2023 年全国高中数学联合竞赛一试 (A 卷)

一、填空题 (本题共 8 小题，每题 8 分，共 64 分)

1 设复数 $z=9+10i$ (i 为虚数单位) , 若正整数 n 满足 $|z^n|\le 2023$, 则 n 的最大值为 ________.

2 若正实数 a,b 满足 $a^{\lg b}=2, a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}=5$, 则 $(ab)^{\lg ab}$ 的值为 ________.

3 将一枚均匀的骰子独立投掷三次, 所得的点数依次记为 x,y,z , 则事件 "$C_7^x<C_7^y<C_7^z$" 发生的概率为 ________.

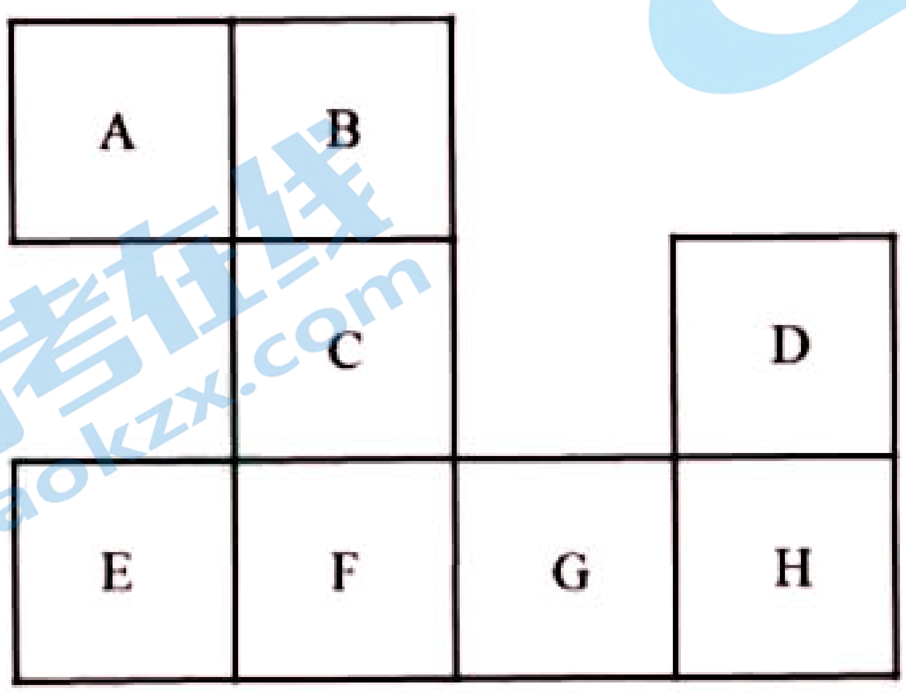
4 若平面上非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}, \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2|\vec{\alpha}|, \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=3|\vec{\beta}|$, 则 $|\vec{\gamma}|$ 的最小值为 ________.

5 方程 $\sin x=\cos 2x$ 的最小的 20 个正实数解之和为 ________.

6 设 a,b,c 为正数, $a<b$. 若 a,b 为一元二次方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根, 且 a,b,c 是一个三角形的三边长, 则 $a+b-c$ 的取值范围是 ________.

7 平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 Ω 与 x 轴, y 轴均相切, 圆心在椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内, 且 Ω 与 Γ 有唯一的公共点 $(8,9)$. 则 Γ 的焦距为 ________.

8 八张标有 A,B,C,D,E,F,G,H 的正方形卡片构成下图. 现逐一取走这些卡片, 要求每次取走一张卡片时, 该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边 (例如可按 D,A,B,E,C,F,G,H 的次序取走卡片, 但不可按 D,B,A,E,C,F,G,H 的次序取走卡片), 则取走这八张卡片的不同次序的数目为 ________(答案用数值表示).



