

# 2023 北京清华附中初三 2 月开学考

## 数 学

班级：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

### 一、选择题（共 16 分，每题 2 分。每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1. 4 月 24 日是中国航天日。1970 年的这一天，我国自行设计、制造的第一颗人造地球卫星“东方红一号”成功发射，标志着中国从此进入了太空时代。它的运行轨道，距地球最近点 439000 米。将 439000 用科学记数法表示应为（ ）

- A.  $0.439 \times 10^6$       B.  $4.39 \times 10^6$       C.  $4.39 \times 10^5$       D.  $439 \times 10^3$

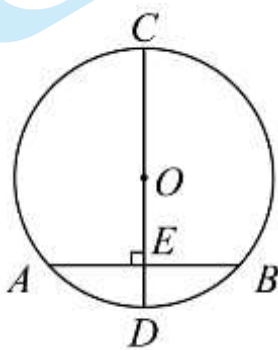
2. 抛物线  $y = x^2 - 4x + 5$  的顶点坐标是（ ）

- A.  $(-2, 1)$       B.  $(2, 1)$       C.  $(-2, -1)$       D.  $(2, -1)$

3. 如果两个相似三角形的面积比是 1:4，那么它们的周长比是（ ）

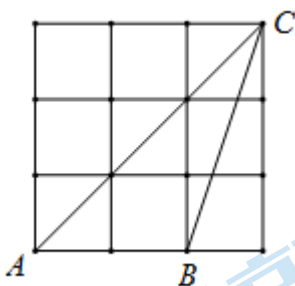
- A. 1:16      B. 1:6      C. 1:4      D. 1:2

4. 如图， $AB$  是  $\odot O$  的一条弦，直径是  $CD$ ，若  $CD \perp AB$ ，垂足为  $E$ ， $OE = 3$ ， $DE = 2$ ，则  $AB$  的长度为（ ）



- A. 5      B. 6      C. 8      D. 10

5. 如图， $\triangle ABC$  的顶点都在正方形网格的格点上，则  $\tan \angle ACB$  的值为（ ）



- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{3}{5}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{1}{2}$

6. 不透明的袋子中装有两个小球，上面分别写着“1”，“2”，除数字外两个小球无其他差别。从中随机摸出一个小球，记录其数字，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，记录其数字，那么两次记录的数字之和

为3的概率是( )

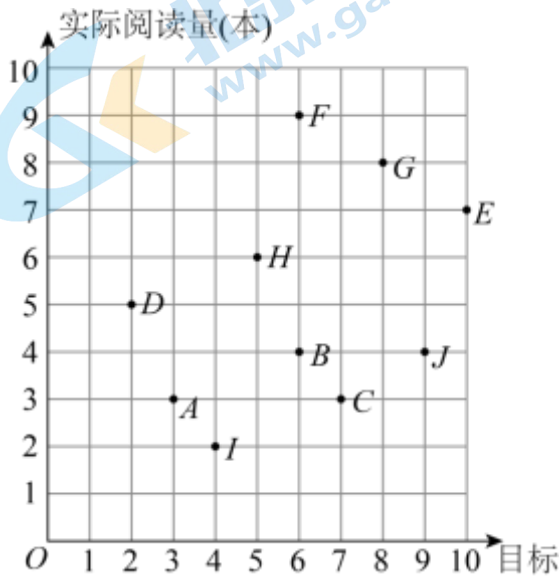
- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

7. 某校体育节有13名同学参加女子百米赛跑, 她们预赛的成绩各不相同, 取前6名参加决赛. 小明已经知道了自己的成绩, 她想知道自己能否进入决赛, 还需要知道这13名同学成绩的( )

- A. 中位数                      B. 众数                      C. 平均数                      D. 加权平均数

8. 目标完成率, 一般是指个体的实际完成量与目标完成量的比值, 树立明确具体的目标, 能够促使人们更好地完成任务. 某读书会有10位成员(编号分别为A-J), 如图是根据他们年初制定的目标阅读量和年末实际完成情况绘制的统计图, 下列结论正确的有( )

- ①目标完成率为100%的是A,G;  
②目标阅读量与实际阅读量相差最多的是J;  
③目标完成率最高的是D, 最低的是C;  
④目标完成率超过75%且实际阅读量不少于5本的有三人.



- A. ①②                      B. ①②③                      C. ①③④                      D. ①②③④

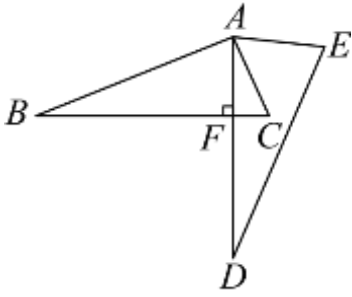
## 二、填空题(共16分, 每题2分)

9. 若 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义, 则 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

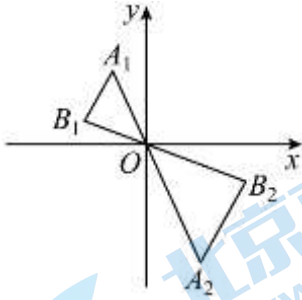
10. 若点 $A(-1, y_1)$ ,  $B(\frac{1}{2}, y_2)$ ,  $C(2, y_3)$ 在抛物线 $y=(x-2)^2+k$ 上, 则 $y_1, y_2, y_3$ 的大小关系为\_\_\_\_\_ (用“>”连接)

11. 毕业之际, 九年级数学兴趣小组的同学相约到某礼品店购买礼品, 每两个同学都相互赠送一件礼品, 共购买礼品30件, 设该数学兴趣小组有 $x$ 人, 根据题意, 可列方程为\_\_\_\_\_.

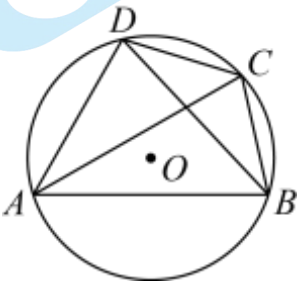
12. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转一定角度得到 $\triangle ADE$ , 若 $\angle CAE = 65^\circ$ ,  $\angle E = 70^\circ$ , 且 $AD \perp BC$ , 则 $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_.



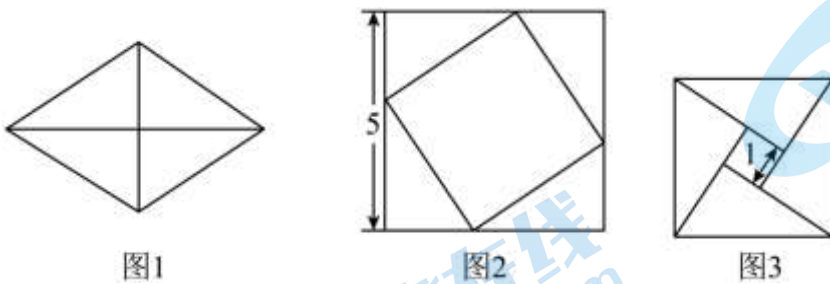
13. 如图，已知  $\triangle A_1OB_1$  与  $\triangle A_2OB_2$  位似，且  $\triangle A_1OB_1$  与  $\triangle A_2OB_2$  的周长之比为 1:2，点  $A_1$  的坐标为  $(-1, 2)$ ，则点  $A_2$  的坐标为\_\_\_\_\_。



14. 如图，点  $A, B, C, D$  在  $\odot O$  上， $CB = CD$ ， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $\angle ACD = 50^\circ$ ，则  $\angle ADB =$ \_\_\_\_\_。



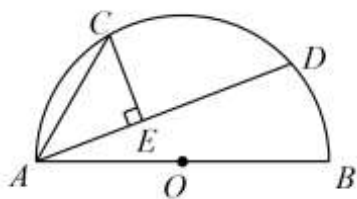
15. 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图 2，图 3 所示的正方形，则图 1 中菱形的面积为\_\_\_\_\_。



16. 如图， $AB$  是半  $\odot O$  的直径，点  $C$  在半  $\odot O$  上， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $AB = 10$ ，点  $D$  是弧  $BC$  上的一个动点（可以和点  $B, C$  重合），连接  $AD$ ，过点  $C$  作  $CE \perp AD$  于点  $D$ 。下列结论正确的是\_\_\_\_\_。（填写所有正确选项的序号）

- ①  $AC = 5$ ；
- ② 连接  $CD, BD$ ，当  $\triangle ACD$  与  $\triangle ABD$  的面积比为 1:2 时， $AD = 5\sqrt{3}$ ；

③在点  $D$  从点  $C$  移动到点  $B$  的过程中，点  $E$  所走过的路径长为  $\frac{5\pi}{3}$ .



