

# 2021 年济南市高三模拟考试

## 数学试题

本试卷共 4 页, 22 题, 全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $\alpha \in (0, \pi)$ , 若  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ , 则  $\tan \alpha$  的值为

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\sqrt{3}$       D.  $-\sqrt{3}$

2. 设集合  $A = \{x \mid \frac{x-1}{x} < 0\}$ ,  $B = \{x \mid x+1 > 0\}$ , 则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的

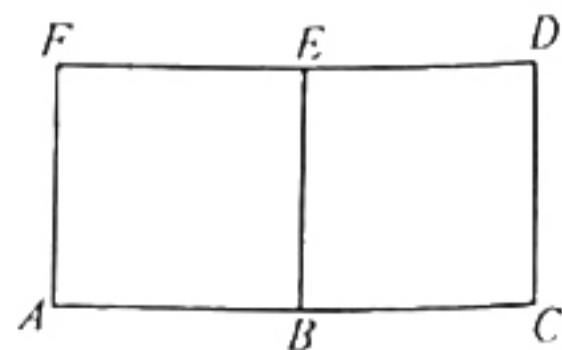
- A. 充要条件      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件      D. 既不充分也不必要条件

3. 已知单位向量  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 0$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

4. 环保部门为降低某社区在改造过程中产生的扬尘污染, 决定对全部街道采取洒水降尘作业。该社区街道的平面结构如图所示(线段代表街道), 洒水车随机选择  $A, B, C, D, E, F$  中的一点驶入进行作业, 则选择的驶入点使洒水车能够不重复地走遍全部街道的概率为

- A.  $\frac{1}{6}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$



5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$  的渐近线方程为  $x \pm \sqrt{3}y = 0$ , 则  $m =$

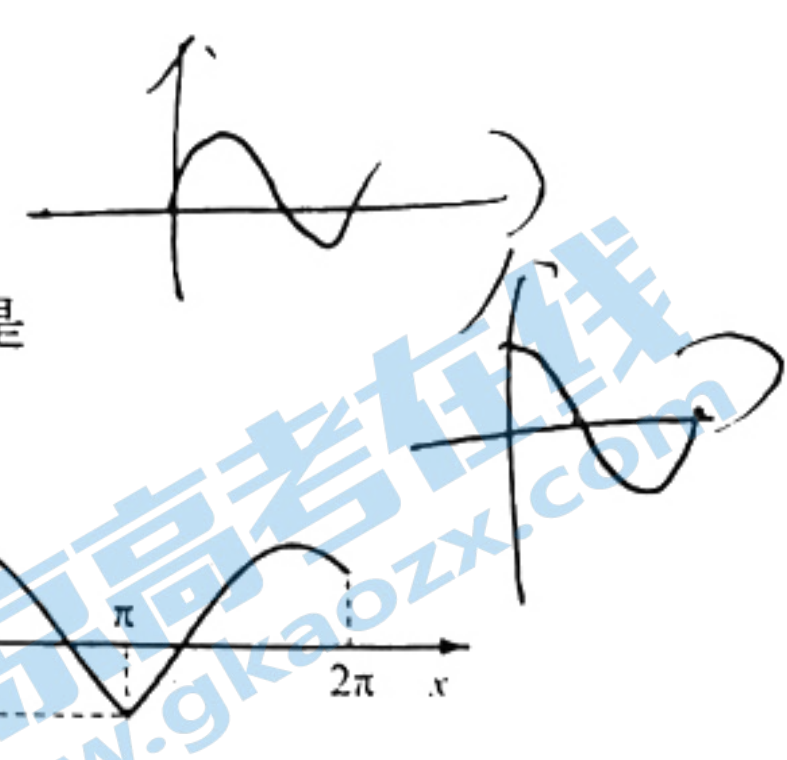
- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\sqrt{3} - 1$       C.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$       D. 2

