高三数学考试

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\geqslant0\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{-2\}$　　D. $\{-2,-1\}$

2. 已知 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=$

A. $-4\mathrm{i}$　　B. $4\mathrm{i}$　　C. 2　　D. -2

3. 设 a,b 是实数，则“$a>|b|$”是“$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1(a>3)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $a=$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

5. 已知锐角 α 满足 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin2\alpha=$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

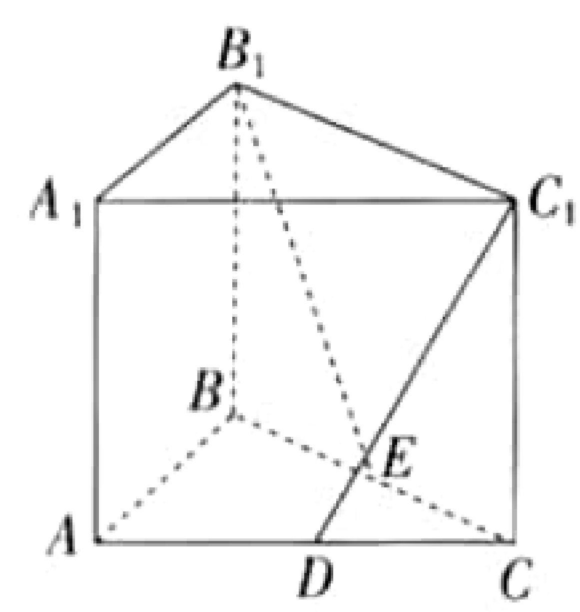
6. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=AA_1$，D,E 分别为 AC,BC 的中点，则异面直线 C_1D 与 B_1E 所成角的余弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

D. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$



7. 在$\triangle ABC$中，点M在线段BC上，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda+\mu=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

8. 已知实数x,y满足$y\ln y=e^{2x}-y\ln(2x)$，则y的最小值为

A. $\frac{1}{e}$　　B. e　　C. $\frac{1}{e^2}$　　D. e^2

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 若甲组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$(数据各不相同)的平均数为3，乙组样本数据$2x_1+a,2x_2+a,\cdots,2x_n+a$的平均数为5，下列说法错误的是

A. a的值不确定

B. 乙组样本数据的方差为甲组样本数据方差的2倍

C. 两组样本数据的极差可能相同

D. 两组样本数据的中位数可能相同

10. 早期人们为了安全传输信息，采用如下加密方法：将26个英文字母$a,b,c,\cdots,x,y,z$依次用整数$0,1,2,\cdots,24,25$代表. 设某个字母用整数X代表，则$3X+1$被26除得到的余数代表的字母就是被加密后的字母，下列说法正确的是

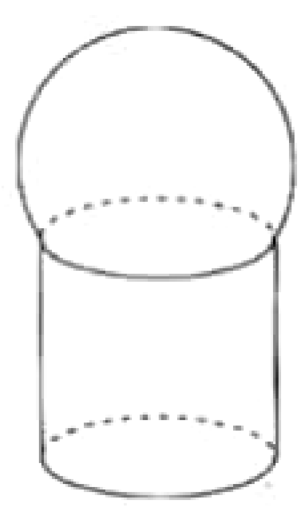
A. 原文ab加密成be

B. 密文be的原文是ab

C. 密文z的原文是j

D. 存在某个字母加密后还是原字母

11. 绿水青山就是金山银山，为响应党的号召，某小区把一处荒地改造成公园进行绿化，在绿化带旁边放置一些砌成的完全相同的石墩，石墩的上部是半径为15 cm的球的一部分，下部是底面半径为12 cm的圆柱体，整个石墩的高为48 cm，如图所示(注：球体被平面所截，截得的部分叫球缺，球缺表面上的点到截面的最大距离为球缺的高. 球缺的体积$V=\frac{1}{3}\pi(3R-h)h^2$，其中$R$为球的半径，$h$为球缺的高)，下列说法正确的是