三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题每小题 5 分，第 22-24 题每小题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题每小题 7 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

17. 计算： $|\sqrt{3}| - (3 - \pi)^0 + 2 \sin 60^\circ + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ .

18. 已知  $x^2 - 2x - 4 = 0$ ，求代数式  $(x - 2)^2 + (x + y)(x - y) + y^2$  的值.

19. 已知： $\angle AOB$ ， $D$  为射线  $OA$  上一定点.

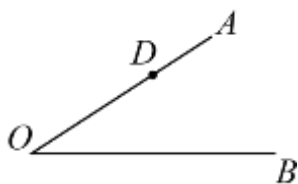
求作：在  $OB$  边上作点  $C$ ，使  $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle AOB$ .

作法：①以  $O$  为圆心， $OD$  为半径画弧，交射线  $OB$  于点  $E$ ，交射线  $OA$  反向延长线于点  $F$ ；

②以  $F$  为圆心， $DE$  长为半径画弧，交弧  $EF$  于点  $M$ ；

③连接  $DM$ ，交射线  $OB$  于点  $C$ .

则点  $C$  即为所求.



根据作法解决问题：

(1) 根据作法补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下面的证明：

证明：连接  $DE$ ， $OM$ ， $FM$  .

$\because M, E, F$  在  $\odot O$  上，

$\therefore \angle FDM = \frac{1}{2} \angle FOM$  ( ) (填写推理依据)

$\because$  在  $\odot O$  中， $DE = FM$

$\therefore \angle DOE = ( )$ . ( ) (填写推理依据).

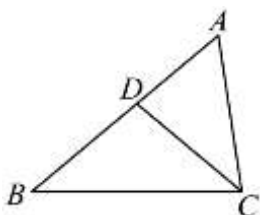
$\therefore \angle ODC = \frac{1}{2} \angle AOB$ .

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 2x + k - 2 = 0$  有两个不相等的实数根.

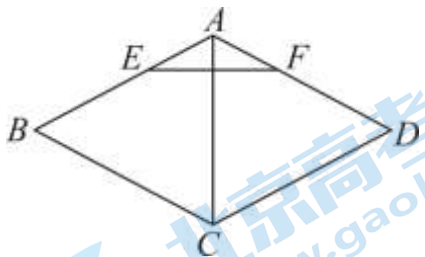
(1) 求  $k$  的取值范围;

(2) 若  $k$  为正整数, 且该方程的根都是整数, 求  $k$  的值.

21. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为  $AB$  上一点,  $\angle ACD = \angle B$ ,  $AC = 6$ ,  $AD = 4$ . 求  $AB$  的长.



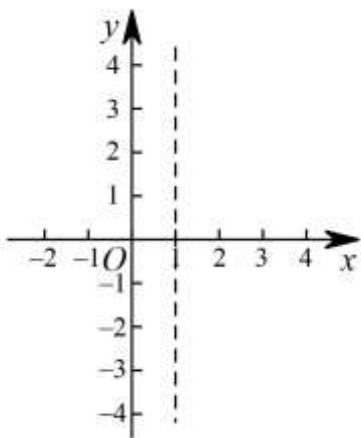
22. 如图, 菱形  $ABCD$  中,  $AC$  为对角线, 点  $E, F$  分别在  $AB, AD$  上,  $BE = DF$ , 连接  $EF$ .



(1) 求证:  $AC \perp EF$ ;

(2) 连接  $BD$  交  $AC$  于点  $O$ , 若  $E$  为  $AB$  中点,  $BD = 4$ ,  $\tan \angle ABD = \frac{1}{2}$ , 求  $OE$  的长.

23. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $x = 1$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 直线  $l_1: y = kx - 2$  经过点  $A$ , 且与  $y$  轴交于点  $B$ .

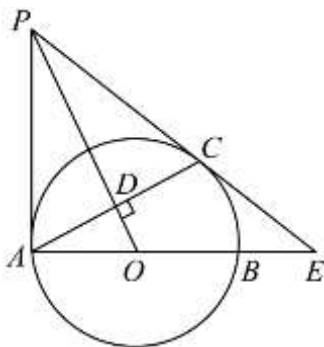


(1) 求点  $A$  和点  $B$  的坐标及直线  $l_1$  的解析式;

(2) 直线  $l_2$  与直线  $l_1$  关于直线  $x = 1$  对称, 若直线  $y = m$  与直线  $l_1, l_2$  围成的区域  $W$  内 (不包含边界) 恰有 1 个整点, 直接写出  $m$  的取值范围. (注: 横、纵坐标都是整数的点叫做整点.)

24. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $C$  是  $\odot O$  上一点,  $OD \perp AC$  于点  $D$ , 过点  $A$  作  $\odot O$  的切线, 交  $OD$  的延长线于点  $P$ , 连接  $PC$  并延长与  $AB$  的延长线交于点  $E$ .





(1) 求证:  $PC$  是  $\odot O$  的切线;

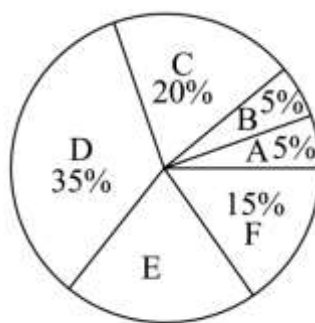
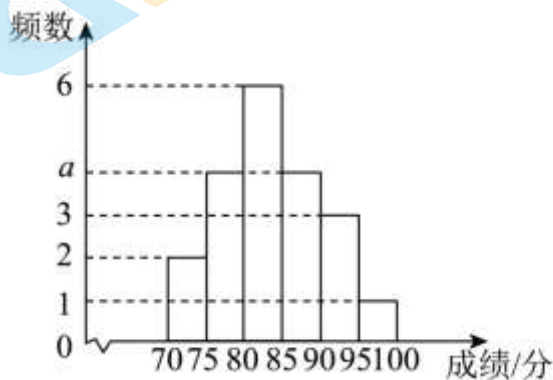
(2) 若  $PC = 6, \tan E = \frac{3}{4}$ , 求  $BE$  的长.

25. 某校九年级举办“自强不息·百题闯关”活动, 分为自强赛和不息赛. 已知年级所有学生都分别参加了两个阶段的活动. 为了解年级活动情况, 现在随机抽取  $n$  名学生, 将他们两次得分情况分别按以下六组进行整理 (得分用  $x$  表示);

$A: 70 \leq x < 75, B: 75 \leq x < 80, C: 80 \leq x < 85,$

$D: 85 \leq x < 90, E: 90 \leq x < 95, F: 95 \leq x \leq 100,$

并绘制自强赛测试成绩频数分布直方图和不息赛测试成绩扇形统计图, 部分信息如下:



已知不息赛测试成绩  $D$  组的全部数据如下:

86, 85, 87, 86, 85, 89, 88.

请根据以上信息, 完成下列问题:

(1)  $n =$  \_\_\_\_\_,  $a =$  \_\_\_\_\_;

(2) 不息赛测试成绩的中位数是 \_\_\_\_\_;

(3) 若测试成绩不低于 90 分, 则认定该学生获得“闯关之星”称号, 请说明在抽取的  $n$  名学生中, 自强赛和不息赛同时获得“闯关之星”称号的人数至多是多少? 并给出理由.

26. 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = ax^2 - (a+2)x + 2$  经过点  $A(-2, t), B(m, p)$ .