准考证号

姓名

学校

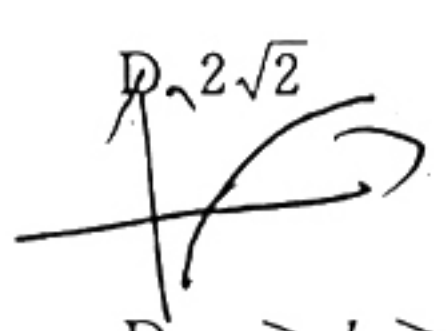
6. 函数  $y = f(x)$  在  $[-2\pi, 2\pi]$  上的图象如图所示, 则  $f(x)$  的解析式可能是



- A.  $f(x) = \sin x + \cos x$  ~~代~~  $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$  X  
 B.  $f(x) = |\sin x| + \cos x$  ~~代~~  $f(-x) = \sin x + \cos x$  X  
 C.  $f(x) = \sin|x| + \cos x$   $f(x) = \sin|x| + \cos x$  ✓  
 D.  $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$   $f(-x) = \sin|x| + |\cos x|$  ✓

7. 已知菱形  $ABCD$ ,  $AB = BD = 2$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起, 使二面角  $A-BD-C$  的大小为  $60^\circ$ , 则三棱锥  $A-BCD$  的体积为

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  C.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  D.  $2\sqrt{2}$



8. 设  $a = 2 \ln 2$ ,  $b = 2 \ln 2$ ,  $c = 2 \ln 2$ , 则

- A.  $a > c > b$  B.  $c > b > a$  C.  $b > a > c$  D.  $a > b > c$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

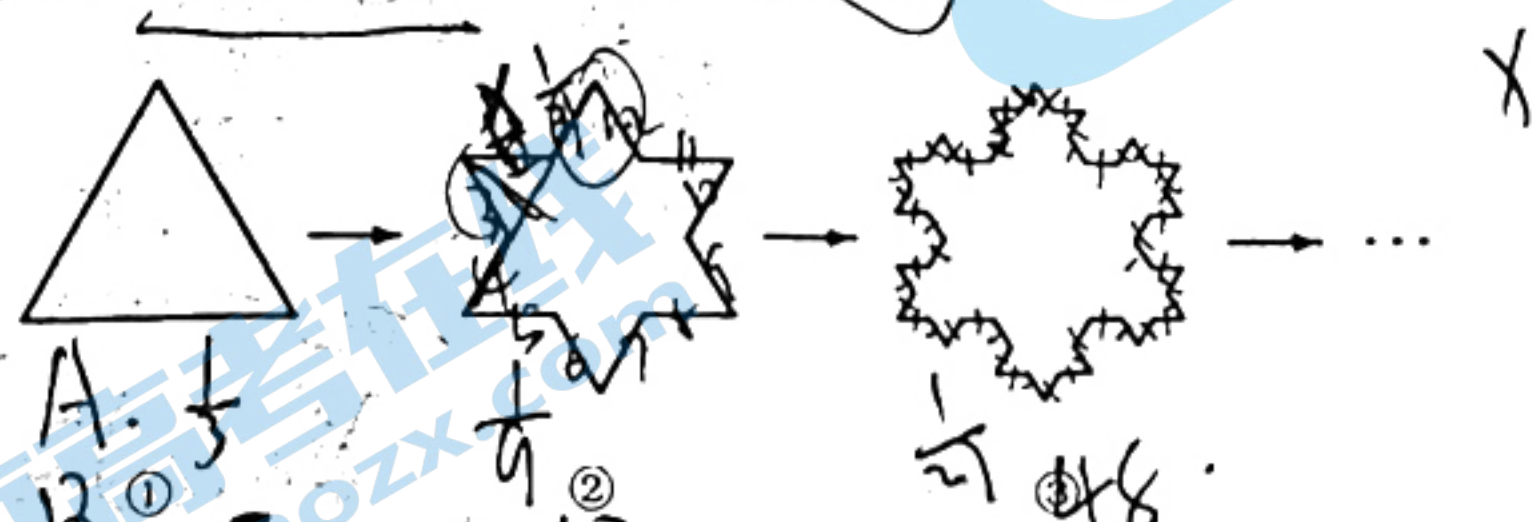
9. 在  $(\frac{2}{x} - x)^6$  的展开式中, 下列说法正确的是

