD=DC=1$，$AD=2$，M为BC的中点



（1）求证：$AD\perp PC$

（2）求直线PB与平面PAM所成角的正弦值

（3）求平面PAM与平面PCD的夹角的余弦值

20. 已知圆C经过坐标原点O，圆心在x轴正半轴上，且与直线$3x+4y-8=0$相切.

（1）求圆C的标准方程；

（2）直线$l:y=kx+2$与圆C交于A，B两点.

①求k的取值范围；

②证明：直线OA与直线OB的斜率之和为定值.

21. 已知M、N是圆$O:x^2+y^2=16$上两个不同的动点，Q是线段MN的中点，点$P\left(2,0\right)$满足$\angle MPN=90^\circ$.

（1）当M的坐标为$\left(4,0\right)$时，求N的坐标；

（2）求点Q的轨迹方程；

（3）求$\left|MN\right|$的最小值与最大值.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，共 40.0 分）

1.【答案】B

【分析】根据两点斜率公式即可求出.

【详解】经过 $A(-2,0),B(-5,3)$ 两点的直线的斜率是 $\dfrac{0-3}{-2-(-5)}=-1$.

故选：B

2.【答案】A

【分析】依题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，根据数量积的坐标表示得到方程，解得即可.

【详解】解：因为 $\vec{a}=(m,2,1)$，$\vec{b}=(-1,0,4)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-m+4=0$，解得 $m=4$.

故选：A

3.【答案】D

【分析】根据两圆外切关系，圆心距离等于半径的和列方程求参数 r.

【详解】由题设，两圆圆心分别为 $(0,0)$、$(3,4)$，半径分别为 1、r，

$\therefore$ 由外切关系知：$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=r+1$，可得 $r=4$.

故选：D.

4.【答案】C

【分析】本题首先根据圆的一般式方程可知 $D^2+E^2-4F>0$，再根据题意即可列出不等式 $4+1-4m>0$，最后通过计算得出结果.

【详解】由圆的一般式方程可得 $D^2+E^2-4F>0$，即 $4+1-4m>0$，解得 $m<\dfrac{5}{4}$，故选 C.

【点睛】本题考查的是圆的相关性质，对圆的一般式方程的性质的了解是解决本题的关键，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 想要表示圆，则需要满足 $D^2+E^2-4F>0$，是简单题.

5.【答案】A

【详解】$\because$ 当 a=1 时，直线 l_1：$x+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+2y+4=0$，

两条直线的斜率都是 $-\dfrac{1}{2}$，截距不相等，得到两条直线平行，

故前者是后者的充分条件，

$\because$ 当两条直线平行时，得到 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{a+1}\neq\dfrac{-1}{4}$，

解得 $a=-2$，$a=1$，

$\therefore$ 后者不能推出前者，

∴前者是后者的充分不必要条件.

故选 A.

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断；直线的一般式方程与直线的平行关系.

6.【答案】B

【分析】利用截距式的几何意义得到 $A(4,0)$， $B(0,2)$，从而求得该圆的圆心与半径，进而得解.

【详解】因为直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 在 x，y 轴上的截距分别为 4，2，则 $A(4,0)$， $B(0,2)$，

所以 AB 的中点坐标为 $(2,1)$，且 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\times\sqrt{16+4}=\sqrt{5}$，

故以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，即 $x^2+y^2-4x-2y=0$.

故选：B.

7.【答案】A

【分析】由题方程化为椭圆的标准方程求出 c，则椭圆的焦点坐标可求.

【详解】由题得方程可化为，$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

所以 $a^2=4,b^2=2,c^2=4-2=2$

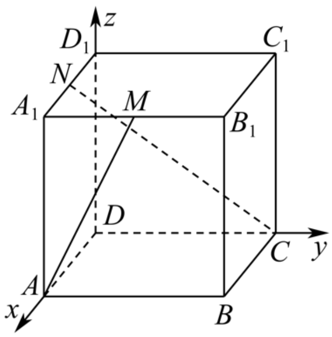
所以焦点为 $(\pm\sqrt{2},0)$

故选：A.

8.【答案】D

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量的夹角公式即可求解.