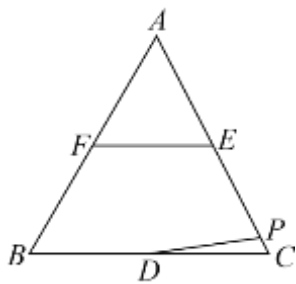
(1) 若  $t = 0$ ,

①求此抛物线的对称轴;

②当  $p < t$  时, 直接写出  $m$  的取值范围;

(2) 若  $t < 0$ , 点  $C(n, q)$  在该抛物线上,  $m < n$  且  $3m + 3n \leq -4$ , 请比较  $p, q$  的大小, 并说明理由.

27. 如图，在等边  $\triangle ABC$  中， $D, E, F$  分别是  $BC, CA, AB$  边中点，点  $P$  为  $CE$  上一点，作线段  $DP$  的垂直平分线交线段  $EF$  于点  $M$ ，连接  $AD, AM, MP$ 。



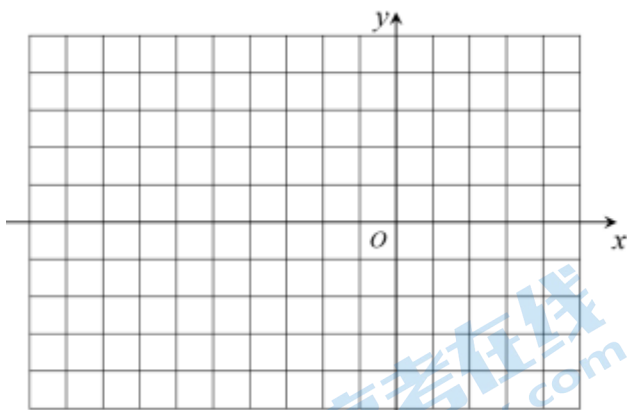
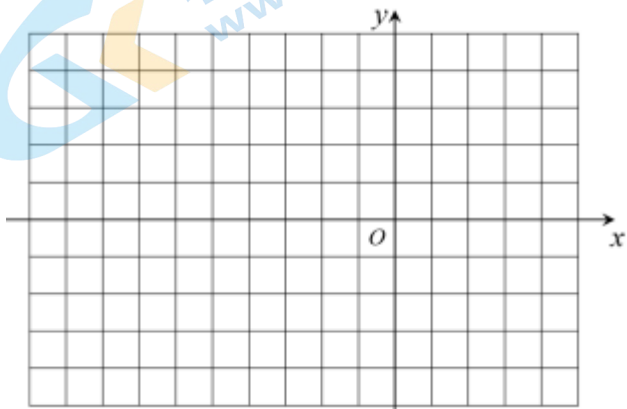
(1) 依题意补全图形；

(2) 若  $\angle MAD = \alpha$ ,

① 请用含  $\alpha$  的式子表示  $\angle AMP$ ；

② 判断  $\triangle DMP$  的形状，并证明。

28. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，对于点  $P$  和图形  $M$ ，若图形  $M$  上存在点  $Q$ ，使得直线  $PQ$  经过第四象限，则称点  $P$  是图形  $M$  的“四象点”。已知点  $A(-2,4), B(2,1)$ 。



(1) 在点  $P_1(-4,-2), P_2(-1,-2), P_3(1,-2)$  中，\_\_\_\_\_是线段  $AB$  的四象点；

(2) 已知点  $C(t,0), D(t+4,0)$ ，若等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点，求  $t$  的取值范围；

(3) 已知以  $T\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$  为圆心且半径为 2 的  $\odot T$ ，若线段  $AB$  上的点  $P$  是  $\odot T$  的四象点，请直接写出点  $P$

的横坐标  $x_p$  的取值范围.



关注北京高考在线官方微信：**京考一点通**（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。



## 参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分。每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1. 【答案】C

【分析】科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数。确定  $n$  的值时，要看把原数变成  $a$  时，小数点移动了多少位， $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值  $\geq 10$  时， $n$  是正数；当原数的绝对值  $< 1$  时， $n$  是负数。

【详解】 $439000 = 4.39 \times 10^5$ 。

故选：C。

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法。科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数，表示时关键要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值。

2. 【答案】B

【分析】利用配方法化成顶点式求解即可。

【详解】 $\because y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ ，

$\therefore$  顶点坐标为  $(2, 1)$ ，

故选：B。

【点睛】本题考查了二次函数的性质，化成顶点解析式是求抛物线的顶点坐标的一种方法，也可以直接代入顶点坐标公式。

3. 【答案】D

【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出相似比，根据相似三角形周长的比等于相似比解答即可。

【详解】解： $\because$  两个相似三角形的面积比是  $1:4$ ，

$\therefore$  两个相似三角形的相似比是  $1:2$ ，

$\therefore$  两个相似三角形的周长比是  $1:2$ ，

故选 D。

【点睛】本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形周长的比等于相似比、相似三角形面积的比等于相似比的平方是解题的关键。

4. 【答案】C

【分析】如图所示，连接  $OA$ ，先由垂径定理得到  $AB = 2AE$ ，再求出  $OA = 5$ ，进而利用勾股定理求出  $AE$  的长即可得到答案。

【详解】解：如图所示，连接  $OA$ ，

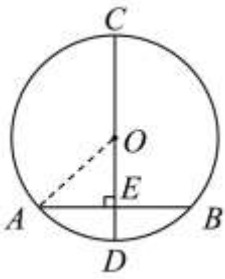
$\because CD$  是直径， $CD \perp AB$ ，

$\therefore AB = 2AE$ ， $OA = OD = OE + DE = 5$ ，

在  $Rt\triangle AOE$  中，由勾股定理得  $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 4$ ，

$\therefore AB = 2AE = 8,$

故选 C.



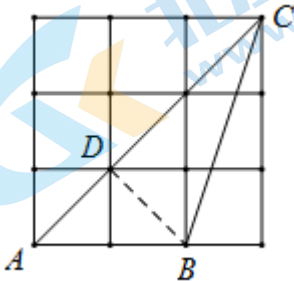
【点睛】本题主要考查了垂径定理，勾股定理，正确作出辅助线构造直角三角形是解

题的关键.

5. 【答案】D

【分析】根据题意连接 BD 可知  $\angle ADB = 90^\circ$ ，进而利用勾股定理得出 BD 和 CD，最后即可得出  $\tan \angle ACB$  的值.

【详解】解：如图，连接 BD，



根据图象可知  $\angle ADB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ，

则有  $BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, CD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

所以  $\tan \angle ACB = \frac{BD}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ .

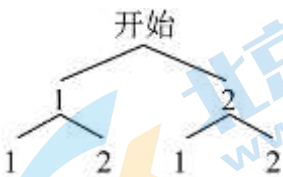
故选：D.

【点睛】本题考查网格与勾股定理以及锐角三角函数的定义，注意掌握在直角三角形中，一锐角的正切等于它的对边与邻边的比值.

6. 【答案】C

【分析】先根据题意画出树状图，再利用概率公式计算即可.

【详解】解：画树状图如下：



所以共 4 种情况：其中满足题意的有两种，

所以两次记录的数字之和为3的概率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

故选 C.

【点睛】本题考查的是画树状图求解概率，掌握画树状图求概率是解题的关键.

7. 【答案】A

【分析】某校体育节有13名同学参加女子百米赛跑，由于比赛取前6名参加决赛，小明已经知道了自己的成绩，她想知道自己能否进入决赛，根据中位数的意义分析即可得到结果.

【详解】解：某校体育节有13名同学参加女子百米赛跑，她们预赛的成绩各不相同，由于比赛取前6名参加决赛，将这13名同学参加女子百米赛跑的成绩按照从小到大的顺序排列后，中位数及中位数前面的共有7名同学，从而只要知道自己的成绩及中位数即可知道自己能否进入决赛，

故选：A.

【点睛】本题考查利用统计数据做决策，熟练掌握中位数的意义，理解中位数的求法是解决问题的关键.

8. 【答案】B

【分析】根据统计图中的数据分析即可得到结论.