- A. 常数项为  $60$   $C_6^3 (\frac{2}{x})^3 \cdot (-x)^3$  ✓  
 B. 第 4 项的二项式系数最大  $C_6^3$  ✓  
 C. 第 3 项的系数最大  $C_6^2 (\frac{2}{x})^4 \cdot (-x)^2 = 15 \times 16 x^2$  ✓  
 D. 所有项的系数和为  $4$   $(2-1)^6 = 1$  X

10. 已知函数  $f(x) = x^3 - ax + 1$  的图象在  $x = 2$  处切线的斜率为 9, 则下列说法正确的是

- A.  $a = 9$   $f'(x) = 3x^2 - a$   $f'(2) = 12 - a = 9 \Rightarrow a = 3$  X  
 B.  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极大值  $f(x) = x^3 - 3x + 1$   $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$   $x = -1$  或  $x = 1$  ✓  
 C. 当  $x \in (-2, 1]$  时,  $f(x) \in (-1, 3]$  ✓  
 D.  $f(x)$  的图象关于点  $(0, 1)$  中心对称 ✓

11. 1904 年, 瑞典数学家科赫构造了一种曲线. 如图, 取一个边长为 1 的正三角形, 在每个边上以中间的  $\frac{1}{3}$  为一边, 向外侧凸出作一个正三角形, 再把原来边上中间的  $\frac{1}{3}$  擦掉, 得到第 2 个图形, 重复上面的步骤, 得到第 3 个图形. 这样无限地作下去, 得到的图形的轮廓线称为科赫曲线. 云层的边缘, 山脉的轮廓, 海岸线等自然界里的不规则曲线都可用“科赫曲线”的方式来研究, 这门学科叫“分形几何学”. 下列说法正确的是



- A. 第 4 个图形的边长为  $\frac{1}{81}$  X  
 B. 记第  $n$  个图形的边数为  $a_n$ , 则  $a_{n+1} = 4a_n$  ✓  
 C. 记第  $n$  个图形的周长为  $b_n$ , 则  $b_n = 3 \cdot (\frac{4}{3})^{n-1}$  ✓  
 D. 记第  $n$  个图形的面积为  $S_n$ , 则对任意的  $n \in \mathbb{N}_+$ , 存在正实数  $M$ , 使得  $S_n < M$  ✓

12. 画法几何的创始人—法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆。已知椭圆

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的离心率为 } \frac{\sqrt{2}}{2}, F_1, F_2 \text{ 分别为椭圆的左、右焦点, } A, B \text{ 为椭圆}$$