A. 石墩上、下两部分的高之比为1∶1

B. 石墩表面上两点间距离的最大值为$(6\sqrt{30}+15)$cm

C. 每个石墩的体积为$7488\pi\ \text{cm}^3$

D. 将石墩放置在一个球内，则该球半径的最小值为$\frac{51}{2}$ cm

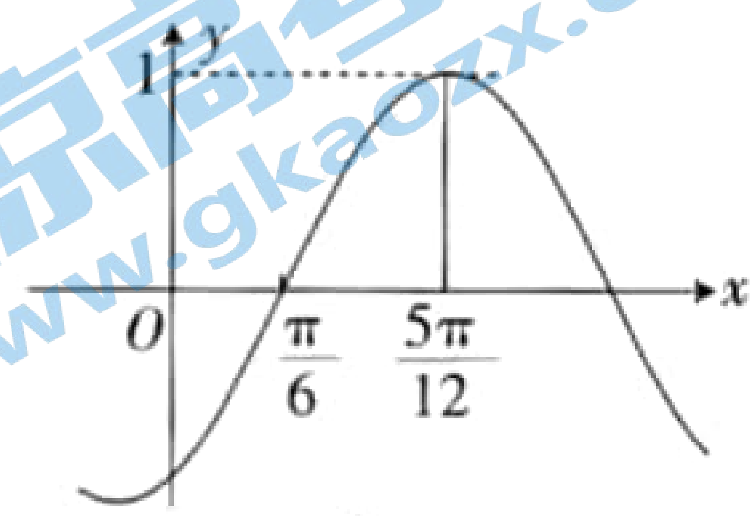
12. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2,x\leq 1,\\ |\log_2(x-1)|,x>1,\end{cases}$若$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3$的值可以是

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. $\frac{16}{3}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知过点 $P(3,3)$ 作圆 $O: x^2+y^2=2$ 的切线，则切线长为__▲__.

14. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $f(0)=$__▲__.



15. 从 5 男 3 女共 8 名学生中选出组长 1 人，副组长 1 人，普通组员 3 人组成 5 人志愿组，要求志愿组中至少有 3 名男生，且组长和副组长性别不同，则共有__▲__种不同的选法.（用数字作答）

16. 已知直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 相切于点 P，且 l 与 C 的两条渐近线 l_1,l_2 分别交于 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 两点，则 $x_1x_2+y_1y_2=$__▲__（用含 a,b 的式子表示）.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=\sqrt{5}$，$a\sin A-1=\cos A$.

(1)求 $\cos A$；

(2)若 $b=3$，求△ABC 的面积 S.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$.

(1)证明：$\{\frac{1}{a_n-1}\}$ 是等差数列.

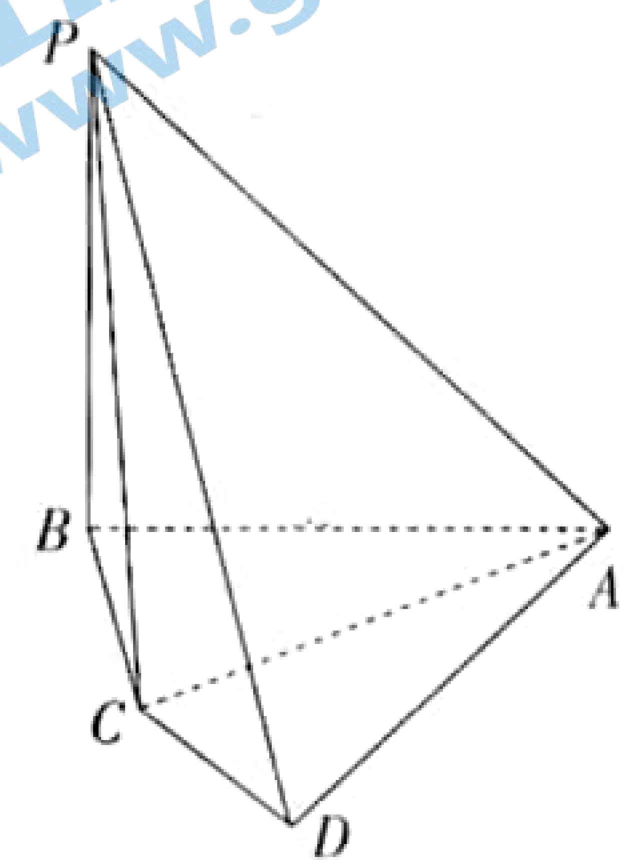
(2)设 $b_n=\frac{1-a_n}{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PB\perp$平面 $ABCD$，$PB=AC=AD=2$，$PA=3BC=3$.