【详解】解： $\because A、G$ 的实际完成量与目标完成量都相同，

$\therefore A、G$ 的目标完成率为100%，故①正确；

$\because A、G$ 相差为0， $B$ 相差2， $C$ 相差4， $D$ 相差3， $E$ 相差3， $F$ 相差3， $H$ 相差1， $I$ 相差2， $J$ 相差5，

$\therefore$ 目标阅读量与实际阅读量相差最多的是 $J$ ，故②正确；

从 $A$ 到 $J$ 的完成度分别为100%， $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{7}$ ， $\frac{5}{2}$ ， $\frac{7}{10}$ ， $\frac{3}{2}$ ，100%， $\frac{6}{5}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{4}{9}$ ，

$\therefore$ 完成度最高的时 $D$ ，最低的是 $C$ ，故③正确；

目标完成率超过75%且实际阅读量不少于5本的有 $D、H、F、G$ 共4人，故④错误；

故选 B.

【点睛】本题考查统计图的实际应用，由统计图得出必要的信息和数据是解答本题的关键.

## 二、填空题（共16分，每题2分）

9. 【答案】 $x \geq -1$

【分析】根据二次根式有意义的条件：被开方数为非负数，列不等式求解即可.

【详解】由题意可知 $x+1 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq -1$ .

故答案为： $x \geq -1$ .

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件，明确被开方数为非负数是解题关键.

10. 【答案】 $y_1 > y_2 > y_3$

【分析】先求出抛物线的对称轴和开口方向，再根据开口向上离对称轴越远函数值越大进行求解即可.

【详解】解： $\because$ 抛物线解析式为 $y = (x-2)^2 + k$ ，

∴ 抛物线开口向上，对称轴为直线  $x=2$ ，

∴ 离对称轴越远函数值越大，

∵ 点  $A(-1, y_1)$ ， $B(\frac{1}{2}, y_2)$ ， $C(2, y_3)$  在抛物线  $y=(x-2)^2+k$  上， $2-(-1)>2-\frac{1}{2}>2-2$ ，

∴  $y_1 > y_2 > y_3$ ，

故答案为： $y_1 > y_2 > y_3$ 。

【点睛】本题主要考查了比较二次函数函数值的大小，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键。

11. 【答案】 $x(x-1)=30$

【分析】由题意，列出一元二次方程即可得到答案。

【详解】解：设该数学兴趣小组有  $x$  人，根据题意得  $x(x-1)=30$ ，

故答案为： $x(x-1)=30$ 。

【点睛】本题考查一元二次方程解实际应用题，根据题意建立等量关系是解题的关键。

12. 【答案】 $85^\circ$

【分析】由旋转的性质可知， $\angle C=\angle E$ ， $\angle BAC=\angle DAE$ ，又因为  $\angle E=70^\circ$ ， $BC$  垂直于  $AD$ ，可得  $\angle DAC=20^\circ$ ，即可求得  $\angle BAC$  的度数。

【详解】解：∵  $\triangle ABC$  绕点  $A$  逆时针旋转一定角度得到  $\triangle ADE$ ，

∴  $\angle C=\angle E$ ， $\angle BAC=\angle DAE$ ，

∵  $\angle E=70^\circ$ ， $BC$  垂直于  $AD$ ，

∴  $\angle DAC=90^\circ - \angle C=90^\circ - \angle E=20^\circ$ ，

∴  $\angle CAE=65^\circ$ ，

∴  $\angle BAC=\angle DAE=\angle DAC + \angle CAE=20^\circ + 65^\circ =85^\circ$ 。

故答案为  $85^\circ$ 。

【点睛】本题主要考查角的概念及其计算和图形的旋转，熟练掌握旋转的性质是解答本题的关键。

13. 【答案】 $(2, -4)$

【分析】根据在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为  $k$ ，那么位似图形对应点的坐标的比等于  $k$  或  $-k$ ，即可求得答案。

【详解】解：∵  $\triangle A_1OB_1$  与  $\triangle A_2OB_2$  位似，且  $\triangle A_1OB_1$  与  $\triangle A_2OB_2$  的周长之比为  $1:2$ ，

∴  $\triangle A_1OB_1$  与  $\triangle A_2OB_2$  的位似比为  $1:2$ ，

∴ 点  $A_1$  的坐标为  $(-1, 2)$ ，

∴ 点  $A_2$  的坐标为  $(2, -4)$ ，

故答案为： $(2, -4)$ 。

【点睛】本题主要考查了位似图形的性质，正确求出对应的位似比是解题的关键。

14. 【答案】 $70^\circ$

【分析】根据三角形内角和定理，得出  $\angle ADC = 100^\circ$ ，再根据同弧所对的圆周角相等，得到  $\angle BDC = \angle CAD = 30^\circ$ ，即可求出  $\angle ADB$  的度数.

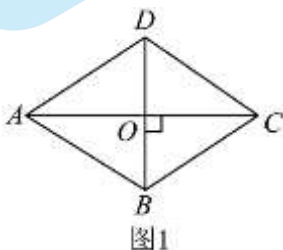
【详解】解：  $\because \angle CAD = 30^\circ, \angle ACD = 50^\circ,$   
 $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle CAD - \angle ACD = 100^\circ,$   
 $\therefore CB = CD,$   
 $\therefore \angle BDC = \angle CAD = 30^\circ,$   
 $\therefore \angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ,$   
故答案为：  $70^\circ$ .

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，圆的性质，解题关键是掌握同弧所对的圆周角相等.

15. 【答案】 12

【分析】由菱形的性质得出  $OA=OC, OB=OD, AC \perp BD$ ，设  $OA=x, OB=y$ ，由题意得：
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases},$$
 解得：
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases},$$
 得出  $AC=2OA=6, BD=2OB=4$ ，即可得出菱形的面积.

【详解】解：如图 1 所示：



$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore OA=OC, OB=OD, AC \perp BD,$

设  $OA=x, OB=y,$

由题意得：
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases},$$
 解得：
$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases},$$

$\therefore AC=2OA=6, BD=2OB=4,$

$\therefore$  菱形  $ABCD$  的面积  $= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12;$

故答案为 12.

【点睛】本题考查了菱形的性质、正方形的性质、二元一次方程组的应用；熟练掌握正方形和菱形的性质，由题意列出方程组是解题的关键.

16. 【答案】 ①②③

【分析】如图 1 所示，连接  $OC$ ，证明  $\triangle AOC$  是等边三角形，得到  $AC = OA$ ，再由  $AB$  是半  $\odot O$  的直



径,  $AB = 10$ , 即可判断①; 求出  $\angle ADB = 90^\circ$ , 根据三角形面积公式得到  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD$ ,

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE$ , 由  $\triangle ACD$  与  $\triangle ABD$  的面积比为  $1:2$ , 得到  $\frac{CE}{BD} = \frac{1}{2}$ , 则

$\sin \angle BAD = \sin \angle CAE$ , 即可得到  $\angle BAD = \angle CAE = 30^\circ$ , 则  $AD = AB \cdot \cos \angle BAD = 5\sqrt{3}$ , 即可判断②; 如图 2 所示, 过点  $C$  作  $CH \perp AB$  于  $H$ , 取  $AC$  的中点  $M$ , 连接  $MH$ , 由  $\angle AEC = 90^\circ$ , 得到点  $E$  在以  $M$  为圆心,  $AC$  为直径的圆上运动, 即点  $E$  的运动轨迹即为弧  $CH$ , 由此即可判断③.