上两个动点. 直线  $l$  的方程为  $bx + ay - a^2 - b^2 = 0$ . 下列说法正确的是

A.  $C$  的蒙日圆的方程为  $x^2 + y^2 = 3b^2$

B. 对直线  $l$  上任意点  $P, \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$

C. 记点  $A$  到直线  $l$  的距离为  $d$ , 则  $d - |AF_2|$  的最小值为  $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$

D. 若矩形  $MNGH$  的四条边均与  $C$  相切, 则矩形  $MNGH$  面积的最大值为  $6b^2$

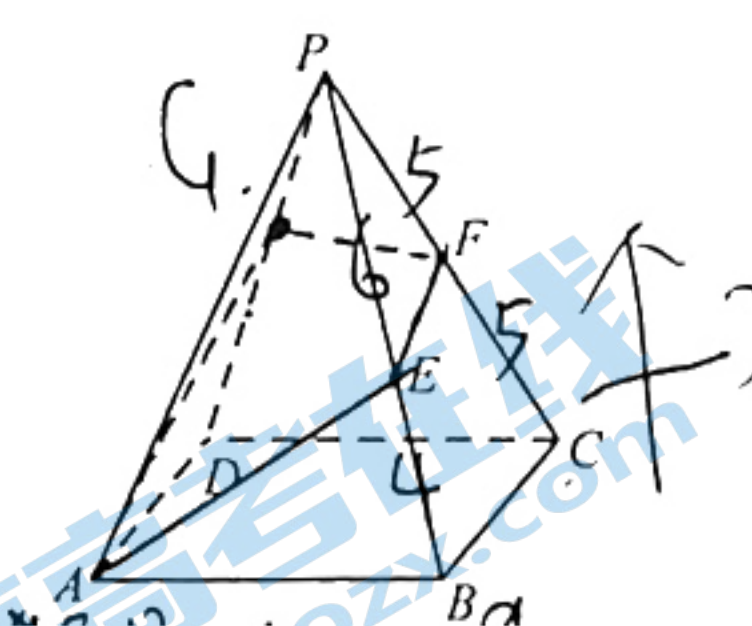
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知复数  $z = \frac{2+i}{-i}$  (其中  $i$  为虚数单位), 则  $|z|$  的值为 \_\_\_\_\_.

14. 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_7 = 28$ , 则  $a_2 + a_3 + a_7$  的值为 \_\_\_\_\_.

15. 能够说明“若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a + \sqrt[3]{a}} > \frac{1}{b + \sqrt[3]{b}}$ ”是假命题的一组非零实数  $a, b$  的值依次为 \_\_\_\_\_.

16. 在通用技术课上, 老师给同学们提供了一个如图所示的木质正四棱锥模型  $P-ABCD$ , 并要求同学们将该四棱锥切割成三个小四棱锥. 某小组经讨论后给出如下方案: 第一步, 过点  $A$  作一个平面分别交  $PB, PC, PD$  于点  $E, F, G$ , 得到四棱锥  $P-AEFG$ ; 第二步, 将剩下的几何体沿平面  $ACF$  切开, 得到另外两个小四棱锥. 在实施第一步的过程中, 为方便切割, 需先在模型表面画出截面四边形



$AEFG$ , 若  $\frac{PE}{PB} = \frac{3}{5}, \frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}$ , 则  $\frac{PG}{PD}$  的值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 已知角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c, a = \sqrt{5}, b = 3, \sin A + \sqrt{5} \sin B = 2\sqrt{2}$ .

(1) 求角  $A$  的值; (2) 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (12 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} a(x+1)e^x, & x \leq 0, \\ x^2 - ax + \frac{1}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

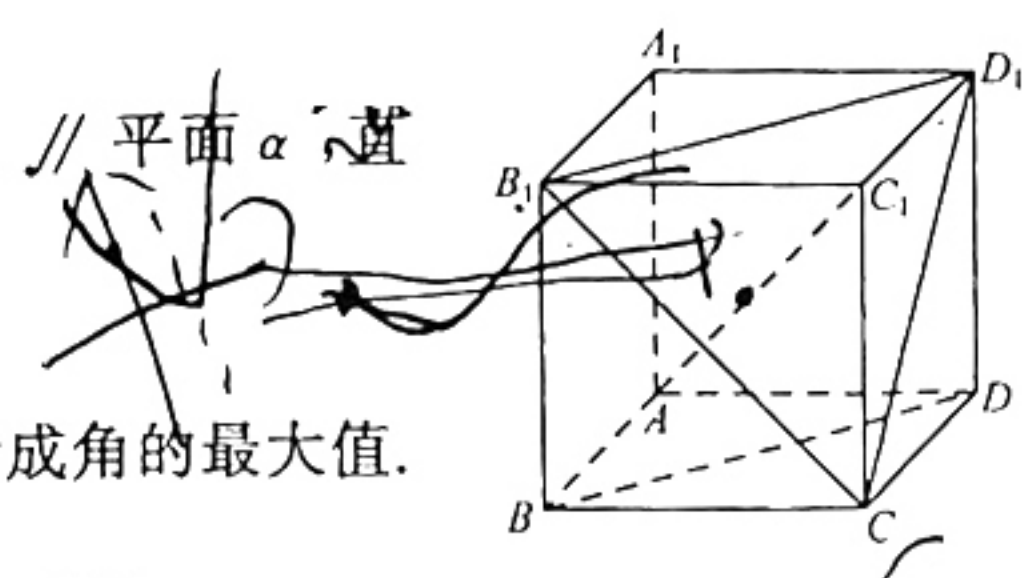
(1) 若  $a = 2$ , 求  $f(x)$  的最小值; (2) 若  $f(x)$  恰好有三个零点, 求实数  $a$  的取值范围.