二、解答题（第 9 题 16 分，第 10,11 题各 20 分，共 56 分）

9.(本题满分 16 分) 平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2=4x$，F 为 Γ 的焦点，A,B 为 Γ 上的两个不重合的动点，使得线段 AB 的一个三等分点 P 位于线段 OF 上（含端点），记 Q 为线段 AB 的另一个三等分点．求点 Q 的轨迹方程．

10.(本题满分 20 分) 已知三棱柱 $\Omega: ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长均相等．记底面 ABC 所在平面为 α．若 Ω 的另外四个面（即面 $A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$）在 α 上投影的面积从小到大重排后依次为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$，求 Ω 的体积．

11.(本题满分 20 分) 求出所有满足下面要求的不小于 1 的实数 t：对任意 $a,b\in[-1,t]$，总存在 $c,d\in[-1,t]$，使得 $(a+c)(b+d)=1$．

2023年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨2023年全国高中数学联合竞赛
一试（A卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分．

1. 设复数 $z=9+10i$（i为虚数单位），若正整数 n 满足 $\left|z^n\right|\le 2023$，则 n 的最大值为________．

答案：2．

解：$\left|z^n\right|=|z|^n=\left(\sqrt{9^2+10^2}\right)^n=\left(\sqrt{181}\right)^n$．因 $\left|z^2\right|=181<2023$，而当 $n\ge 3$ 时，$\left|z^n\right|=\left(\sqrt{181}\right)^n>13^n>2023$，故 n 的最大值为 2．

2. 若正实数 a,b 满足 $a^{\lg b}=2$，$a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}=5$，则 $(ab)^{\lg ab}$ 的值为________．

答案：20．

解：因为 $b^{\lg a}=10^{\lg a\cdot\lg b}=a^{\lg b}=2$，所以

$$(ab)^{\lg ab}=(ab)^{\lg a+\lg b}=(a^{\lg a}\cdot b^{\lg b})\cdot a^{\lg b}\cdot b^{\lg a}=5\times2\times2=20.$$

3. 将一枚均匀的骰子独立投掷三次，所得的点数依次记为 x,y,z，则事件"$C_7^x<C_7^y<C_7^z$"发生的概率为________．

答案：$\dfrac{1}{27}$．

解：由于 $C_7^1=C_7^6<C_7^2=C_7^5<C_7^3=C_7^4$，因此当 $x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 时，事件"$C_7^x<C_7^y<C_7^z$"发生当且仅当"$x\in\{1,6\},y\in\{2,5\},z\in\{3,4\}$"成立，相应的概率为 $\left(\dfrac{2}{6}\right)^3=\dfrac{1}{27}$．

4. 若平面上非零向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2|\vec{\alpha}|$，$\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=3|\vec{\beta}|$，则 $|\vec{\gamma}|$ 的最小值为________．

答案：$2\sqrt{3}$．

解：由 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，不妨设 $\vec{\alpha}=(a,0),\vec{\beta}=(0,b)$，其中 $a,b>0$，并设 $\vec{\gamma}=(x,y)$，则由 $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2|\vec{\alpha}|$ 得 $by=2a$，由 $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=3|\vec{\beta}|$ 得 $ax=3b$．

所以 $|\vec{\gamma}|=\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{2xy}=\sqrt{2\cdot\dfrac{3b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}=2\sqrt{3}$．

取 $a=\sqrt{3},b=\sqrt{2}$，此时 $x=y=\sqrt{6}$，$|\vec{\gamma}|$ 取到最小值 $2\sqrt{3}$．

5. 方程 $\sin x=\cos 2x$ 的最小的 20 个正实数解之和为__________.

答案：130π .

解：将 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 代入方程，整理得 $(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$，解得

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{6},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

上述解亦可写成 $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$，其中 $k=0,1,\cdots,19$ 对应最小的 20 个正实数解，它们的和为 $\sum_{k=0}^{19}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{19\times 20}{2}+\frac{\pi}{6}\cdot 20=130\pi$.

6. 设 a,b,c 为正数，$a<b$. 若 a,b 为一元二次方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根，且 a,b,c 是一个三角形的三边长，则 $a+b-c$ 的取值范围是__________.