(1)证明：平面 $PAC\perp$平面 PBC.

(2)若 $AD\perp AB$，求平面 PBC 与平面 PAD 夹角的余弦值.



20.（12 分）

小明玩摸球游戏，袋子里面装有形状和大小相同的红球、白球和绿球若干个，每次都是有放回地摸一个球，若首次摸到的是红球，爸爸就奖励小明 2 元，并规定：若连续摸到红球，则下次摸到红球的奖励是上次的两倍；若某次摸到其他球，则该次无奖励，且下次奖金重置为 2 元. 已知小明每次摸到红球的概率是$\frac{1}{3}$，且每次能否摸到红球相互独立.

(1)试问至少要摸几次球，才能使摸到红球的概率不小于$\frac{65}{81}$？

(2)若小明连续摸球 3 次，记获得的总奖金为 X 元，求 $E(X)$.

21.（12 分）

已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，过 F 作斜率为 $k(k>0)$的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，当 $k=\sqrt{2}$时，$|AB|=6$.

(1)求抛物线 C 的标准方程；

(2)设线段 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P，抛物线 C 在 A，B 两点处的切线相交于点 Q，设 P，Q 两点到直线 l 的距离分别为 d_1，d_2，求$\frac{d_1}{d_2}$的值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a(e^x-1)-x^2+x$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若 $a\geq 1$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)+\cos x>1$.

高三数学考试参考答案

1. D　因为 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{-2,-1\}$.

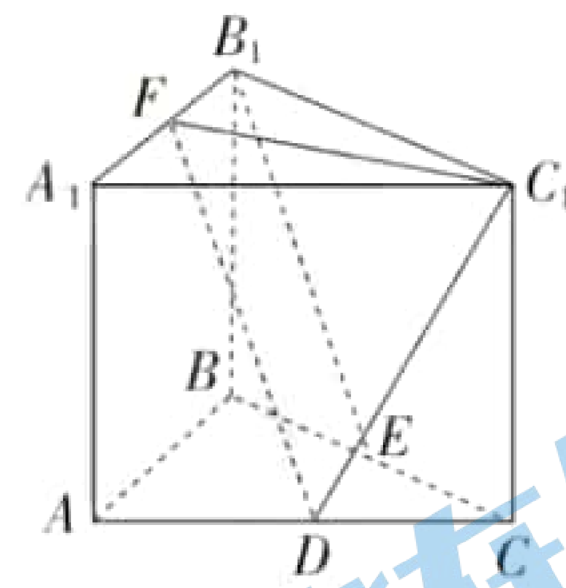
2. B　因为 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，所以 $z-\bar{z}=1+2\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}=4\mathrm{i}$.

3. A　若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$，$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$，若 $\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$，则 $a^2+1>b^2+1$，即 $|a|>|b|$，当 $a<0$ 时，推不出 $a>|b|$，所以“$a>|b|$”是“$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$”的充分不必要条件.

4. B　因为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=1-\dfrac{9}{a^2}$，所以 $a=6$.

5. A　由 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，则 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. D　设 $AB=2$，取 A_1B_1 的中点 F，连接 C_1F，DF，则 $DF/\!/B_1E$，$\angle C_1DF$ 为异面直线 C_1D 与 B_1E 所成的角或补角.



易求 $DF=B_1E=\sqrt{5}$，$C_1F=\sqrt{5}$，$C_1D=\sqrt{6}$，

所以 $\cos\angle C_1DF=\dfrac{\frac{1}{2}C_1D}{DF}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