19. (12 分)

已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  和平面  $\alpha$ , 直线  $AC_1 \parallel$  平面  $\alpha$ , 直线  $BD \parallel$  平面  $\alpha$ .

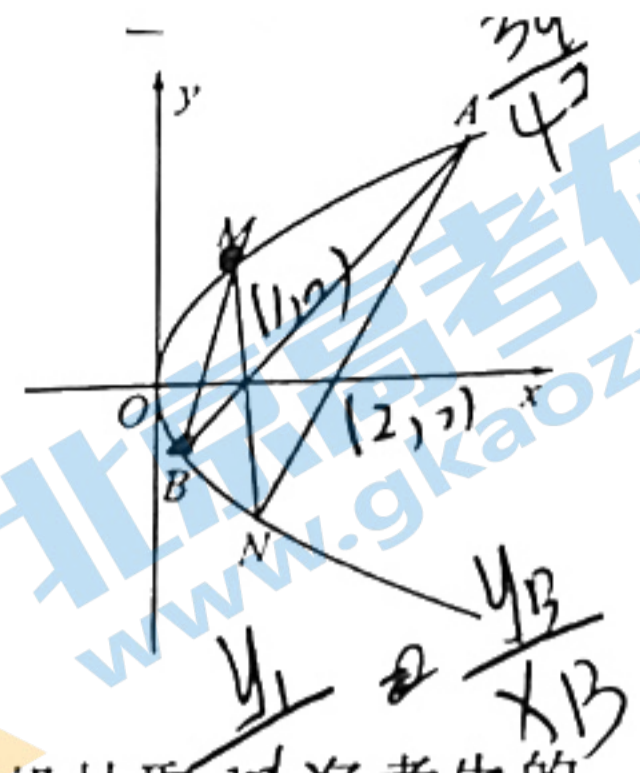
(1) 证明: 平面  $\alpha \perp$  平面  $B_1CD_1$ ;

(2) 点  $P$  为线段  $AC_1$  上的动点, 求直线  $BP$  与平面  $\alpha$  所成角的最大值.



20.(12分)

如图, A, B, M, N 为抛物线  $y^2 = 2x$  上四个不同的点, 直线  $AB$  与直线  $MN$  相交于点  $(1, 0)$ , 直线  $AN$  过点  $(2, 0)$ .



- (1) 记 A, B 的纵坐标分别为  $y_A, y_B$ , 求  $y_A \cdot y_B$  的值;  
 (2) 记直线 AN, BM 的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 是否存在实数  $\lambda$ , 使得  $k_2 = \lambda k_1$ ? 若存在, 求出  $\lambda$  的值; 若不存在, 说明理由.

21.(12分)

某机构为研究考生物理成绩与数学成绩之间的关系, 从一次考试中随机抽取 11 名考生的数据, 统计如下表:

数学成绩 $x$	46	65	79	89	99	109	110	116	123	134	140
物理成绩 $y$	50	54	60	63	66	68	0	70	73	76	80

(1) 由表中数据可知, 有一位考生因物理缺考导致数据出现异常, 剔除该组数据后发现, 考生物理成绩  $y$  与数学成绩  $x$  之间具有线性相关关系, 请根据这 10 组数据建立  $y$  关于  $x$  的回归直线方程, 并估计缺考考生如果参加物理考试可能取得的成绩;

(2) 已知参加该次考试的 10000 名考生的物理成绩服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 用剔除异常数据后的样本平均值作为  $\mu$  的估计值, 用剔除异常数据后的样本标准差作为  $\sigma$  的估计值, 估计物理成绩不低于 75 分的人数  $Y$  的期望.