答案：$\left(\frac{7}{8},\sqrt{5}-1\right)$.

解：由条件知 $ax^2-bx+c=a(x-a)(x-b)=ax^2-(a^2+ab)x+a^2b$，比较系数得 $b=a^2+ab,\ c=a^2b$，故 $b=\frac{a^2}{1-a},\ c=\frac{a^4}{1-a}$，从而

$$a+b-c=a+\frac{a^2-a^4}{1-a}=a+a^2+a^3.$$

由于 $0<a<b=\frac{a^2}{1-a}$，故 $\frac{1}{2}<a<1$. 此时显然 $b>c>0$. 因此，a,b,c 是一个三角形的三边长当且仅当 $a+c>b$，即 $a+\frac{a^4}{1-a}>\frac{a^2}{1-a}$，即 $a(a^2+a-1)<0$，结合 $\frac{1}{2}<a<1$，解得 $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

令 $f(x)=x+x^2+x^3$，则 $a+b-c=f(a)$. 显然当 $x>0$ 时 $f(x)$ 连续且严格递增，故 $a+b-c$ 的取值范围是 $\left(f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right)$，即 $\left(\frac{7}{8},\sqrt{5}-1\right)$.

7. 平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 Ω 与 x 轴、y 轴均相切，圆心在椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 内，且 Ω 与 Γ 有唯一的公共点 $(8,9)$. 则 Γ 的焦距为__________.

答案：10 .

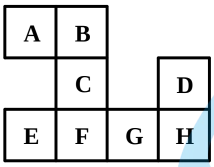
解：根据条件，可设圆心为 $P(r,r)$，则有 $(r-8)^2+(r-9)^2=r^2$，解得 $r=5$ 或 $r=29$. 因为 P 在 Γ 内，故 $r=5$.

椭圆 Γ 在点 $A(8,9)$ 处的切线为 $l:\frac{8x}{a^2}+\frac{9y}{b^2}=1$，其法向量可取为 $\vec{n}=\left(\frac{8}{a^2},\frac{9}{b^2}\right)$.

由条件，l 也是圆 Ω 的切线，故 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{PA}$ 平行，而 $\overrightarrow{PA}=(3,4)$，所以 $\frac{32}{a^2}=\frac{27}{b^2}$.

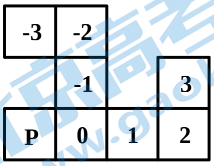
又 $\frac{64}{a^2}+\frac{81}{b^2}=1$，解得 $a^2=160,\ b^2=135$. 从而 Γ 的焦距为 $2\sqrt{a^2-b^2}=10$.

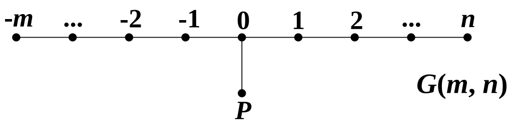
8. 八张标有 A, B, C, D, E, F, G, H 的正方形卡片构成下图．现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按 D, A, B, E, C, F, G, H 的次序取走卡片，但不可按 D, B, A, E, C, F, G, H 的次序取走卡片），则取走这八张卡片的不同次序的数目为________．



答案：392．

解：如左下图重新标记原图中的八张卡片．现将每张卡片视为顶点，有公共边的两张卡片所对应的顶点之间连一条边，得到一个八阶图，该图可视为右下图中的 $m+n+2$ 阶图 $G(m,n)$ 在 $m=3, n=3$ 时的特殊情况．





取卡片（顶点）的规则可解释为：

(i) 若顶点 P 已取走，则以下每步取当前标号最小或最大的顶点，直至取完；

(ii) 若顶点 P 未取走，则必为某个 $G(m,n)\,(m,n\ge 0)$ 的情形，此时若 $m=0$，则将 P 视为 -1 号顶点，归结为 (i) 的情形；若 $m\ne 0, n=0$，则将 P 视为 1 号顶点，归结为 (i) 的情形；若 $m,n\ge 1$，则当前可取 P 或 $-m$ 号顶点或 n 号顶点，分别归结为 (i) 或 $G(m-1,n)$ 或 $G(m,n-1)$ 的情形．

