

2021 北京首都师大附中高二（上）期末

数 学

一、单选题(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的)

1. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = -1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $x \pm 2y = 0$ B. $2x \pm y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

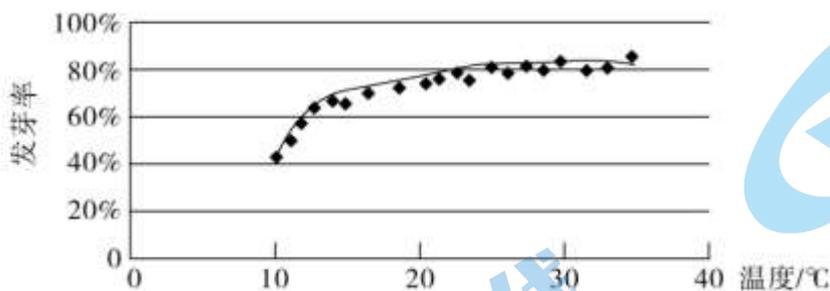
2. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列，且 $a_1 + a_9 = a_{10}$ ，则 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_9}{a_{10}} = ()$

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. 9 D. 5

3. 在 $(2x-1)^8$ 的展开式中，下列说法错误的是 ()

- A. 展开式中所有项的系数和为 2^8
B. 展开式中所有奇数项的二项式系数和为 128
C. 展开式中二项式系数的最大项为第五项
D. 展开式中含 x^3 项的系数为 -448

4. 某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率 y 和温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的关系，在 20 个不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 20)$ 得到下面的散点图:



由此散点图，在 10°C 至 40°C 之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率 y 和温度 x 的回归方程类型的是 ()

- A. $y = a + bx$ B. $y = a + bx^2$
C. $y = a + be^x$ D. $y = a + b \ln x$

5. 若 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则对于 $k \in \mathbb{N}^*$ ， $f(k+1) - f(k) = ()$

A. $\frac{1}{3k+4}$

B. $\frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$

C. $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$

D. $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+3}$

6. 将编号为1、2、3、4、5的5个小球全部放入A、B、C三个盒子内，若每个盒子不空，且放在同一个盒子内的小球编号不相连，则不同的方法总数有（ ）

A. 42

B. 36

C. 48

D. 60

7. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(4, p)$ ，其期望 $E(X) = 3$ ，随机变量 Y 服从正态分布 $N(1, 2)$ ，若

$P(Y > 0) = p$ ，则 $P(0 < Y < 2) =$ ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

8. 袋中有4个黑球，3个白球.现掷一枚均匀的骰子，掷出几点就从袋中取出几个球.若已知取出的球全是白球，则掷出2点的概率为（ ）

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{5}{21}$

D. $\frac{5}{23}$

9. 洛书，古称龟书，是阴阳五行术数之源，被世界公认为组合数学的鼻祖，它是中华民族对人类的伟大贡献之一。

在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有图1：“以五居中，五方白圈皆阳数，四隅黑点为阴数”，这就是最早的三阶幻方，按照上述说法，将1到9这九个数字，填在如图2所示的九宫格里，九宫格的中间填5，四个角填偶数，其余位置填奇数。则每一横行、每一竖列以及两条对角线上3个数字的和都等于15的概率是（ ）

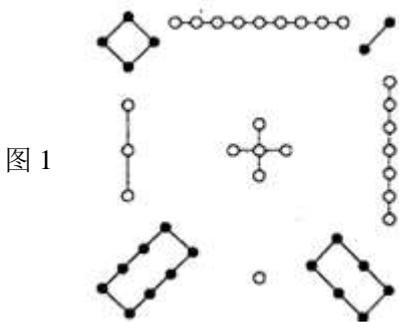


图1

图2



A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{72}$

D. $\frac{1}{144}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{3}{2}$ ， $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ ，下列说法正确的是（ ）

A. 存在正整数 k ，使得 $a_k = \frac{3}{4}$

B. 存在正整数 k ，使得 $a_k = 3$

C. 对任意正整数 k ，都有 $1 < a_k < 2$

D. 数列 $\{a_n\}$ 单调递增

二、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

11. $(2x - \frac{1}{x})^4$ 展开式中的常数项是_____.

12. 数列 $1, 1+2, 1+2+4, \dots, 1+2+4+\dots+2^{n-1}, \dots$ 的前 n 项和为_____.

13. 两台机床加工同样的零件, 第一台的不合格品率为 0.04, 第二台的不合格品率为 0.07, 加工出来的零件混放, 并设第一台加工的零件数是第二台加工零件的 2 倍, 现任取一零件, 则它是合格品的概率为_____.

14. 已知直线 $l_1: x + (a-2)y - 1 = 0$, $l_2: (a-2)x + ay - 2 = 0$, 若 $l_1 // l_2$, a 的值为_____.

15. 从 0、1、2、3、4、5 中选出四个数, 组成没有重复数字的四位数, 其中偶数有_____个.