【详解】以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，



建立空间直角坐标系，设正方体的棱长为 4，所以 $A(4,0,0)$，$M(4,2,4)$，

$N(2,0,4),C(0,4,0)$，所以 $\overrightarrow{AM}=(0,2,4),\overrightarrow{CN}=(2,-4,4)$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=0-8+16=8$，

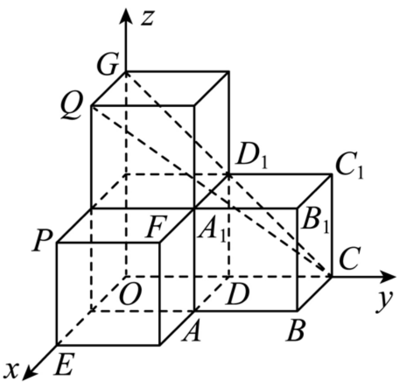
所以 $\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CN}>=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{CN}|}=\frac{8}{\sqrt{20}\times\sqrt{36}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$，

故选：D.

9.【答案】C

【分析】建立空间直角坐标系，求平面QGC的法向量，用点到平面的距离公式计算即可.

【详解】建立空间直角坐标系如图所示：



则$C(0,2,0)$，$Q(1,0,2)$，$G(0,0,2)$，$A(1,1,0)$，$\overrightarrow{QC}=(-1,2,-2)$，$\overrightarrow{QG}=(-1,0,0),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，

设平面QGC的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{QC}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{QG}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x=0\\-x+2y-2z=0\end{cases}$，则平面$QGC$的一个法向量为$\vec{n}=(0,1,1)$，

则点A到平面QGC的距离$d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C

10.【答案】C

【分析】先求出两直线的交点，再解不等式组$\begin{cases}\dfrac{2-4k}{2k+1}>0,\\\dfrac{6k+1}{2k+1}<0,\end{cases}$即得解.

【详解】联立$\begin{cases}kx-y+2k+1=0,\\x+2y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{2-4k}{2k+1},\\y=\dfrac{6k+1}{2k+1},\end{cases}$，

由直线$kx-y+2k+1=0$与$x+2y-4=0$的交点在第四象限可得$\begin{cases}x=\dfrac{2-4k}{2k+1}>0,\\y=\dfrac{6k+1}{2k+1}<0,\end{cases}$，

解得$-\dfrac{1}{2}<k<-\dfrac{1}{6}$，即实数$k$的取值范围为$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}\right)$.

故选：C.

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11.【答案】$5\sqrt{2}$

【分析】

将向量相加求模即可.

【详解】由题，$2\vec{a}+\vec{b}=2(1,-3,2)+(-2,1,1)=(2,-6,4)+(-2,1,1)=(0,-5,5)$

所以$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

故答案为：$5\sqrt{2}$.

12.【答案】2

【分析】首先确定圆心到直线的距离，然后求解弦长即可.

【详解】圆（x-1）^{2}+y^2=1 的半径 r=1，圆心（1,0）

圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|1-0-1|}{\sqrt{2}}=0$，则直线经过圆的圆心，

所以弦长$|AB|=2r=2$.

故答案为：2.

13.【答案】$(0,4)$

【分析】设点 $P\left(x_0,\ y_0\right)$，根据线段 AP 的中点在直线上以及斜率得出方程组，解方程组即可得出点 P 的坐标.

【详解】设点 $P\left(x_0,\ y_0\right)$是点 $A(1,3)$ 关于直线 $x-y+3=0$ 的对称点.

由已知直线 $x-y+3=0$ 的斜率为 1，所以$\begin{cases}\dfrac{x_0+1}{2}-\dfrac{y_0+3}{2}+3=0\\ k_{AP}=\dfrac{y_0-3}{x_0-1}=-1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x_0=0\\ y_0=4\end{cases}$，所以点 $P(0,4)$.

故答案为：$(0,4)$.

14.【答案】$2\sqrt{5}$

【分析】根据题意可知：直线 $kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$ 过定点 $(-2,1)$，由条件可知：点 $P(2,-1)$ 到直线 $kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$ 的最大距离就是点 $P(2,-1)$ 到定点的距离，利用两点间距离公式即可求解.