设 $G(m,n)$ 的符合要求的顶点选取次序数为 $f(m,n)$，本题所求即为 $f(3,3)$．

由 (i)、(ii) 知 $f(m,0)=2^{m+1}\,(m\ge 0)$，$f(0,n)=2^{n+1}\,(n\ge 0)$，且

$$f(m,n)=2^{m+n}+f(m-1,n)+f(m,n-1)\,(m,n\ge 1).$$

由此可依次计算得 $f(1,1)=12$，$f(1,2)=f(2,1)=28$，$f(1,3)=f(3,1)=60$，$f(2,2)=72$，$f(2,3)=f(3,2)=164$，$f(3,3)=392$，即所求数目为 392．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（**本题满分 16 分**）平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2=4x$，F 为 Γ 的焦点，A, B 为 Γ 上的两个不重合的动点，使得线段 AB 的一个三等分点 P 位于线段 OF 上（含端点），记 Q 为线段 AB 的另一个三等分点．求点 Q 的轨迹方程．

解：设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$．不妨设 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QB}$，则 $P\left(\dfrac{2x_1+x_2}{3},\dfrac{2y_1+y_2}{3}\right)$．

易知 $F(1,0)$．由于点 P 位于线段 OF 上，故 $\dfrac{2x_1+x_2}{3}\in[0,1]$，$\dfrac{2y_1+y_2}{3}=0$．

……………4 分

可设 $y_1=t, y_2=-2t$，则 $x_1=\dfrac{t^2}{4}, x_2=t^2$．此时有 $\dfrac{2x_1+x_2}{3}=\dfrac{t^2}{2}\in[0,1]$，且由 A, B 不重合知 $t\ne 0$，所以 $t^2\in(0,2]$．……………8 分

设 $Q(x_Q, y_Q)$，则 $x_Q=\dfrac{x_1+2x_2}{3}=\dfrac{3}{4}t^2$, $y_Q=\dfrac{y_1+2y_2}{3}=-t$，有 $y_Q^2=\dfrac{4}{3}x_Q$.

注意到 $x_Q=\dfrac{3}{4}t^2\in\left(0, \dfrac{3}{2}\right]$，故点 Q 的轨迹方程为 $y^2=\dfrac{4}{3}x\ (0<x\le\dfrac{3}{2})$.

……………16 分

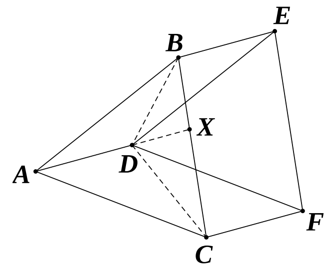
10.（本题满分 20 分）已知三棱柱 $\Omega: ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长均相等．记底面 ABC 所在平面为 α．若 Ω 的另外四个面（即面 $A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$）在 α 上投影的面积从小到大重排后依次为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$，求 Ω 的体积．

解：设点 A_1, B_1, C_1 在平面 α 上的投影分别为 D, E, F，则面 $A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$ 在 α 上的投影面积分别为 $S_{\Delta DEF}, S_{ABED}, S_{ACFD}, S_{BCFE}$．

由已知及三棱柱的性质，ΔDEF 为正三角形，且 $ABED, ACFD, BCFE$ 均为平行四边形．

由对称性，仅需考虑点 D 位于 $\angle BAC$ 内的情形（如图所示）．

显然此时有 $S_{ABED}+S_{ACFD}=S_{BCFE}$．……………5 分



由于 $\{S_{\Delta DEF}, S_{ABED}, S_{ACFD}, S_{BCFE}\}=\{2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$，故 S_{ABED}, S_{ACFD} 必为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ 的排列，$S_{BCFE}=5\sqrt{3}$，进而 $S_{\Delta DEF}=4\sqrt{3}$，得 ΔDEF 的边长为 4，即正三棱柱 Ω 的各棱长均为 4．……………10 分