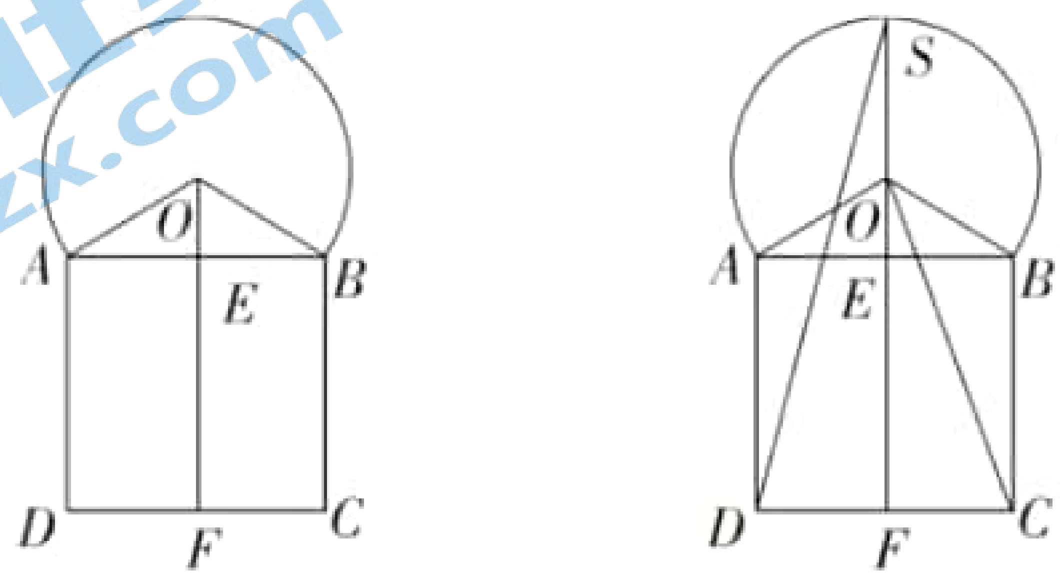
7. C　因为 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}[p\overrightarrow{AB}+(1-p)\overrightarrow{AC}]=\dfrac{2}{3}p\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}(1-p)\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}p$，$\mu=\dfrac{2}{3}(1-p)$，则 $\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$.

8. B　由 $y\ln y=e^{2x}-y\ln(2x)$，得 $y\ln y+y\ln(2x)=e^{2x}(x>0,y>0)$，则 $y\ln(2xy)=e^{2x}$，所以 $2xy\ln(2xy)=2xe^{2x}$，即 $e^{\ln(2xy)}\ln(2xy)=2xe^{2x}$. 设 $f(x)=xe^x(x>0)$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $\ln(2xy)=2x$，则 $2xy=e^{2x}$，即 $y=\dfrac{e^{2x}}{2x}$. 令 $g(x)=\dfrac{e^{2x}}{2x}$，则 $g'(x)=\dfrac{(2x-1)e^{2x}}{2x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上为减函数，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上为增函数，可得 $y_{\min}=g(x)_{\min}=g(\dfrac{1}{2})=e$.

9. ABC　由题意可知，$2\times 3+a=5$，$a=-1$，故 A 错误；易知乙组样本数据的方差为甲组样本数据方差的 $2^2=4$ 倍，故 B 错误；不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则甲组数据的极差为 x_n-x_1，乙组数据的极差为 $(2x_n-1)-(2x_1-1)=2(x_n-x_1)$，所以两组样本数据的极差不同，故 C 错误；设甲组样本数据的中位数为 m，则乙组样本数据的中位数为 $2m-1$，所以两组样本数据的中位数可能相同，故 D 正确.

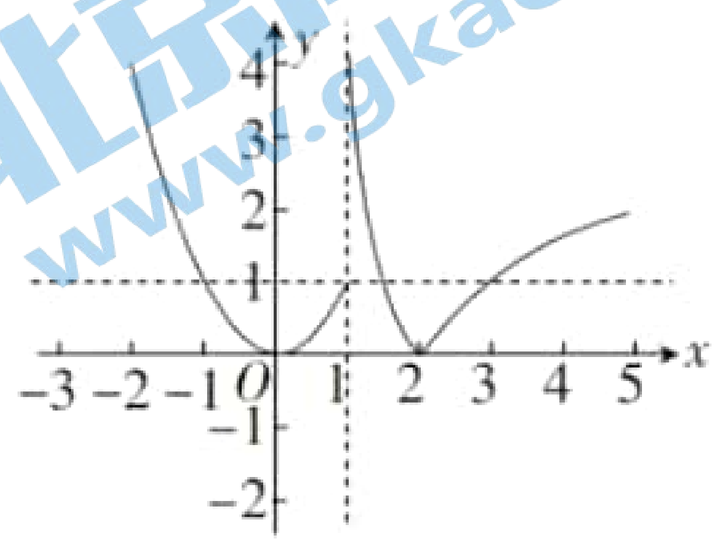
10. AB　原文 a,b 对应的数字分别为 0,1,每个数乘以 3 加 1 后变为数字 1,4,除以 26 得到的余数分别为 1,4,所以密文为 be,A 正确. 假设密文对应的数为 Y,则 $\frac{Y+26k-1}{3}=X$, $k\in\mathbf{N}$,密文 b 对应的 $Y=1$,当 $k=0$ 时,得 $X=0$,原文是 a;密文 e 对应的 $Y=4$,当 $k=0$ 时,得 $X=1$,原文是 b,即密文 be 的原文是 ab,B 正确. 密文为 z,则 $\frac{25+26\times 0-1}{3}=8$,所以原文为 i,C 错误. 假设存在某个字母加密后还是原字母,设这个字母对应的整数为 m, $0\leqslant m\leqslant 25$,则 $3m+1=26k+m$,整理得 $m=13k-\frac{1}{2}$,无整数解,D 错误.