【详解】因为直线方程 $kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$ 可化为 $k(x+2)-(y-1)=0(x\in\mathbf{R})$，

不论 k 取何值，直线都过$\begin{cases}x+2=0\\ y-1=0\end{cases}$，即点 $(-2,1)$，

由题意可知：点 $P(2,-1)$ 到直线 $kx-y+1+2k=0(k\in\mathbf{R})$ 的最大距离就是点 $P(2,-1)$ 到定点 $(-2,1)$ 的距离，由两点间距离公式可得：

$d_{\max}=\sqrt{(2+2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$.

15.【答案】①③④

【分析】画出曲线C的图象，根据对称性、面积、图象等知识确定正确答案.

【详解】曲线$C: x^2+y^2=|x|+|y|$，

则$x\geq 0, y\geq 0$时，$x^2+y^2=x+y, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

$x<0, y\geq 0$时，$x^2+y^2=-x+y, \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

$x\geq 0, y<0$时，$x^2+y^2=x-y, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

当$x<0, y<0$时，$x^2+y^2=-x-y, \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

由此画出曲线C的图象如下图所示，

由图可知：

曲线C关于原点对称，也关于x轴、y轴对称，①正确.

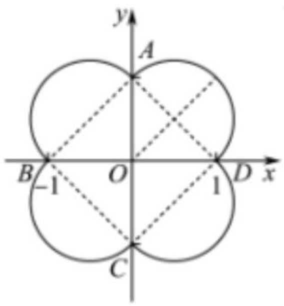
曲线C围成的面积是$4\times\left(\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\pi+2$，②错误.

曲线C上任意一点到原点的距离者不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，③正确

曲线C上的点到原点的距离的最小值为1，即$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=1$，

所以④正确.

故答案为：①③④.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 85.0 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）$2x-y+10=0$

（2）$2x+y-2=0$

（3）$2x+y+6=0$

【分析】（1）根据中点坐标公式得到$D(-4,2)$，然后根据点斜式求直线方程即可；

（2）根据两直线垂直时斜率相乘为-1得到边 AC 上高的斜率为-2，然后写直线方程即可；

（3）由（1）（2）得 AC 的垂直平分线的斜率为-2，过点 $(-4,2)$，然后写直线方程即可.

【小问1详解】

设 AC 中点为 D，所以 $D\left(\frac{0-8}{2},\frac{4+0}{2}\right)$，即 $D(-4,2)$，

所以 $k_{BD}=\frac{6-2}{-2-(-4)}=2$，直线 BD： $y-2=2(x+4)$，即 $2x-y+10=0$，

所以边 AC 上的中线所在的直线方程为 $2x-y+10=0$.

【小问2详解】

由题意得 $k_{AC}=\frac{0-4}{-8-0}=\frac{1}{2}$，所以边 AC 上高的斜率为-2，

所以边 AC 上高所在直线的方程为：$y-6=-2(x+2)$，即 $2x+y-2=0$.

【小问3详解】

由（2）得 AC 的垂直平分线的斜率为-2，

由（1）得 AC 的垂直平分线过点 $(-4,2)$，

所以 AC 的垂直平分线的方程为：$y-2=-2(x+4)$，即 $2x+y+6=0$.

17.【答案】（1）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

（2）$a=6$

（3）$d=\frac{3}{\sqrt{a^2+4}}$；$d_{\max}=\frac{3}{2}$

【分析】（1）利用两平行线间的距离公式求解即可；

（2）利用两直线垂直时斜率的关系求解即可；

（3）先利用点到直线的距离公式，再分析最小值即可求解

【小问1详解】

当 a=1时，l_1：$x-2y+3=0$，l_2：$x-2y+5=0$，

所以两直线的距离为 $\frac{|3-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

【小问2详解】

若 $l_1\perp l_2$，

则 $a\times1+(-2)\times(a-3)=0$，

解得 $a=6$；

【小问3详解】

原点到直线l_1的距离为

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{a^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{a^2+4}},$$

当$a=0$时，$d_{\max}=\frac{3}{2}$

18.【答案】(1) $(x-2)^2+y^2=4$；

(2) $x-1=0$和$3x+4y-11=0$；

(3) $x-4=0$和$5x-12y+16=0$.

【分析】(1) 设圆心$(a,0)$，则圆心到$(0,0)$与$(2,2)$距离相同且等于半径，由此求出$a=2$，进而求出圆C的方程.