Handwritten calculation:  $41.4 \cdot 66 \cdot 75 = 9.16$

附: 参考数据:

$\sum_{i=1}^{11} x_i$	$\sum_{i=1}^{11} y_i$	$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{11} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{11} (y_i - \bar{y})^2$	2 586 8 326
1 110	660	68 586	120 426	4 770 - 4356	0.31

上表中的  $x_i$  表示样本中第  $i$  名考生的数学成绩,  $y_i$  表示样本中第  $i$  名考生的物理成绩,

$$\bar{y} = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} y_i$$

参考公式: ① 对于一组数据:  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , 其方差:  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \bar{u}^2$ .

② 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = \hat{a} + \hat{b}u$  的斜

率和截距的最小二乘估计分别为:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{v} - \hat{b} \bar{u}$ .

③ 若随机变量  $\xi$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.683$ ,

$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) \approx 0.955$ ,  $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) \approx 0.997$ .

22.(12分)

已知正项数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(a_n + 1), n \in \mathbb{N}_+$ .

证明: (1)  $a_{n+1} < a_n$ ; (2)  $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$ ; (3)  $\frac{1}{2^n} < a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

## 高三模拟考试

### 数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	B	A	B	A	D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABD	BCD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $\sqrt{5}$ ； 14. 12；

15. 1, -1 (答案不唯一：第 1 个数大于 0, 第 2 个数小于 0 即可)； 16.  $\frac{3}{4}$ 。

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】

(1) 因为  $a = \sqrt{5}$ ,  $\sin A + \sqrt{5} \sin B = 2\sqrt{2}$ ,

所以  $\sin A + a \sin B = 2\sqrt{2}$ , 因为  $a \sin B = b \sin A$ ,

所以  $\sin A + 3 \sin A = 2\sqrt{2}$ , 解得  $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

在  $\triangle ABC$  中, 因为  $a < b$ , 所以  $A$  为锐角,

所以  $A = \frac{\pi}{4}$ ;

(2) 因为  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ,

所以  $c^2 - 3\sqrt{2}c + 4 = 0$ , 解得  $c = \sqrt{2}$  或  $c = 2\sqrt{2}$ ,

当  $c = \sqrt{2}$  时,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$ ,

当  $c = 2\sqrt{2}$  时,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$ ,

所以  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3}{2}$  或 3.

18. 【解析】

$$(1) a=2 \text{ 时, } f(x) = \begin{cases} 2(x+1)e^x, & x \leq 0, \\ x^2 - 2x + \frac{1}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

当  $x < 0$  时,  $f'(x) = 2(x+2)e^x$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递减, 在  $(-2, 0)$  上单调递增,

此时  $f(x)$  的最小值为  $f(-2) = -\frac{2}{e^2}$ ;

当  $x > 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

此时  $f(x)$  的最小值为  $f(1) = -\frac{1}{2}$ ;

因为  $-\frac{2}{e^2} > -\frac{1}{2}$ , 所以  $f(x)$  的最小值为  $-\frac{1}{2}$ ;

(2) 显然  $a \neq 0$ ;

因为  $x \leq 0$  时,  $f(x)$  有且只有一个零点  $-1$ ,

所以原命题等价于  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有两个零点.

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 - 2 > 0, \\ a > 0 \end{cases} \text{ 解得 } a > \sqrt{2},$$

故实数  $a$  的取值范围是  $(\sqrt{2}, +\infty)$ .

