

# 梅州市高三总复习质检试卷 (2023.4)

## 数 学

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知复数  $z_1 = a + i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ , 且  $z_1 \cdot \overline{z_2}$  为纯虚数, 则  $|z_1| =$

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C.  $\sqrt{5}$                       D.  $\sqrt{6}$

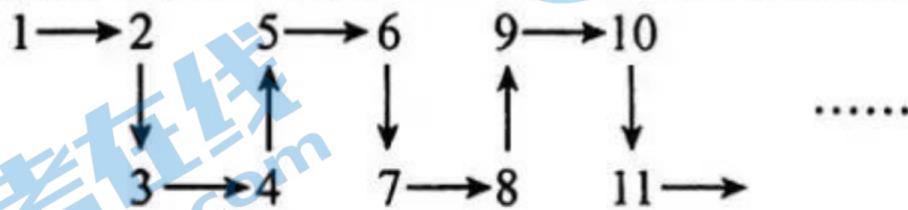
2. 已知集合  $M = \{x | y = \lg(x - 2)\}$ ,  $N = \{y | y = e^x + 1\}$ , 则  $M \cup N =$

- A.  $(-\infty, +\infty)$               B.  $(1, +\infty)$               C.  $[1, 2)$                       D.  $(2, +\infty)$

3. 用二分法求方程  $\log_4 x - \frac{1}{2x} = 0$  近似解时, 所取的第一个区间可以是

- A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $(2, 3)$                       D.  $(3, 4)$

4. 把正整数按下图所示的规律排序, 则从 2021 到 2023 的箭头方向依次为



- A.  $\begin{matrix} \rightarrow 2022 \\ \downarrow \end{matrix}$               B.  $\begin{matrix} \downarrow \\ 2022 \rightarrow \end{matrix}$               C.  $\begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow 2022 \end{matrix}$               D.  $\begin{matrix} 2022 \rightarrow \\ \uparrow \end{matrix}$

5. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ), 且  $f(\frac{\pi}{3}) - f(\frac{5\pi}{6}) = 2$ , 当  $\omega$  取最小的可能值时,  $\varphi =$

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{12}$                       C.  $-\frac{\pi}{12}$                       D.  $-\frac{\pi}{6}$

6. 若直线  $l: mx + ny + m = 0$  将圆  $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$  分成弧长之比为 2:1 的两部分, 则直线的斜率为

- A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$       B.  $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$

7. 云计算是信息技术发展的集中体现, 近年来, 我国云计算市场规模持续增长。已知某科技公司 2018 年至 2022 年云计算市场规模数据, 且市场规模  $y$  与年份代码  $x$  的关系可以用模型  $y = c_1 e^{c_2 x}$  (其中  $e$  为自然对数的底数) 拟合, 设  $z = \ln y$ , 得到数据统计表如下:

年份	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年
年份代码 $x$	1	2	3	4	5
云计算市场规模 $y$ / 千万元	7.4	11	20	36.6	66.7
$z = \ln y$	2	2.4	3	3.6	4

由上表可得经验回归方程  $z = 0.52x + a$ , 则 2025 年该科技公司云计算市场规模  $y$  的估计值为

- A.  $e^{5.08}$       B.  $e^{5.6}$       C.  $e^{6.12}$       D.  $e^{6.5}$

8. 设函数  $f(x)$  在  $R$  上存在导数  $f'(x)$ , 对任意的  $x \in R$ , 有  $f(-x) + f(x) = 2x^2$ , 且在  $(0, +\infty)$  上  $f'(x) < 2x$ . 若  $f(3-a) - f(a) \geq 9 - 6a$ , 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $[\frac{3}{2}, +\infty)$       B.  $(-\infty, \frac{3}{2}]$       C.  $[\frac{3}{2}, 3]$       D.  $[3, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

A. “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的既不充分也不必要条件

B. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}^+, x + \frac{1}{x} > 1$ ” 的否定是 “ $\forall x \in \mathbf{R}^+, x + \frac{1}{x} \leq 1$ ”

C. 若  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ , 则  $\alpha =$

D.  $y = \log_2 \left( -x^2 + \frac{1}{4} \right)$  的最大值为  $-2$

10. 已知向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\vec{c} = (0, 1)$ , 则下列命题正确的是
- A. 当且仅当  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  时,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- B.  $\vec{a}$  在  $\vec{c}$  上的投影向量为  $\vec{c}$
- C. 存在  $\theta$ , 使得  $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$
- D. 存在  $\theta$ , 使得  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