不妨设 $S_{ABED}=2\sqrt{3}, S_{ACFD}=3\sqrt{3}$，则 $S_{\Delta ABD}=\sqrt{3}, S_{\Delta ACD}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

取射线 AD 与线段 BC 的交点 X，则 $\dfrac{BX}{CX}=\dfrac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{2}{3}$，故 $BX=\dfrac{8}{5}$．因此

$$AX=\sqrt{AB^2+BX^2-2AB\cdot BX\cdot\cos 60^\circ}=\frac{4}{5}\sqrt{19},$$

而 $\dfrac{AD}{AX}=\dfrac{S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{5}{8}$，故 $AD=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$．……………15 分

于是 Ω 的高 $h=\sqrt{AA_1^2-AD^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$．

又 $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3}$，故 Ω 的体积 $V=S_{\Delta ABC}\cdot h=6\sqrt{15}$．……………20 分

11.（本题满分 20 分）求出所有满足下面要求的不小于 1 的实数 t：对任意 $a, b\in[-1, t]$，总存在 $c, d\in[-1, t]$，使得 $(a+c)(b+d)=1$．

解：记 $I_t=[-1, t]$，$S=(a+c)(b+d)$．

假如 $t>2$，则当 $a=b=t$ 时，对任意 $c, d\in I_t$，均有 $S\ge(t-1)^2>1$，不满足

要求.

假如$1\le t<\frac{3}{2}$，则当$a=-1, b=2-t$时，对任意$c,d\in I_t$，均有

$$-2\le a+c\le t-1，1-t\le b+d\le 2.$$

若$a+c, b+d$同正或同负，则$S\le 2(t-1)<1$，其余情况下总有$S\le 0<1$，不满足要求. ……………5分

以下考虑$\frac{3}{2}\le t\le 2$的情形. 为便于讨论，先指出如下引理.

引理：若$u,v\ge\frac{1}{2}$，且$u+v\ge\frac{5}{2}$，则$uv\ge 1$.

事实上，当$|u-v|\le\frac{3}{2}$时，$uv=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2-\left(\frac{u-v}{2}\right)^2\ge\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$.

当$|u-v|>\frac{3}{2}$时，$uv>\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=1$. 引理得证.

下证对任意$a,b\in I_t$，可取$c_1,d_1\in I_t$，使得

$$S_1=(a+c_1)(b+d_1)\ge 1. \qquad ①$$

若$a+b\le-\frac{1}{2}$，则取$c_1=d_1=-1$，此时

$$S_1=(a-1)(b-1)=(1-a)(1-b),$$

其中$1-a\ge\frac{3}{2}+b\ge\frac{1}{2}, 1-b\ge\frac{3}{2}+a\ge\frac{1}{2}$，且$(1-a)+(1-b)=2-(a+b)\ge\frac{5}{2}$，故由引理知$S_1\ge 1$.

若$a+b>-\frac{1}{2}$，则取$c_1=d_1=\frac{3}{2}\in I_t$，此时

$$S_1=\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(b+\frac{3}{2}\right),$$

其中$a+\frac{3}{2}, b+\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$，且$\left(a+\frac{3}{2}\right)+\left(b+\frac{3}{2}\right)=a+b+3>\frac{5}{2}$，故由引理知$S_1\ge 1$.

……………15分

注意到，当$a,b\in I_t$时，可取$c_2\in I_t$，使得$|a+c_2|\le 1$（例如，当$a\in[-1,1]$时取$c_2=0$，当$a\in(1,t]$时取$c_2=-1$），同理，可取$d_2\in I_t$，使得$|b+d_2|\le 1$. 此时

$$S_2=(a+c_2)(b+d_2)\le|a+c_2|\cdot|b+d_2|\le 1. \qquad ②$$

根据①、②，存在一个介于c_1,c_2之间的实数c，及一个介于d_1,d_2之间的实数d，使得$(a+c)(b+d)=1$，满足要求.

综上，实数t满足要求当且仅当$\frac{3}{2}\le t\le 2$. ……………20分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。