【详解】解: 如图 1 所示, 连接  $OC$ ,

$\because OA = OC, \angle OAC = 60^\circ$ ,

$\therefore \triangle AOC$  是等边三角形,

$\therefore AC = OA$ ,

$\because AB$  是半  $\odot O$  的直径,  $AB = 10$ ,

$\therefore AC = OA = 5$ , 故①正确;

$\because AB$  是半  $\odot O$  的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ,

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BD$ ,

$\because AD \perp CE$ ,

$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE$ ,

$\because \triangle ACD$  与  $\triangle ABD$  的面积比为  $1:2$ ,

$\therefore \frac{\frac{1}{2} AD \cdot CE}{\frac{1}{2} AD \cdot BD} = \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{CE}{BD} = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore \sin \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{2CE}{2AC} = \frac{CE}{AC} = \sin \angle CAE$ ,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 30^\circ$ ,

$\therefore AD = AB \cdot \cos \angle BAD = 5\sqrt{3}$ , 故②正确;

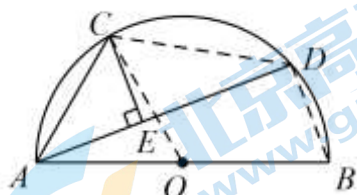


图1

如图 2 所示, 过点  $C$  作  $CH \perp AB$  于  $H$ , 取  $AC$  的中点  $M$ , 连接  $MH$ ,



$\because \angle AEC = 90^\circ$ ,

$\therefore$  点  $E$  在以  $M$  为圆心,  $AC$  为直径的圆上运动, 即点  $E$  的运动轨迹即为弧  $CH$ ,

$\because MA = MH, \angle MAH = 60^\circ$ ,

$\therefore \triangle AMH$  是等边三角形,

$\therefore \angle AMH = 60^\circ$ ,

$\therefore \angle CMH = 120^\circ$ ,

$\therefore$  点  $E$  的运动路径长为  $\frac{120 \times \pi \times \frac{5}{2}}{180} = \frac{5\pi}{3}$ , 故③正确;

故答案为: ①②③.

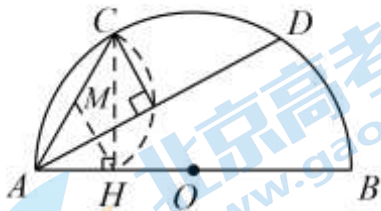


图2

【点睛】本题主要考查了求弧长, 解直角三角形, 圆周角定理, 等

边三角形的性质与判定, 正确作出辅助线是解题的关键.

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-21 题每小题 5 分, 第 22-24 题每小题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题每小题 7 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

17. 【答案】  $2\sqrt{3} + 2$

【分析】先计算特殊角三角函数值, 零指数幂和负整数指数幂, 再根据实数的混合计算法则求解即可.

【详解】解: 原式  $= \sqrt{3} - 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3$

$$= \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 3$$

$$= 2\sqrt{3} + 2.$$

【点睛】本题主要考查了实数的混合计算, 零指数幂, 负整数指数幂和特殊角三角函数值, 熟知相关计算法则是解题的关键.

18. 【答案】 12

【分析】先根据完全平方公式和平方差公式计算, 再合并, 然后把  $x^2 - 2x = 4$  代入, 即可求解.

【详解】解:  $(x-2)^2 + (x+y)(x-y) + y^2$

$$= x^2 - 4x + 4 + x^2 - y^2 + y^2$$

$$= 2x^2 - 4x + 4$$

$$= 2(x^2 - 2x) + 4$$

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

$$\because x^2 - 2x - 4 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x = 4,$$

$$\therefore \text{原式} = 2 \times 4 + 4 = 12.$$

【点睛】本题主要考查了整式的混合运算，熟练掌握完全平方公式和平方差公式是解题的关键。

19. 【答案】(1) 见解析 (2) 圆周角定理， $\angle FOM$ ，同圆中，同弧所对的圆心角相等

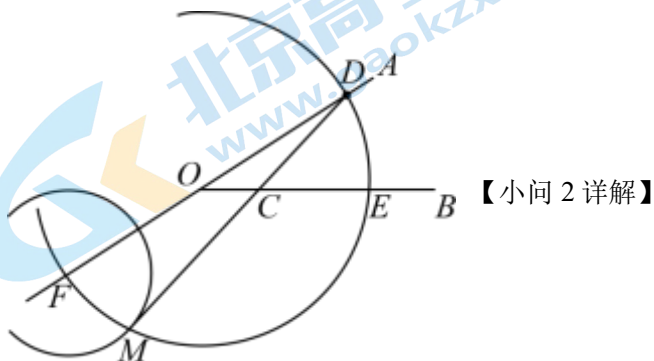
【分析】(1) 根据题意作图即可；

(2) 连接  $DE$ ,  $OM$ ,  $FM$ ，由圆周角定理得到  $\angle FDM = \frac{1}{2} \angle FOM$ ，再证明  $\angle DOE = \angle FOM$ ，即可

证明  $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle AOB$ 。

【小问 1 详解】

解：如图所示，即为所求；



证明：连接  $DE$ ,  $OM$ ,  $FM$ 。

$\because M, E, F$  在  $\odot O$  上，

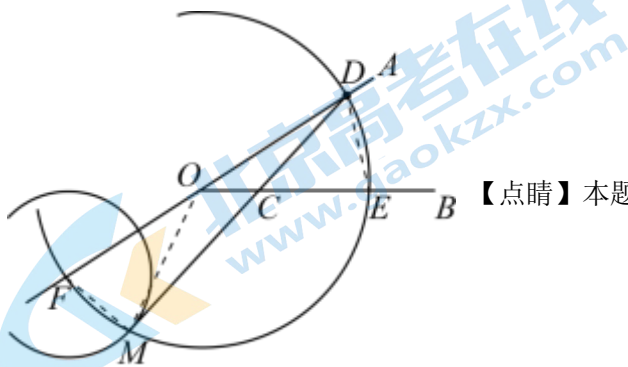
$$\therefore \angle FDM = \frac{1}{2} \angle FOM \quad (\text{圆周角定理})$$

$\because$  在  $\odot O$  中， $DE = FM$

$\therefore \angle DOE = \angle FOM$ 。（同圆中，同弧所对的圆心角相等）

$$\therefore \angle ODC = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

故答案为：圆周角定理， $\angle FOM$ ，同圆中，同弧所对的圆心角相等。



角定理是解题的关键。

20. 【答案】(1)  $k < 3$ ; (2)  $k$  的值为 2.

【详解】分析：(1) 根据一元二次方程的根的判别式，建立关于  $k$  的不等式，求出  $k$  的取值范围；

(2) 先确定  $k=1$  或 2，再根据方程的根都是整数，分类讨论即可.

详解：(1) 根据题意得  $\Delta = 2^2 - 4(k-2) > 0$ ,

解得  $k < 3$ ;

(2)  $\because k$  为正整数,

$\therefore k=1$  或  $k=2$ ,

当  $k=1$  时,  $\Delta=8$ , 所以该方程的根为无理数,

当  $k=2$  是, 原方程为  $x^2 + 2x = 0$ , 解得  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$ ,

所有  $k$  的值为 2.

点睛：考查一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ ,

当  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  时, 方程有两个不相等的实数根.

当  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  时, 方程有两个相等的实数根.

当  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  时, 方程没有实数根.

21. 【答案】 $AB$  的长为 9.

【分析】根据已知条件证明  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ , 得到  $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$  求出即可.

【详解】解： $\because \angle ACD = \angle B$ ,  $\angle A = \angle A$ ,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore AB = \frac{AC^2}{AD} = \frac{36}{4} = 9.$$

故  $AB$  的长为 9.

【点睛】此题主要考查相似三角形的判定与性质，解题的关键是根据相似三角形的性质求解.