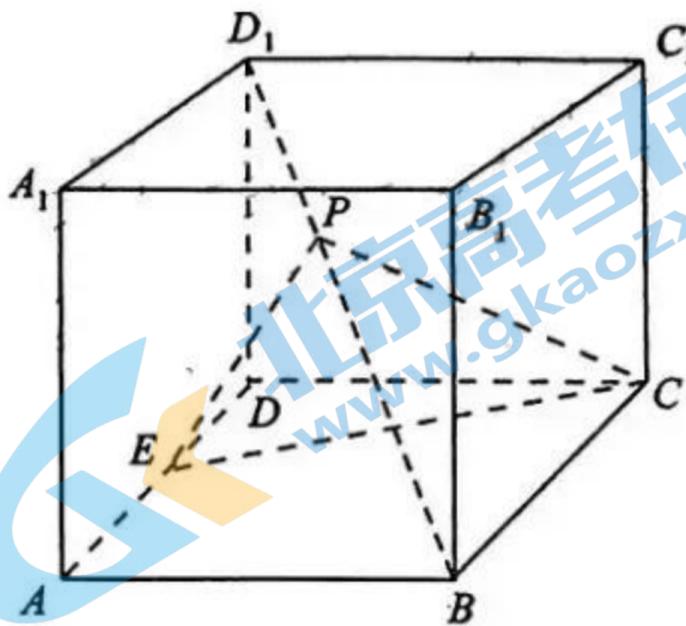
11. 已知函数  $f(x) = \cos 2x + |\sin x|$ , 则

- A.  $f(x)$  是一个最小正周期为  $T = 2\pi$  的周期函数
- B.  $f(x)$  是一个偶函数
- C.  $f(x)$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$  上单调递增
- D.  $f(x)$  的最小值为 0, 最大值为  $\frac{5}{4}$

12. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为边  $AD$  的中点, 点  $P$  为线段  $D_1B$

上的动点, 设  $D_1P = \lambda D_1B$ , 则

- A. 当  $\lambda = \frac{1}{3}$  时,  $EP \parallel$  平面  $AB_1C$
- B. 当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时,  $|PE|$  取得最小值, 其值为  $\sqrt{2}$
- C.  $|PA| + |PC|$  的最小值为  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
- D. 当  $C_1 \in$  平面  $CEP$  时,  $\lambda = \frac{1}{4}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

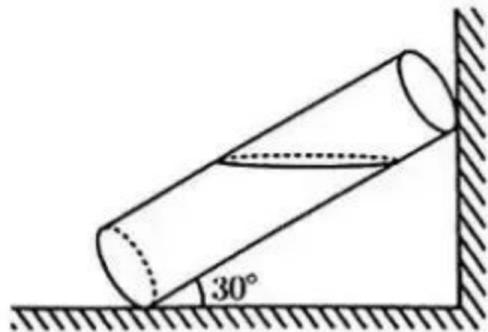
13. 已知函数  $f(x) = x^2 + a \ln x$  的图象在  $x = 1$  处的切线在  $y$  轴上的截距为 2, 则实数

$a =$  \_\_\_\_\_.

14. 用半径为 2 的半圆面围成一个圆锥, 则该圆锥的体积为

\_\_\_\_\_.

15. 如图, 一个装有某种液体的圆柱形容器固定在墙面和地面的角落内, 容器与地面所成的角为  $30^\circ$ , 液面呈椭圆形状,



则该椭圆的离心率为 \_\_\_\_\_.

16. 有一批同规格的产品, 由甲、乙、丙三家工厂生产, 其中甲、乙、丙工厂分别生产3000件、3000件、4000件, 而且甲、乙、丙工厂的次品率依次为6%、5%、5%, 现从这批产品中任取一件, 则(1) 取到次品的概率为\_\_\_\_\_ ; (2) 若取到的是次品, 则其来自甲厂的概率为\_\_\_\_\_ .

四、解答题: 本题共6小题, 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , 且数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是公比为2的等比数列.

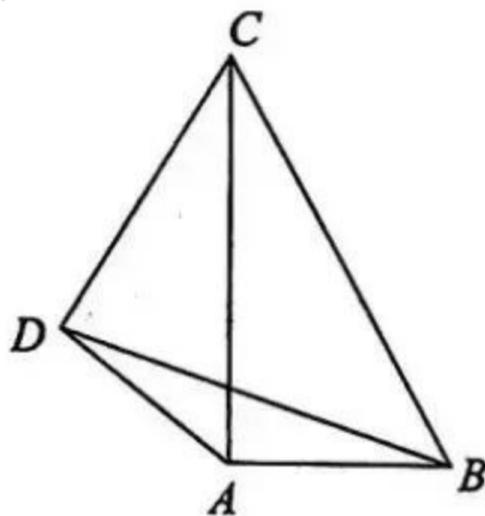
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{2n+1}{3^n} \cdot a_n$ , 数列 $\{b_n\}$ 是否有最大项? 若有, 求出最大项; 若没有, 说明理由.

18. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中,  $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AC = 2$ , 设 $\angle CAD = \theta$ .

(1) 当 $\theta = 45^\circ$ 时, 求 $BD$ 的长;

(2) 求 $BD$ 的最大值.

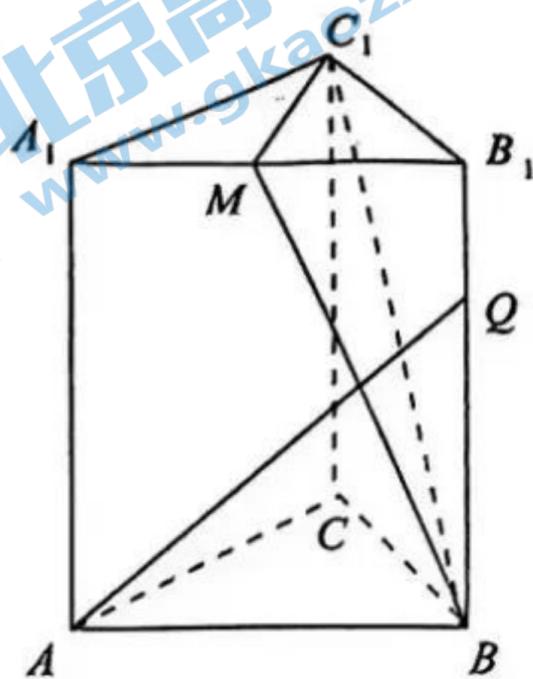


19. 如图，正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB = \frac{1}{2}AA_1 = 2$ ，点  $M$  为  $A_1B_1$  的中点。

(1) 在棱  $BB_1$  上是否存在点  $Q$ ，使得  $AQ \perp$  平面  $BC_1M$ ？

若存在，求出  $\frac{B_1Q}{QB}$  的值；若不存在，请说明理由；

(2) 求点  $C$  到平面  $BC_1M$  的距离。



20. 元宵佳节，是民间最重要的民俗节日之一，我们梅州多地都会举行各种各样的民俗活动，如五华县河东镇的“迎灯”、丰顺县埔寨镇的“火龙”、大埔县百侯镇的“迎龙珠灯”等系列活动。在某庆祝活动现场，为了解观众对该活动的观感情况（“一般”或“激动”），现从该活动现场的观众中随机抽取 200 名，得到下表：

	一般	激动	总计
男性		90	120
女性	25		
总计			200

(1) 填补上面的  $2 \times 2$  列联表，并依据小概率值  $\alpha = 0.1$  的独立性检验，能否认为性别与对该活动的观感程度有关？

(2) 该活动现场还举行了有奖促销活动，凡当天消费每满 300 元，可抽奖一次。抽奖方案是：从装有 3 个红球和 3 个白球（形状、大小、质地完全相同）的抽奖箱里一次性摸出 2 个球，若摸出 2 个红球，则可获得 100 元现金的返现；若摸出 1 个红球，则可获得 50 元现金的返现；若没摸出红球，则不能获得任何现金返现。若某观众当天消费 600 元，记该观众参加抽奖获得的返现金额为  $X$ ，求随机变量  $X$  的分布列和数学期望。

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中  $n = a+b+c+d$ 。

$\alpha$	0.100	0.050	0.010	0.001
$\chi_\alpha$	2.706	3.841	6.635	10.828

21. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $|F_1F_2| = 2\sqrt{3}$ ,

且双曲线  $E$  经过点  $A(\sqrt{3}, 2)$ .

(1) 求双曲线  $E$  的方程;

(2) 过点  $P(2, 1)$  作动直线  $l$ , 与双曲线的左、右支分别交于点  $M, N$ , 在线段  $MN$  上

取异于点  $M, N$  的点  $H$ , 满足  $\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{|MH|}{|HN|}$ , 求证: 点  $H$  恒在一条定直线上.

22. 已知函数  $f(x) = e^{x-1} - a \ln x$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 当  $x \in [0, \pi]$  时,  $2f(x+1) - \cos x \geq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.