11. ACD　如图,设球缺的球心为 O,由已知可得半径 $R=15$ cm,



$AE=\frac{1}{2}AB=12$ cm,所以 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ cm,所以 $SE=R+OE=24$ cm,A 正确;$OC=\sqrt{33^2+12^2}=3\sqrt{137}$ cm,所以石墩表面上两点间距离的最大值为 $OC+R=(3\sqrt{137}+15)$cm,B 错误;由前面的计算可知上部分球缺的高 $h=24$ cm,所以石墩的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(3\times 15-24)\times 24^2+\pi\times 12^2\times 24=7488\pi$ cm^3,C 正确;设该球的半径为 r,则 $(48-r)^2+12^2=r^2$,解得 $r=\frac{51}{2}$ cm,D 正确.

12. BC　作出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示,设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=t$,由图可知,当 $0<t\leqslant 1$ 时,直线 $y=t$ 与函数 $f(x)$ 的图象有四个交点,交点的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,当 $x>1$ 时,令 $f(x)=|\log_2(x-1)|=1$,解得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=3$.



由图可知,$x_1+x_2=0$, $\frac{3}{2}\leqslant x_3<2$, $2<x_4\leqslant 3$. 由 $f(x_3)=f(x_4)$,可得 $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$,所以 $x_3-1=\frac{1}{x_4-1}$,则有 $x_3=\frac{1}{x_4-1}+1$,所以 $\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3=\frac{4}{x_4+1}+2x_3=\frac{4}{x_4+1}+\frac{2}{x_4-1}+2$.

令 $g(x)=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+2$,易知 $g(x)$ 在 $(2,3]$ 上为减函数,且 $g(2)=\frac{16}{3}$, $g(3)=4$,故 $4\leqslant\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3<\frac{16}{3}$,且 $4\in[4,\frac{16}{3})$, $5\in[4,\frac{16}{3})$.

13. 4　设切点为 C,圆心为 O,则 $|PO|=3\sqrt{2}$, $|PC|=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2}=4$.

14. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　根据图象可以得到 $A=1,T=4\times(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$，所以 $\omega=2,f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 因为 $f(\frac{5\pi}{12})=1$，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3},f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3}),f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. 480　由题意可知，当志愿组有 3 名男生，2 名女生时，有 $C_5^3C_3^2C_3^1C_2^1A_2^2=360$ 种方法；当志愿组有 4 名男生，1 名女生时，有 $C_5^4C_3^1C_4^1A_2^2=120$ 种方法. 共有 $360+120=480$ 种不同的选法.

16. a^2-b^2　设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，切线 $l:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1,l_1:y=\frac{b}{a}x,l_2:y=-\frac{b}{a}x$，联立方程组 $\begin{cases}\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $M(\frac{a^2b}{bx_0-ay_0},\frac{ab^2}{bx_0-ay_0})$，同理可得 $N(\frac{a^2b}{bx_0+ay_0},\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0})$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=a^2-b^2$.