22. 【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

【分析】(1) 根据菱形的性质得到  $AB = AD$ ,  $AC$  平分  $\angle BAD$ , 再证明  $AE = AF$ , 即可利用三线合一定理证明  $AC \perp EF$ ;

(2) 先由菱形的性质得到  $AC \perp BD$ ,  $OB = \frac{1}{2}BD = 2$ , 再解直角三角形求出  $OA = 1$ , 进而求出

$AB = \sqrt{5}$ , 则由直角三角形斜边上的中线的性质可得答案.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形  $ABCD$  是菱形，

∴  $AB = AD$ ， $AC$  平分  $\angle BAD$ ，

∴  $BE = DF$ ，

∴  $AB - BE = AD - DF$ ，即  $AE = AF$ ，

∴  $AC \perp EF$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 四边形  $ABCD$  是菱形，

∴  $AC \perp BD$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 2$ ，

∴  $\tan \angle ABD = \frac{1}{2}$ ，

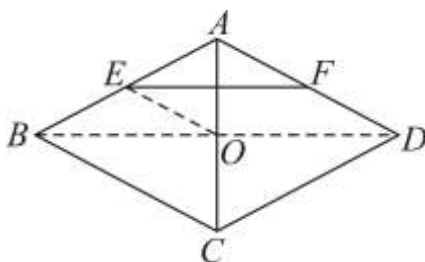
∴ 在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中， $\tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$ ，

∴  $OA = 1$ ，

∴  $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{5}$ ，

∴  $E$  为  $AB$  中点，

∴  $OE = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。



【点睛】本题主要考查了菱形的性质，等腰三角形的性质与判定，解

直角三角形，直角三角形斜边上的中线的性质，勾股定理等等，灵活运用所学知识是解题的关键。

23. 【答案】(1)  $A(1,0)$ ， $B(0,-2)$ ， $y = 2x - 2$

(2)  $1 < m \leq 2$  或  $-2 \leq m < -1$

【分析】(1) 先求出点  $A$  的坐标，进而利用待定系数法求出直线  $l_1$  的解析式，再求出点  $B$  的坐标即可；

(2) 先根据对称性求出直线  $l_2$  的解析式，再结合函数图象求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 直线  $x = 1$  与  $x$  轴交于点  $A$ ，

∴  $A(1,0)$ ，

把  $A(1,0)$  代入  $y = kx - 2$  中得： $0 = k - 2$ ，

解得  $k = 2$ ，

∴ 直线  $l_1$  的解析式  $y = 2x - 2$ ，

在  $y = 2x - 2$  中, 当  $x = 0$  时,  $y = -2$ ,

$\therefore B(0, -2)$ ;

【小问 2 详解】

解: 设  $P(s, n)$  是直线  $l_2$  上一点, 则  $P(s, n)$  关于直线  $x = 1$  对称的点的坐标为  $(2 - s, n)$ ,

$\therefore$  直线  $l_2$  与直线  $l_1$  关于直线  $x = 1$  对称,

$\therefore$  点  $(2 - s, n)$  在直线  $l_1$  上,

$\therefore 2(2 - s) - 2 = n$ ,

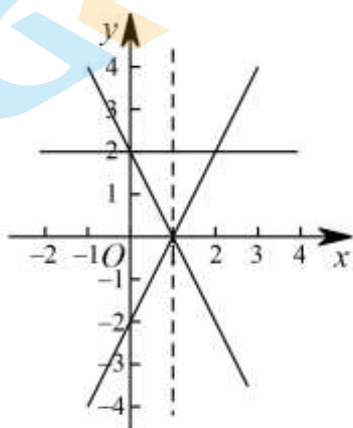
$\therefore n = -2s + 2$ ,

$\therefore$  直线  $l_2$  的解析式为  $y = -2x + 2$ ,

$\therefore$  直线  $y = m$  与直线  $l_1, l_2$  围成的区域  $W$  内 (不包含边界) 恰有 1 个整点,

$\therefore$  结合以下函数图象可知, 该整点只能是点  $(1, 1)$ ,

$\therefore 1 < m \leq 2$  或  $-2 \leq m < -1$ .



【点睛】本题主要考查了待定系数法求一次函数解析式, 一次函数与几

何变换, 利用数形结合的思想求解是解题的关键.

24. 【答案】(1) 证明见解析

(2) 2

【分析】(1) 如图, 连接  $OC$ , 先由垂径定理得到  $OP$  垂直平分  $AC$ , 得到  $PA = PC$ , 再证明  $\triangle OAP \cong \triangle COP$ , 得到  $\angle OCP = \angle OAP$ , 由  $PA$  是  $\odot O$  的切线, 推出  $\angle OCP = 90^\circ$ , 即  $OC \perp PC$ , 即可证明  $PC$  是  $\odot O$  的切线.

(2) 如图所示, 连接  $BC$ , 由  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 得到  $\angle ACB = 90^\circ = \angle ECO$ , 进而证明

$\angle ECB = \angle ACO$ , 进一步证明  $\triangle ECB \sim \triangle EAC$ , 推出  $BE = \frac{EC^2}{AE}$ , 在  $\text{Rt}\triangle PAE$  中,

$\tan E = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{4}$ ,  $PA = PC = 6$ , 由此求出  $AE = 8$ ,  $PE = 10$ , 则  $EC = PE - PC = 4$ , 即可得到

$$BE = \frac{EC^2}{AE} = 2.$$

【小问 1 详解】

解：如图，连接  $OC$ ，

$\because OD \perp AC$ ， $OD$  经过圆心，

$\therefore OP$  垂直平分  $AC$ ，

$\therefore PA = PC$ ，

在  $\triangle OAP$  和  $\triangle COP$  中，

$$\begin{cases} OA = OC \\ AP = CP, \\ OP = OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAP \cong \triangle COP (SAS)$ ，

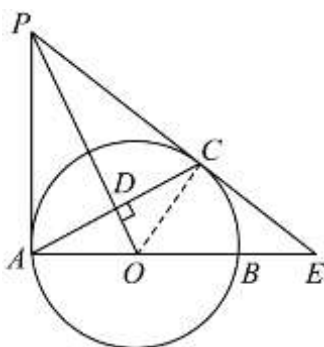
$\therefore \angle OCP = \angle OAP$ ，

$\because PA$  是  $\odot O$  的切线，

$\therefore \angle OAP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$ ，即  $OC \perp PC$ ，

$\therefore PC$  是  $\odot O$  的切线.



【小问 2 详解】

解：如图所示，连接  $BC$ ，

$\because AB$  是  $\odot O$  的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ = \angle ECO$ ，

$\therefore \angle ECB + \angle BCO = \angle BCO + \angle ACO$ ，即  $\angle ECB = \angle ACO$ ，

$\because OA = OC$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle ACO = \angle ECB$ ，

$\because \angle E = \angle E$ ，

$\therefore \triangle ECB \sim \triangle EAC$ ，

$\therefore EC : EA = EB : EC$ ，即  $BE = \frac{EC^2}{AE}$ ，



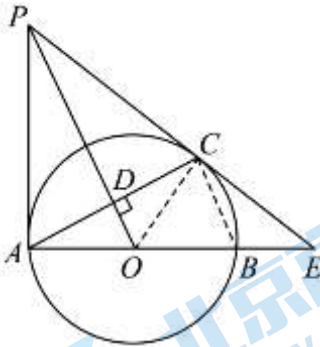
在  $\text{Rt}\triangle PAE$  中,  $\tan E = \frac{AP}{AE} = \frac{3}{4}$ ,  $PA = PC = 6$ ,

$$\therefore AE = 8,$$

$$\therefore PE = \sqrt{PA^2 + AE^2} = 10,$$

$$\therefore EC = PE - PC = 4,$$

$$\therefore BE = \frac{EC^2}{AE} = 2.$$



【点睛】本题主要考查了切线的判定, 相似三角形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 垂径定理, 勾股定理, 等边对等角等等, 正确作出辅助线是解题的关键.

25. 【答案】(1) 20, 4

(2) 86.5

(3) 自强赛和不息赛同时获得“闯关之星”称号的人数至多是 11 人.

【分析】(1) 根据不息赛 D 等级的人数以及所占比例可求得样本容量  $n$ , 再用样本容量减去自强赛其他等级的人数即可求得  $a$  的值;

(2) 根据中位数的定义即可求解;

(3) 求出自强赛和不息赛同时获得“闯关之星”称号的人数和即可.