19. 【解析】

(1) 证明: 连接  $A_1C_1$ , 则  $B_1D_1 \perp A_1C_1$ , 因为  $AA_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ,

$B_1D_1 \subset$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ , 所以  $AA_1 \perp B_1D_1$ ;

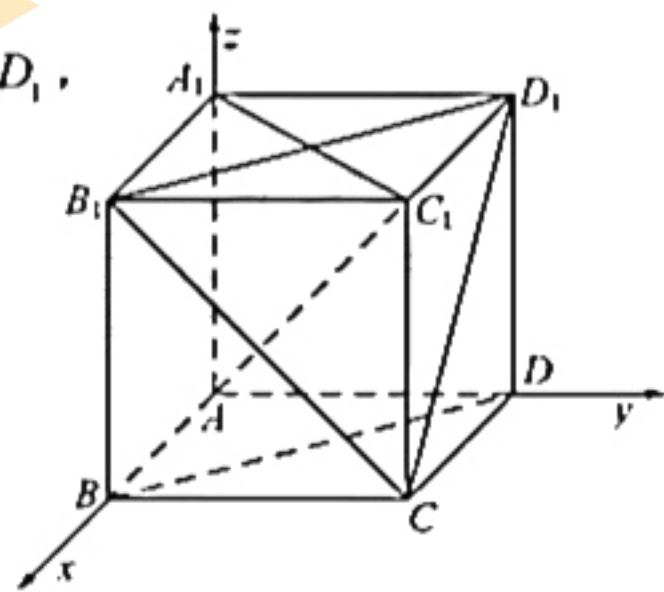
又因为  $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$ , 所以  $B_1D_1 \perp$  平面  $AA_1C_1$ ;

因为  $AC_1 \subset$  平面  $AA_1C_1$ , 所以  $B_1D_1 \perp AC_1$ ;

同理  $B_1C \perp AC_1$ ; 因为  $B_1D_1 \cap B_1C = B_1$ , 所以  $AC_1 \perp$  平面  $B_1CD_1$ ;

因为  $AC_1 \parallel$  平面  $\alpha$ , 过直线  $AC_1$  作平面  $\beta$  与平面  $\alpha$  相交于直线  $l$ , 则  $AC_1 \parallel l$ ;

所以  $l \perp$  平面  $B_1CD_1$ ; 又  $l \subset$  平面  $\alpha$ ,



所以 平面 $\alpha \perp$ 平面 $B_1CD_1$ ;

(2) 设正方体的棱长为 1, 以  $A$  为坐标原点,  $AB, AD, AA_1$  分别为  $x, y, z$  轴正方向建立空

间直角坐标系, 则  $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), C_1(1, 1, 1)$ ,

所以  $\overrightarrow{AC_1} = (1, 1, 1), \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$ .

设平面 $\alpha$ 的法向量为 $n = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 1, \text{ 则 } n = (1, 1, -2);$$

设  $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC_1} (0 \leq t \leq 1)$ , 则  $\overrightarrow{AP} = (t, t, t)$ , 因为  $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = (t-1, t, t)$ ;

设直线  $BP$  与平面 $\alpha$ 所成的角为 $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|n \cdot \overrightarrow{BP}|}{|n| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{3t^2 - 2t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{3(t - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}}},$$

所以 当  $t = \frac{1}{3}$  时,  $\sin \theta$  取到最大值为  $\frac{1}{2}$ ,

此时  $\theta$  的最大值为  $\frac{\pi}{6}$ .

20. 【解析】

(1) 设直线  $AB$  的方程为  $x = my + 1$ , 代入  $y^2 = 2x$ ,

$$\text{得 } y^2 - 2my - 2 = 0,$$

所以  $y_A \cdot y_B = -2$ ;

(2) 由 (1) 同理可得  $y_M \cdot y_N = -2$ ,

设直线  $AN$  的方程  $x = ny + 2$ , 代入  $y^2 = 2x$ , 得  $y^2 - 2ny - 4 = 0$ ,

所以  $y_A \cdot y_N = -4$ ,

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{y_N - y_A}{\frac{y_N^2}{2} - \frac{y_A^2}{2}} = \frac{2}{y_N + y_A}, \text{ 同理 } k_2 = \frac{2}{y_M + y_B};$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{k_2}{k_1} = \frac{y_A + y_N}{y_B + y_M} = \frac{y_A + y_N}{\frac{-2}{y_A} + \frac{-2}{y_N}} = \frac{y_A y_N}{-2} = 2,$$

所以 存在实数  $\lambda = 2$ , 使得  $k_2 = 2k_1$ .

