

2019 北京五十中分校高三（上）期中

数 学

试卷类型：A

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x/0 < x < 2\}$ ，集合 $B = \{x / -1 \leq x \leq 1\}$ ，那么 $A \cup B = (\quad)$

- A. $\{x/0 < x \leq 1\}$ B. $\{x/1 \leq x < 2\}$ C. $\{x/-1 \leq x < 0\}$ D. $\{x/-1 \leq x < 2\}$

2. 在复平面内，复数 $i(i-1)$ 对应的点在 (\quad)

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 下列函数中为奇函数的是 (\quad)

- A. $y = x + \cos x$ B. $y = x + \sin x$ C. $y = \sqrt{x}$ D. $y = e^{-|x|}$

4. “ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ” 是 “ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ” 的 (\quad)

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 要得到函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图象，只要将函数 $y = \sin x$ 的图象 (\quad)

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位 C. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 单位

6. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，函数 $y = \sin x$ 的图象与直线 $y = -\frac{3}{4}$ 的公共点的个数为 (\quad)

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 1$ ，则 $\angle C$ 等于 (\quad)

- A. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

8. 设函数 $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{4})$ ， $x \in [0, \frac{9\pi}{16}]$ ，若函数 $y = f(x) + a$ ， $(a \in R)$ ，恰有三个零点 x_1, x_2, x_3 ， $x_1 < x_2 < x_3$ ，则 $x_1 + 2x_2 + x_3$ 的值是 (\quad)

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{4}$

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 2}$ 的定义域为_____.

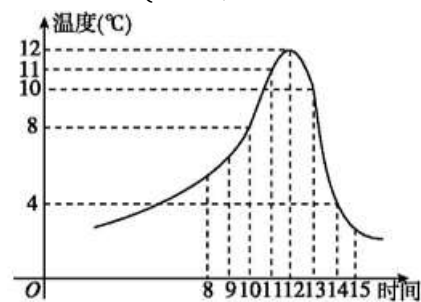
10. 以角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，角 α 终边过点 $P(2, 4)$ ，则 $\tan\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x$ 化为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$)，则 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知点 $A(-1, 1)$ ，点 $B(2, y)$ ，向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$ ，若 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{a}$ ，则实数 y 的值为

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 2 \\ \ln x, & x > 2 \end{cases}$ ，如果关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根，那么实数 k 的取值范围是

14. 某食品的保鲜时间 t （单位：小时）与储藏温度 x （恒温，单位： $^{\circ}\text{C}$ ）满足函数关系 $t = \begin{cases} 64, & x \leq 0, \\ 2^{kx+6}, & x > 0 \end{cases}$ 且该食品在 4°C 的保鲜时间是 16 小时.



① 该食品在 8°C 的保鲜时间是 小时；

② 已知甲在某日上午 10 时购买了该食品，并将其遗放在室外，且此日的室外温度随时间变化如图所示，那么

到了次日 13 时，甲所购买的食品是否过了保鲜时间 .（填“是”或“否”）

三. 解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(II) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 的值.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 7, b = 8, \cos B = -\frac{1}{7}$.

(I) 求 $\angle A$ ；

(II) 求 AC 边上的高.

17. 诚信是立身之本，道德之基. 某校学生会创设了“诚信水站”，既便于学生用水，又推进诚信教育，并用

“ $\frac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$ ”表示每周“水站诚信度”. 为了便于数据分析，以四周为一周期，下表为该水站连续十二周

(共三个周期)的诚信度数据统计:

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%

(I) 计算表中十二周“水站诚信度”的平均数 \bar{x} ;

(II) 分别从上表每个周期的4个数据中随机抽取1个数据，设随机变量 X 表示取出的3个数据“水站诚信度”超过91%的数据的个数，求随机变量 X 的分布列和期望;

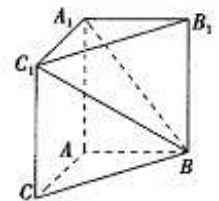
(III) 已知学生会分别在第一个周期的第四周末和第二个周期的第四周末各举行了一次“以诚信为本”的主题教育活动. 根据已有数据，说明两次主题教育活动的宣传效果，并根据已有数据陈述理由.

18. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， AA_1C_1C 是正方形， $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp AC$ ， $AB = 3$ ， $BC = 5$.

(I) 求证： $AC \parallel$ 平面 A_1C_1B ;

(II) 求二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值;

(III) 证明：在线段 BC_1 上存在点 D ，使得 $AD \perp A_1B$. 并求 $\frac{BD}{BC_1}$ 的值.



19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，直线 $y = x - 1$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N .

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 求 $\triangle AMN$ 的面积.

20. 已知函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$, $a, b \in R$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切, 求 a, b 的值;

(II) 在(I)的条件下, 求 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 的最大值;

(III) 若不等式 $f(x) \geq x$ 对所有的 $b \in (-\infty, 0]$, $x \in (e, e^2]$ 都成立, 求 a 的取值范围.



长按识别关注