【小问 1 详解】

解:  $n = 7 \div 35\% = 20$ ,

$$a = \frac{20 - 1 - 2 - 3 - 6}{2} = 4,$$

故答案为: 20, 4;

【小问 2 详解】

解: 不息赛 A 等级的人数为:  $20 \times 5\% = 1$  (人);

B 等级的人数为:  $20 \times 5\% = 1$  (人);

C 等级的人数为:  $20 \times 35\% = 7$  (人);

D 等级的人数为:  $20 \times 20\% = 4$  (人);

将抽取的 20 名学生的成绩从小到大排列, 处于中间位置的两个数的平均数为  $\frac{86 + 87}{2} = 86.5$ ,

故答案为: 86.5

【小问3详解】

解：  $20 \times \frac{3+1}{20} + 20 \times (1-5\% - 5\% - 20\% - 35\%) = 4+7=11$  (人)；

答： 自强赛和不息赛同时获得“闯关之星”称号的人数至多是11人。

【点睛】 本题考查了频数分布直方图、扇形统计图，掌握“频率=频数÷总数”是正确解答的前提。

26. 【答案】 (1) ①  $x = -\frac{1}{2}$ ； ②  $x < -2$  或  $x > 1$

(2)  $p < q$ ，理由见解析

【分析】 (1) ①把点  $A(-2,0)$  代入  $y = ax^2 - (a+2)x + 2$ ，求出  $a$  的值，可求出抛物线解析式，再把解析式化为顶点式，即可求解； ②求出抛物线与  $x$  轴的另一个交点为  $(1,0)$ ，再根据二次函数的图象，即可求解；

(2) 把点  $A(-2,t)$  代入  $y = ax^2 - (a+2)x + 2$  可得  $t = 6a + 6$ ，再由  $t < 0$ ，可得  $a < -1$ ，  $-1 < \frac{1}{a} < 0$ ，

从而得到抛物线开口向下，抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{-(a+2)}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ ，然后根据

$3m + 3n \leq -4$ ，可得  $\frac{m+n}{2} \leq -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$ ，再根据  $m < n$ ，可得  $B(m,p)$  到对称轴的距离大于  $C(n,q)$  对称

轴的距离，即可求解。

【小问1详解】

解： ①当  $t = 0$  时，点  $A(-2,0)$ ，

把点  $A(-2,0)$  代入  $y = ax^2 - (a+2)x + 2$  得：

$$0 = 4a + 2(a+2) + 2,$$

解得：  $a = -1$ ，

∴ 该函数解析式为  $y = -x^2 - x + 2$ ，

$$\because y = -x^2 - x + 2 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

∴ 抛物线的对称轴为直线  $x = -\frac{1}{2}$ ；

②令  $y = 0$ ，则  $0 = -x^2 - x + 2$ ，

解得：  $x_1 = 1, x_2 = -2$ ，

∴ 抛物线与  $x$  轴的另一个交点为  $(1,0)$ ，

∴  $-1 < 0$ ，

∴ 抛物线开口向下，

∴当  $p < 0$  时,  $m$  的取值范围为  $x < -2$  或  $x > 1$ ;

【小问 2 详解】

解:  $p < q$ , 理由如下:

把点  $A(-2, t)$  代入  $y = ax^2 - (a+2)x + 2$  得:

$$t = 4a + 2(a+2) + 2 = 6a + 6,$$

$$\because t < 0,$$

$$\therefore 6a + 6 < 0,$$

$$\therefore a < -1,$$

$$\therefore -1 < \frac{1}{a} < 0,$$

$$\therefore \text{抛物线开口向下, 抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{-(a+2)}{2a} = \frac{a+2}{2a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} > -\frac{1}{2},$$

$$\therefore 3m + 3n \leq -4,$$

$$\therefore m + n \leq -\frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{m+n}{2} \leq -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2},$$

$$\therefore m < n,$$

∴  $B(m, p)$  到对称轴的距离大于  $C(n, q)$  到对称轴的距离,

$$\therefore p < q.$$

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

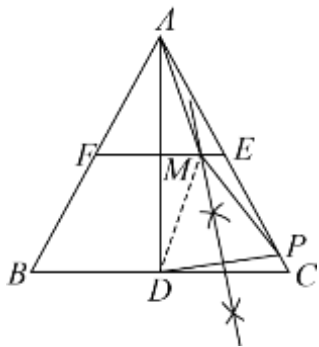
27. 【答案】(1) 见解析 (2) ①  $120^\circ + 2\alpha$ ; ②  $\triangle DMP$  是等边三角形, 证明见解析

【分析】(1) 根据线段垂直平分线的作图方法作图即可;

(2) ①如图所示, 连接  $DM, DE, DF$ , 由三线合一得到  $\angle DAC = 30^\circ$ , 由直角三角形斜边上的中线的性质得到  $DF = AF, DE = AE$ , 则  $EF$  垂直平分  $AD$ , 得到  $AM = DM$ , 同理得  $MD = MP$ , 则  $MA = MP$ , 根据等边对等角得到  $\angle MAP = \angle MPA = 30^\circ - \alpha$ , 则  $\angle AMP = 120^\circ + 2\alpha$ ; ②由三角形内角和定理求出  $\angle AMD = 180^\circ - 2\alpha$ , 再由周角的定义求出  $\angle DMP = 60^\circ$ , 由此即可证明  $\triangle DMP$  是等边三角形.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 即为所求;



【小问 2 详解】

解：①如图所示，连接  $DM$ ， $DE$ ， $DF$ ，

$\because \triangle ABC$  是等边三角形，点  $D$  为  $BC$  的中点，

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$\because E$ 、 $F$  分别是  $AB$ ， $AC$  的中点，

$$\therefore DF = AF, DE = AE,$$

$\therefore EF$  垂直平分  $AD$ ，

$$\therefore AM = DM,$$

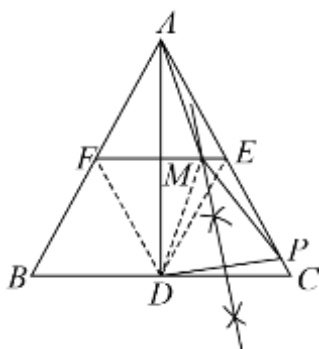
又  $\because M$  在  $DP$  的垂直平分线上，

$$\therefore MD = MP,$$

$$\therefore MA = MP,$$

$$\therefore \angle MAP = \angle MPA = \angle DAC - \angle MAD = 30^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle AMP = 180^\circ - \angle MAP - \angle MPA = 120^\circ + 2\alpha;$$



②  $\triangle DMP$  是等边三角形，证明如下：

由 (2) ① 得  $\angle MAD = \angle MDA = \alpha$ ，

$$\therefore \angle AMD = 180^\circ - \angle MAD - \angle MDA = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore \angle DMP = 360^\circ - \angle AMD - \angle AMP = 60^\circ,$$

又  $\because MD = MP$ ，

$\therefore \triangle DMP$  是等边三角形。

【点睛】本题主要考查了等边三角形的性质与判定，线段垂直平分线的性质与判定，线段垂直平分线的尺规作图，直角三角形的性质，三角形内角和定理等等，灵活运用所学知识是解题的关键。

28. 【答案】(1)  $P_2$ 、 $P_3$

$$(2) t \leq -4\sqrt{3} - 2$$

$$(3) -2 \leq x_p < -\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{2}{3} < x_p \leq 2$$

【分析】(1) 根据“四象点”的定义结合函数图象进行判断即可；

(2) 根据题意可知点  $E$  一定在  $x$  轴下方，进而得到点  $E$  一定要在第三象限，如图所示，过点  $E$  作  $EF \perp CD$  于  $F$ ，先求出  $CD = 4$ ， $F(t+2, 0)$ ，则  $CF = DF = 2$ ，利用勾股定理求出  $EF = 2\sqrt{3}$ ，则点  $E$  的纵坐标为  $-2\sqrt{3}$ ，当直线  $OB$  恰好经过点  $E$  时，点  $E$  的坐标为  $(-4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ ，此时  $t = -4\sqrt{3} - 2$ ，结合函数图象可知，当点  $E$  继续向左移动的时候，等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点，向右移动的时候，等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上存在一点是线段  $AB$  的四象点，故当等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点时， $t \leq -4\sqrt{3} - 2$ ；

(3) 如图所示，设  $\odot T$  交  $x$  轴于  $C$  (靠近原点)，过点  $A$  作  $AD \perp x$  轴于  $D$ ，过点  $C$  作  $CE \perp x$  轴交  $AB$  于  $E$ ，由函数图象可知，当点  $P$  在线段  $AE$  上 (不包括点  $E$ ) 时，直线  $PC$  一定会经过第四象限；如图所示， $\odot T$  的切线  $BG$  交  $\odot T$  于  $G$ ，过点  $T$  作  $TH \perp x$  轴，由函数图象可知，当点  $P$  在线段  $BF$  上 (不包括点  $F$ ) 时，直线  $PH$  一定会经过第四象限，两种情况求出对应的取值范围即可。

