高三数学考试

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：导数，三角函数与解三角形，平面向量，复数，数列，立体几何初步。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(6,2-x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$

A. $\frac{5}{4}$　　B. -2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n+1$，则 $a_3=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3. 已知 α 为第一象限角，$1+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=2\sin(\pi-\alpha)$，则 $\sin 2\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

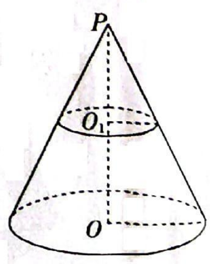
4. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=2AD=2CD$，点 E 是线段 CD 的中点，则异面直线 D_1E 与 BC_1 所成角的余弦值为

A. $\frac{8\sqrt{85}}{85}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{85}}{85}$

5. 已知函数 $f(x)=x^3+x^2-x+2$，若关于 x 的方程 $f(x)=2m-1$ 有 3 个不同的根，则 m 的取值范围为

A. $(\frac{65}{27},3)$　　B. $(2,3)$　　C. $(\frac{38}{27},2)$　　D. $(-1,2)$

6. 如图，在圆锥 PO 中，用一个平行于底面的平面去截圆锥 PO，可得一个圆锥 PO_1 和一个圆台 O_1O，若圆锥 PO_1 的体积是圆锥 PO 体积的 $\frac{1}{8}$，则圆锥 PO_1 与圆台 O_1O 的侧面积的比值为



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

7. 设$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，S_n 为其前 n 项和，若$\{nS_n\}$为递增数列，则 a_1 的取值范围是

A. $(-\frac{4}{3},+\infty)$　　B. $(1-\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty)$　　C. $[-\frac{1}{2},+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

8. 已知函数 $f(x)=\sin x-2ax-ax\cos x$，$\forall x\geqslant 0$，$f(x)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是

A. $[\frac{1}{4},+\infty)$　　B. $(0,\frac{1}{4}]$　　C. $[\frac{1}{3},+\infty)$　　D. $(0,\frac{1}{3}]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $z(2+\mathrm{i})=\mathrm{i}^2$，则下列说法正确的是

A. z 在复平面内对应的点的坐标为$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$

B. $\bar{z}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$

C. z 在复平面内对应的点与点$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$关于原点对称

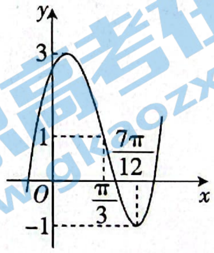
D. $|z|=\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{3}{x}+f'(-1)\cdot x^2+1$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则

A. $f'(-1)=1$　　B. $f'(1)=-5$

C. $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减　　D. $f(1)=3$

11. 如图，这是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象，则



A. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$

B. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$

C. $f(x)=1-2\cos(2x+\frac{5\pi}{6})$

D. $f(x)=1-2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

12. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现了这样一个数列：1，1，2，3，5，8，…. 这个数列的前两项均是 1，从第三项开始，每一项都等于前两项之和. 人们把这样的一列数组成的数列$\{F_n\}$称为斐波那契数列. 现将数列$\{F_n\}$中的各项除以 3 所得余数按原顺序构成的数列记为$\{G_n\}$，则下列说法正确的是

A. $\sum_{i=1}^{2024}F_i=F_{2026}-1$　　B. $\sum_{i=1}^{2024}F_i^2=F_{2023}F_{2024}$

C. $G_{2024}=0$　　D. $\sum_{i=1}^{2024}G_i=2277$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-2$，则$|\boldsymbol{b}|=$____▲____.

14. 若 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$，则 $\tan\theta=$____▲____.

15. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的前 n 和为 S_n，若 $S_3=13$，且 $a_5=a_4+6a_3$，则满足 $S_n<123$ 的 n 的最大值为____▲____.

16. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AA_1\perp$平面 ABC，$BC=3$，$AA_1=8$，$\angle BAC=30°$，则该三棱柱外接球的表面积为____▲____.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=3\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\sin^2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega>0)$.

(1)若 $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{6})|$，求 ω 的取值集合；

(2)若 $\omega=1$，求 $f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

18.（12 分）

记$\triangle ABC$ 的内角的 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$.

(1)求 B；

(2)若 $c=3, b=\sqrt{13}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-2$，数列$\{b_n\}$为等差数列，$b_3+b_4+b_5=21$，$b_6=11$.

(1)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

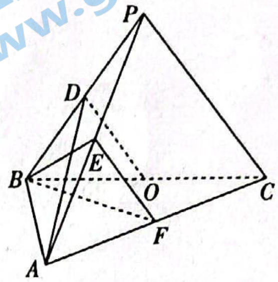
(2)求数列$\{\frac{b_n}{a_n}\}$的前 n 项和 T_n.

20. (12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$AB\perp BC$,$AB=2$,$BC=2\sqrt{2}$,$\triangle PBC$ 为等边三角形,BP,AP,BC 的中点分别为 D,E,O,且 $AD=\sqrt{3}DO$.

(1)证明:平面 $ABC\perp$平面 PBC.

(2)若 F 为 AC 的中点,求点 C 到平面 BEF 的距离.



21. (12 分)

设函数 $f(x)=x^2-8x+2\ln x$.

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)若正数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=7$,证明:$x_1+x_2\geqslant 9$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^{4x-1}-4a\ln(2x)$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$处的切线方程;

(2)当 $a>0$ 时,若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a+a\ln(2a)$恒成立,求实数 a 的取值范围.