(2) 分别研究斜率存在与斜率不存在时两种情况：当斜率不存在时，直线为$x=1$，符合要求；当斜率存在时，设直线l为$kx-y+2-k=0$，则圆心到直线的距离$d=\frac{|2k+2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，再结合弦长公式即可求出$k$的值，由此能出直线$l$的方程.

(3) 根据题意，分直线斜率存在与不存在讨论，由直线与圆相切可得$d=r$，列出方程，即可得到结果.

【小问1详解】

设圆心$(a,0)$，则圆心到$(0,0)$与$(2,2)$距离相同且等于半径，

所以$r^2=a^2=(2-a)^2+2^2$，解得$a=2$，

所以圆心为$(2,0)$，半径$r=2$，

所以圆C的方程为$(x-2)^2+y^2=4$.

【小问2详解】

当斜率存在时，设直线l为$y-2=k(x-1)$，整理得$kx-y+2-k=0$，

则圆心到直线的距离$d=\frac{|2k+2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，①

又因为$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-d^2}=2\sqrt{3}$，解得$d=1$，②

由①②解得：$k=-\frac{3}{4}$，

所以直线方程为$-\frac{3}{4}x-y+2+\frac{3}{4}=0$，整理得$3x+4y-11=0$；

当斜率不存在时，直线为$x=1$，此时圆心到直线的距离$d=1$，

所以其弦长为$2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，符合题意.

综上，所求直线方程为 $x-1=0$ 和 $3x+4y-11=0$.

【小问 3 详解】

当斜率存在时，设直线 l 为 $y-3=k(x-4)$，整理得 $kx-y+3-4k=0$，

则圆心 $(2,0)$ 到直线的距离 $d=\dfrac{|2k+3-4k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=r=2$，解得：$k=\dfrac{5}{12}$，

所以直线方程为 $\dfrac{5}{12}x-y+3-\dfrac{5}{3}=0$，整理得 $5x-12y+16=0$；

当斜率不存在时，直线为 $x=4$；

综上，所求直线方程为 $x-4=0$ 和 $5x-12y+16=0$.

19.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{1}{6}$

（3）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

【分析】（1）建立空间直角坐标系，利用空间向量垂直的坐标公式计算得向量垂直，从而证明线线垂直；

（2）利用空间向量线面角公式进行求解即可；

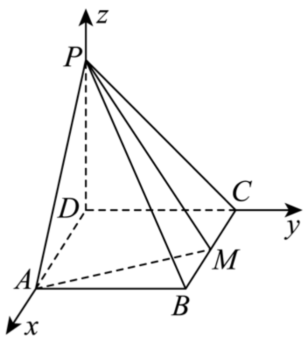
（3）利用面面角的向量求法进行求解即可；

【小问 1 详解】

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 DA，DC，DP 两两垂直，

以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x、y、z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $D(0,0,0)$、$P(0,0,1)$、$B(2,1,0)$、$M(1,1,0)$、$A(2,0,0)$、$C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AD}=0\times(-2)+1\times0+(-1)\times0=0$，

所以 $AD\perp PC$，得证；

【小问 2 详解】

设平面 PAM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{AM}=(-1,1,0)$，

由 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2x+z=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-x+y=0 \end{cases}$，取 $y=1$，可得 $\vec{n}=(1,1,2)$，又 $\overrightarrow{PB}=(2,1,-1)$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{PB},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{6}$，

所以直线 PB 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{6}$.

【小问 3 详解】

易知平面 PCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，

设平面 PAM 与平面 PCD 的夹角为 $\beta\left(\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$，

则 $\cos\beta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

所以平面 PAM 与平面 PCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

20.【答案】（1）$(x-1)^2+y^2=1$；（2）（i）$\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)$；（ii）具体见解析.

【分析】（1）设出圆心，进而根据题意得到半径，然后根据圆与直线相切求出圆心，最后得到答案；

（2）（ⅰ）联立直线方程和圆的方程并化简，根据判别式大于零即可得到答案；

（ii）设出两点坐标，进而通过根与系数的关系与坐标公式进行化简，即可得到答案.

【详解】（1）由题意，设圆心为 $C(a,0)(a>0)$，因为圆 C 过原点，所以半径 $r=a$，

又圆 C 与直线 $3x+4y-8=0$ 相切，所以圆心 C 到直线的距离 $d=\dfrac{|3a-8|}{5}=a\Rightarrow a=1$（负值舍去），所以圆 C 的标准方程为：$(x-1)^2+y^2=1$.