【小问 1 详解】

解：设直线  $P_1B$  的解析式为  $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = -2 \\ 2k + b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $P_1B$  的解析式为  $y = \frac{1}{2}x$ ，

$\therefore$  直线  $P_1B$  经过原点，

$\therefore$  由函数图象可知，线段  $AB$  上不存在一点使得其与  $P_1$  所在的直线经过第四象限；

同理可得直线  $P_2B$  的解析式为  $y = x - 1$ ，

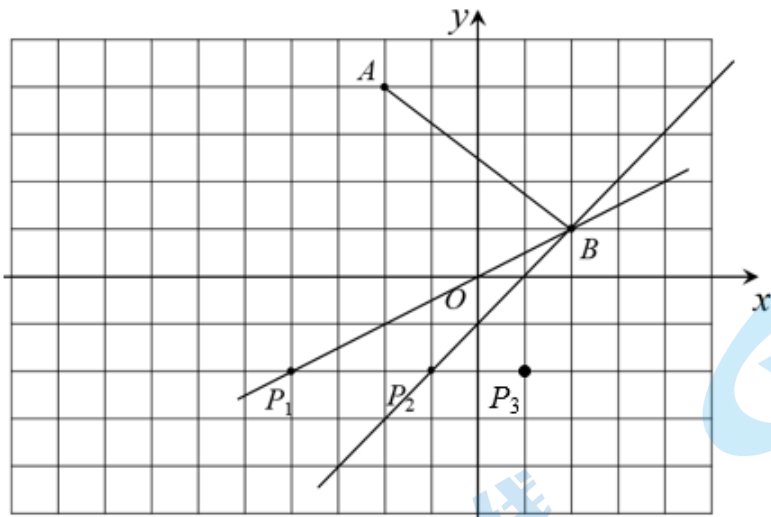
$\therefore$  直线  $y = x - 1$  经过第四象限，

$\therefore P_2(-1, -2)$  是线段  $AB$  的四象点；

$\therefore P_3(1, -2)$  在第四象限，

$\therefore P_3(1, -2)$  是线段  $AB$  的四象点；

故答案为： $P_2$ 、 $P_3$ ；



【小问 2 详解】

解：∵  $C(t,0)$ ,  $D(t+4,0)$ ,  $\triangle CDE$  是等边三角形 ( $C, D, E$  顺时针排列),

∴ 点  $E$  一定在  $x$  轴下方,

又∵ 等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点,

∴ 点  $E$  一定要在第三象限,

如图所示, 过点  $E$  作  $EF \perp CD$  于  $F$

∵  $C(t,0)$ ,  $D(t+4,0)$ ,

∴  $CD = 4$ ,  $F\left(\frac{t+t+4}{2}, 0\right)$ , 即  $F(t+2,0)$

∴  $CF = DF = 2$ ,

∵  $\triangle CDE$  是等边三角形,

∴  $DE = CD = 4$ ,

∴  $EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = 2\sqrt{3}$ ,

∴ 点  $E$  的纵坐标为  $-2\sqrt{3}$ ,

由 (1) 得直线  $OB$  的解析式为  $y = \frac{1}{2}x$ ,

当  $y = -2\sqrt{3}$  时,  $x = 2y = -4\sqrt{3}$ ,

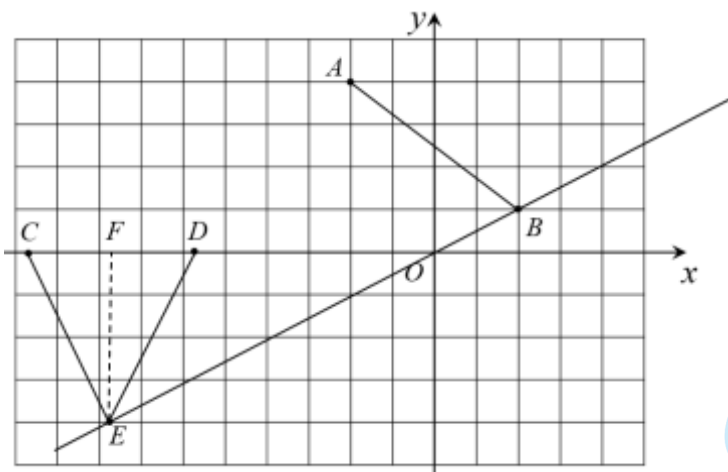
当直线  $OB$  恰好经过点  $E$  时, 点  $E$  的坐标为  $(-4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ ,

∴ 此时  $t = -4\sqrt{3} - 2$ ,

结合函数图象可知, 当点  $E$  继续向左移动的时候, 等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点, 向右移动的时候, 等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上存在一点是线段  $AB$  的四象点,

∴ 当等边  $\triangle CDE$  ( $C, D, E$  顺时针排列) 上的点均不是线段  $AB$  的四象点时,  $t \leq -4\sqrt{3} - 2$ ;





【小问3详解】

解：如图所示，设 $\odot T$ 交 $x$ 轴于 $C$ （靠近原点），过点 $A$ 作 $AD \perp x$ 轴于 $D$ ，过点 $C$ 作 $CE \perp x$ 轴交 $AB$ 于 $E$ ，

$\because \odot T$  是以 $T\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$  为圆心，半径为2的圆，

$\therefore TC = 2, OT = \frac{5}{2}$ ,

$\therefore OC = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ;

$\therefore A(-2, 4)$ ,

$\therefore D(-2, 0)$ ,

由函数图象可知，当点 $P$ 在线段 $AE$ 上（不包括点 $E$ ）时，直线 $PC$ 一定会经过第四象限，

$\therefore$  当 $-2 \leq x_p < -\frac{1}{2}$ 时，线段 $AB$ 上的点 $P$ 是 $\odot T$ 的四象点；

如图所示，过点 $T$ 作 $TH \perp x$ 轴交 $\odot T$ 于 $H$ ，过点 $H$ 作 $HF \parallel x$ 轴交 $AB$ 于 $F$ ，

同理可得直线 $AB$ 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ，

$\therefore TH = 2$ ，

$\therefore$  点 $H$ 的纵坐标为2，即点 $F$ 的纵坐标为2，

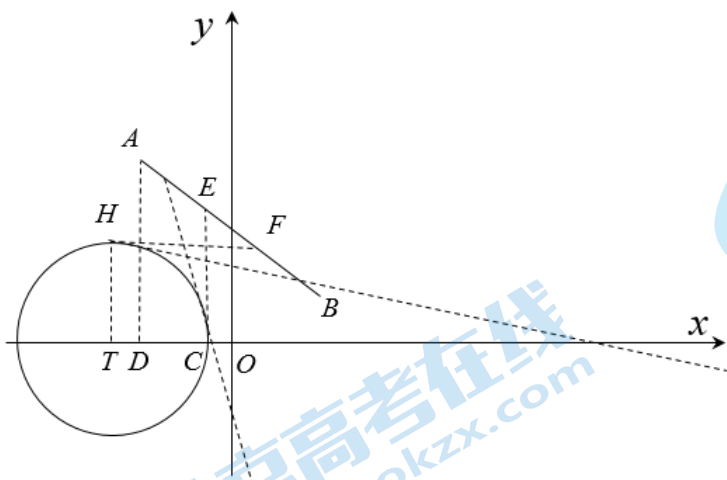
在 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 中当 $y = 2$ 时， $x = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore F\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ ，

由函数图象可知，当点 $P$ 在线段 $BF$ 上（不包括 $F$ ）时，直线 $PH$ 一定会经过第四象限，

$\therefore$  当  $\frac{2}{3} < x_p \leq 2$  时, 线段  $AB$  上的点  $P$  是  $\odot T$  的四象点;

综上所述,  $-2 \leq x_p < -\frac{1}{2}$  或  $\frac{2}{3} < x_p \leq 2$



**【点睛】** 本题主要考查了一次函数与几何综合, 圆的基本性质, 等边三角形的性质, 勾股定理等等, 理解题目所给的新定义, 利用数形结合的思想求解是解题的关键.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