16. 现有 5 名教师要带 3 个兴趣小组外出学习考察, 要求每个兴趣小组都有带队教师, 且带队教师至多 2 人, 但其中甲教师和乙教师均不能单独带队, 则不同的带队方案有_____种.(用数字作答)

17. 世界排球比赛一般实行“五局三胜制”, 在 2019 年第 13 届世界女排俱乐部锦标赛(俗称世俱杯)中, 中国女排和某国女排相遇, 根据历年数据统计可知, 在中国女排和该国女排的比赛中, 每场比赛中国女排获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 该国女排获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 现中国女排在先胜一局的情况下获胜的概率为_____.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a (0 < a \leq 2)$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 (a_n > 2) \\ -a_n + 3 (a_n \leq 2) \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 若 $S_n = 2017$, 则 $a =$ _____, $n =$ _____.

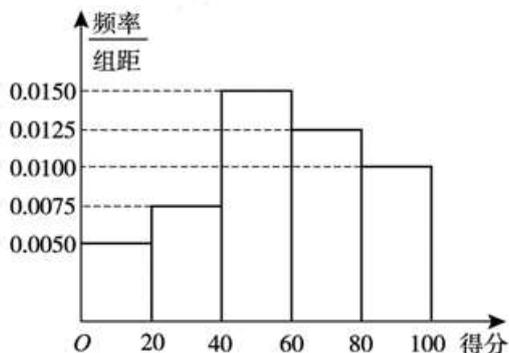
三、解答题(本大题共 4 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, 且 $a_1 + 1, a_2 + 3, a_3 + 9$ 构成等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 某学校组织了垃圾分类知识竞赛活动. 设置了四个箱子, 分别写有“厨余垃圾”、“有害垃圾”、“可回收物”、“其它垃圾”; 另有卡片若干张, 每张卡片上写有一种垃圾的名称. 每位参赛选手从所有卡片中随机抽取 20 张, 按照自己的判断, 将每张卡片放入对应的箱子中. 按规则, 每正确投放一张卡片得 5 分, 投放错误得 0 分. 比如将写有“废电池”的卡片放入写有“有害垃圾”的箱子, 得 5 分, 放入其它箱子, 得 0 分. 从所有参赛选手中随机抽取 20 人, 将他们的得分按照 $[0, 20], (20, 40], (40, 60], (60, 80], (80, 100]$ 分组, 绘成频率分布直方图如图:



- (1) 分别求出所抽取的 20 人中得分落在组 $[0, 20]$ 和 $(20, 40]$ 内的人数;
- (2) 从所抽取 20 人中得分落在组 $[0, 40]$ 的选手中随机选取 3 名选手, 以 X 表示这 3 名选手中得分不超过 20 分的人数, 求 X 的分布列和数学期望;
- (3) 如果某选手将抽到的 20 张卡片逐一随机放入四个箱子, 能否认为该选手不会得到 100 分? 请说明理由.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + \sqrt{6} = 0$ 相切.

- (I) 求椭圆方程;
- (II) 设 S 为椭圆右顶点, 过椭圆 C 的右焦点的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点 (异于 S), 直线 PS, QS 分别交直线 $x = 4$ 于 A, B 两点. 求证: A, B 两点的纵坐标之积为定值.

22. 已知无穷递增数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$ 且对任意 $k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*$, 存在 $j (j \in \mathbf{N}^*, j < k)$, 使得:

$$a_{k+1} = a_k + a_j$$

- (1) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 求 q 的值.
- (2) 若 $a_2 = 2$, 求 a_{2020} 的最小值.
- (3) 若 $a_2 = 2$, 且 $a_m = 100$, 求 m 最小值.

2021 北京首都师大附中高二（上）期末数学

参考答案

一、单选题(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的)

1. 【答案】A

2. 【答案】B

3. 【答案】A

4. 【答案】D

5. 【答案】D

6. 【答案】A

7. 【答案】D

8. 【答案】C

9. 【答案】C

10. 【答案】C

二、填空题(本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分)

11. 【答案】24

12. 【答案】 $2^{n+1} - 2 - n$

13. 【答案】0.95

14. 【答案】1

15. 【答案】156

16. 【答案】54

17. 【答案】 $\frac{8}{9}$

18. 【答案】①. 1; ②. 1345.

三、解答题(本大题共 4 小题，共 48 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

19. 【答案】(1) $a_n = 2n + 1$, $b_n = 2^{n+1}$; (2) $T_n = (2n - 1)2^{n+2} + 4$.

20. 【答案】(1) 抽取 20 人中得分落在组 $[0, 20]$ 的人数有 2 人，得分落在组 $(20, 40]$ 的人数有 3 人；(2) 分布列见解析，1.2；(3) 答案不唯一，具体见解析.

21. 【答案】 (I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (II) 详见解析.

22. 【答案】 (1) $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; (2) 最小值为 2020; (3) 最小值为 11.



北京高考在线
www.gkzxx.com



北京高考在线
www.gkzxx.com



北京高考在线
www.gkzxx.com



北京高考在线
www.gkzxx.com

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjgkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018