## 21. 【解析】

(1) 设根据剔除后数据建立的  $y$  关于  $x$  的回归直线方程为  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ,

$$\text{剔除异常数据后的数学平均分为 } \frac{1110 - 110}{10} = 100,$$

$$\text{剔除异常数据后的物理平均分为 } \frac{660 - 0}{10} = 66,$$

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{68586 - 110 \times 0 - 10 \times 66 \times 100}{120426 - 110^2 - 10 \times 100^2} = \frac{2586}{8326} \approx 0.31,$$

$$\text{则 } \hat{a} = 66 - 0.31 \times 100 = 35,$$

所以 所求回归直线方程为  $\hat{y} = 0.31x + 35$ .

又物理缺考考生的数学成绩为 110,

所以 估计其可能取得的物理成绩为  $\hat{y} = 0.31 \times 110 + 35 = 69.1$ .

(2) 由题意知  $\mu = 66$ ,

$$\text{因为 } \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = \sum_{i=1}^{11} (y_i - \bar{y})^2 + 11\bar{y}^2 = 4770 + 11 \times \left(\frac{660}{11}\right)^2 = 44370,$$

$$\text{所以 } \sigma = \sqrt{\frac{1}{10} \times 44370 - 66^2} = \sqrt{81} = 9,$$

所以 参加该次考试的 10000 名考生的物理成绩服从正态分布  $N(66, 9^2)$ ,

$$\text{则物理成绩不低于 75 分的概率为 } \frac{1 - 0.683}{2} = 0.1585,$$

由题意可知  $Y \sim B(10000, 0.1585)$ ,

所以 物理成绩不低于 75 分的人数  $Y$  的期望

$$EY = 10000 \times 0.1585 = 1585.$$

## 22. 【解析】

(1) 先证明  $\ln(x+1) < x$  对  $x \in (0, +\infty)$  恒成立,

$$\text{记 } f(x) = \ln(x+1) - x, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0,$$

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

所以  $x > 0$  时,  $f(x) < f(0) = 0$ ,



又  $a_n > 0$ , 所以  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(a_n + 1) < \frac{1}{2} a_n$ , 即  $a_n > 2a_{n+1} > a_{n+1}$ .

即  $a_{n+1} < a_n$ , 得证.

(2) 要证  $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$  成立,

只需证  $a_n - \ln(a_n + 1) < \frac{1}{2} \cdot a_n \cdot \ln(a_n + 1)$  成立, 即证  $\ln(a_n + 1) > \frac{2a_n}{a_n + 2}$  成立;

记  $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,

则  $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $x > 0$  时,  $g(x) > g(0) = 0$ ,

所以  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2}$ ,

又  $a_n > 0$ , 所以  $\ln(a_n + 1) > \frac{2a_n}{a_n + 2}$ , 得证.

(3) 由 (2) 知  $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{2}{a_n} + 1$ ,

则  $\frac{1}{a_{n+1}} + 1 < \frac{2}{a_n} + 2 = 2\left(\frac{1}{a_n} + 1\right)$ , 即  $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 1}{\frac{1}{a_n} + 1} < 2$ ,

又  $\frac{1}{a_1} + 1 = 2$ , 所以  $\frac{1}{a_n} + 1 \leq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ ,

所以  $a_n \geq \frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$ ;

由 (1) 知  $a_n > 2a_{n+1}$ , 所以  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ , 又  $a_1 = 1$ ,

则  $a_n \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

综上  $\frac{1}{2^n} < a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