17. 解：(1)由 $a\sin A-1=\cos A$，得 $2a\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}$. ………………………… 1 分

又 $0<A<\pi$，可知 $\cos\frac{A}{2}\neq0$，所以 $\sqrt{5}\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}$. ………………………… 2 分

由 $\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1$，得 $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$， ………………………… 4 分

所以 $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. ………………………… 5 分

(2)由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $5=9+c^2-2\times3c\times\frac{2}{3}$， ………………………… 6 分

整理得 $(c-2)^2=0$， ………………………… 7 分

解得 $c=2$. ………………………… 8 分

又 $\sin A=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$， ………………………… 9 分

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$. ………………………… 10 分

18. (1)证明：因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$，所以 $a_{n+1}-1=\frac{1}{2-a_n}-1=\frac{-1+a_n}{2-a_n}$， ………………………… 2 分

所以 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2-a_n}{a_n-1}=\frac{-(a_n-1)+1}{a_n-1}=-1+\frac{1}{a_n-1}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=-1$， ……… 5 分

所以 $\{\frac{1}{a_n-1}\}$ 是以 -1 为公差的等差数列. ………………………… 6 分

(2)解：由(1)知 $\frac{1}{a_1-1}=-1$，所以 $\frac{1}{a_n-1}=-n$，可得 $a_n=1-\frac{1}{n}$， ………………………… 8 分

所以 $b_n=\frac{1-a_n}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. ………………………… 10 分

故 $T_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ………… 12 分

19. (1)证明：因为 $PB\perp$平面 $ABCD$，所以 $PB\perp AB$. ………… 1 分

在 Rt$\triangle PAB$ 中可求得 $AB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. ………… 2 分

在$\triangle ABC$ 中，因为 $BC=1$，$AC=2$，所以 $AC^2+BC^2=5=AB^2$，

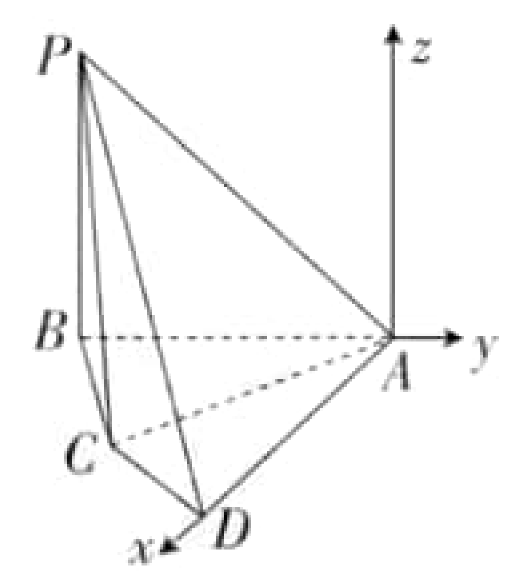
所以 $AC\perp BC$. ………… 3 分

又 $PB\perp$平面 $ABCD$，所以 $AC\perp PB$.

因为 $PB\cap BC=B$，所以 $AC\perp$平面 PBC. ………… 4 分

又 $AC\subset$平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$平面 PBC. ………… 5 分

(2)解：因为 $AB\perp AD$，$PB\perp$平面 $ABCD$，所以分别以$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BP}$的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,-\sqrt{5},2)$，$C(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5},0)$，$D(2,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,-\sqrt{5},2)$. ………… 6 分



由(1)知 $AC\perp$平面 PBC，

所以$\overrightarrow{AC}=(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5},0)$为平面 PBC 的一个法向量. ………… 8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，可得$\begin{cases}2x=0,\\-\sqrt{5}y+2z=0,\end{cases}$

令 $y=2$，得 $\boldsymbol{n}=(0,2,\sqrt{5})$. ………… 10 分

设平面 PBC 与平面 PAD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}|=\frac{4\sqrt{5}}{15}$. ………… 12 分

20. 解：(1)设要摸 n 次球，才能使摸到红球的概率不小于$\frac{65}{81}$.