（2）（ⅰ）将直线 l 代入圆的方程可得：$(k^2+1)x^2+(4k-2)x+4=0$，因为有两个交点，

所以 $\Delta=(4k-2)^2-16(k^2+1)>0\Rightarrow k<-\dfrac{3}{4}$，即 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)$.

（ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{4k-2}{k^2+1} \\ x_1+x_2=\dfrac{4}{k^2+1} \end{cases}$，

所以 $k_{OA}+k_{OB}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{kx_1+2}{x_1}+\dfrac{kx_2+2}{x_2}=\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}+2k=\dfrac{-2\cdot\dfrac{4k-2}{k^2+1}}{\dfrac{4}{k^2+1}}+2k=1$.

即直线 OA,OB 斜率之和为定值.

21.【答案】（1）$\left(2,-2\sqrt{3}\right)$或$\left(2,2\sqrt{3}\right)$

（2）$\left(x-1\right)^2+y^2=7$

（3）$|MN|$的最小值为$2\sqrt{7}-2$，最大值为$2\sqrt{7}+2$

【分析】（1）分析可知点N的横坐标为2，将$x=2$代入圆O的方程，可求得点N的坐标；

（2）分析可知$|MQ|=|PQ|$，利用两点间的距离公式、勾股定理化简可得出点Q的轨迹方程；

（3）利用圆的几何性质求出$|PQ|$的最小值和最大值，结合$|MN|=2|PQ|$可求得结果.

【小问 1 详解】

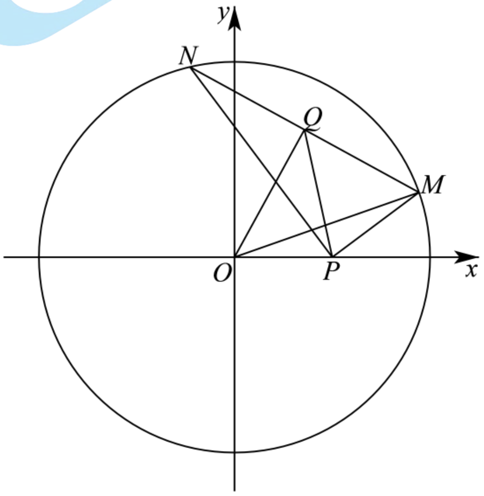
解：由题意可知，$PN\perp MP$，而直线MP为x轴，所以点N的横坐标为2，

将$x=2$代入圆O的方程可得$y=\pm2\sqrt{3}$，此时点N的坐标为$\left(2,-2\sqrt{3}\right)$或$\left(2,2\sqrt{3}\right)$.

【小问 2 详解】

解：设点$Q\left(x,y\right)$，因为$\angle MPN=90^\circ$，Q为MN的中点，则$|PQ|=\dfrac{1}{2}|MN|$，

连接OQ，则$OQ\perp MN$，且$|MQ|=\dfrac{1}{2}|MN|=\sqrt{|OM|^2-|OQ|^2}=|PQ|$，



所以，$\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}=\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}$，整理可得$\left(x-1\right)^2+y^2=7$，

因此，点Q的轨迹方程为$\left(x-1\right)^2+y^2=7$.

【小问 3 详解】

解：因为$\left(2-1\right)^2+0^2<7$，则点P在圆$\left(x-1\right)^2+y^2=7$内，

记圆$\left(x-1\right)^2+y^2=7$的圆心为E，半径为$r=\sqrt{7}$，则$|PE|=1$，

则$r-|PE|\le|PQ|\le r+|PE|$，即$\sqrt{7}-1\le|PQ|\le\sqrt{7}+1$，

所以，当点Q为圆$\left(x-1\right)^2+y^2=7$与x轴的负半轴的交点时，$|PQ|$取最大值，

当点 Q 为圆 $(x-1)^2+y^2=7$ 与 x 轴正半轴的交点时，$|PQ|$ 取最小值，

所以，$|MN|=2|PQ|\in\left[2\sqrt{7}-2,2\sqrt{7}+2\right]$.

因此，$|MN|$ 的最小值为 $2\sqrt{7}-2$，最大值为 $2\sqrt{7}+2$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！