由题意得 $1-(1-\frac{1}{3})^n\geqslant\frac{65}{81}$， ………… 3 分

所以$(\frac{2}{3})^n\leqslant\frac{16}{81}=(\frac{2}{3})^4$， ………… 4 分

所以 $n\geqslant4$，即至少要摸 4 次球，才能使摸到红球的概率不小于$\frac{65}{81}$. ………… 5 分

(2)由题意可知，X 的可能取值为 0，2，4，6，14.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{3})^3=\frac{8}{27}$， ………… 6 分

$P(X=2)=C_3^1\times(1-\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$， ………… 7 分

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$， ………… 8 分

$P(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$， ………… 9 分

$P(X=14)=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$， ………………………………………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	6	14
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

…………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{4}{9}+4\times\frac{2}{27}+6\times\frac{4}{27}+14\times\frac{1}{27}=\frac{70}{27}$. ………………………………… 12 分

21. 解：(1)当 $k=\sqrt{2}$ 时，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-\frac{p}{2})$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， ……… 1 分

联立方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{2}(x-\frac{p}{2}), \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2px+\frac{p^2}{4}=0$，

所以 $\Delta=4p^2-4\times\frac{p^2}{4}=3p^2$， …………………………………………………………………… 2 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+2}\times\frac{2\sqrt{3}p}{2}=6$， ……………………………………………………………… 3 分

解得 $p=2$， …………………………………………………………………………………………… 4 分

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $F(1,0)$，则 $l: y=k(x-1)$，不妨设 $A(x_1,2\sqrt{x_1})$，$B(x_2,-2\sqrt{x_2})$，线段 AB 的中点为 M，

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$. ………………………………………………………………… 6 分

易得 $M(\frac{k^2+2}{k^2},\frac{2}{k})$，则 AB 的中垂线方程为 $y-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{k^2+2}{k^2})$， ……………… 7 分

令 $y=0$，得 $x=3+\frac{2}{k^2}$，所以 $P(3+\frac{2}{k^2},0)$，

所以 $d_1=\frac{2\sqrt{k^2+1}}{k}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

切线 $QA: y=\frac{x}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}$，$QB: y=-\frac{x}{\sqrt{x_2}}-\sqrt{x_2}$.

联立方程组 $\begin{cases} y=\frac{x}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}, \\ y=-\frac{x}{\sqrt{x_2}}-\sqrt{x_2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-\sqrt{x_1x_2}=-1, \\ y=\sqrt{x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}. \end{cases}$ ………………………… 9 分

由 $k^2x_1^2-(2k^2+4)x_1+k^2=0$，得 $x_1=(\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k})^2$，

所以 $\sqrt{x_1}=\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}$，所以 $y=\sqrt{x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{2}{k}$，即 $Q(-1,\frac{2}{k})$， …………………… 10 分

所以点 Q 到直线 $kx-y-k=0$ 的距离 $d_2=\frac{\left|-k-\frac{2}{k}-k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}$. …………… 11 分

故 $\frac{d_1}{d_2}=1$. ………………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x^2+x-1$，………………………………………… 1 分

则 $f'(x)=e^x-2x+1$，……………………………………………………………… 2 分

$f'(0)=2$，…………………………………………………………………………… 3 分

$f(0)=0$，…………………………………………………………………………… 4 分

故所求切线的方程为 $y=2x$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明：(法一)当 $a\geq1$，$x>0$ 时，要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x^2+x+\cos x>1$，只需证 $e^x-1-x^2+x+\cos x>1$， …………………………………………………… 6 分

即要证 $(e^x-\frac{3}{2}x^2+x)+(\cos x-1+\frac{1}{2}x^2)>1$. ………………………………… 7 分

令 $\varphi(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=x-\sin x>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$. ……………………………… 9 分

令 $g(x)=e^x-\frac{3}{2}x^2+x$，则 $g'(x)=e^x-3x+1$，………………………………… 10 分

令 $h(x)=e^x-3x+1$，则 $h'(x)=e^x-3$，$h(x)$ 在 $(0,\ln 3)$ 上单调递减，在 $[\ln 3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=4-3\ln 3>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=1$.

……………………………………………………………………………………… 11 分

故当 $a\geq1$，$x>0$ 时，$f(x)+\cos x>1$. ………………………………………… 12 分

(法二)当 $a\geq1$，$x>0$ 时，要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x^2+x+\cos x>1$，只需证 $e^x-1-x^2+x+\cos x>1$. ………………………………………………………………… 6 分

令 $F(x)=e^x-1-x^2+x+\cos x(x>0)$，则 $F'(x)=e^x-2x+1-\sin x$， …………… 7 分

易知 $1-\sin x\geq0$，易证 $e^x-2x>0$，所以 $F'(x)>0$，…………………………… 10 分

则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(x)>F(0)=1$，从而 $f(x)+\cos x>1$. …… 12 分