2020-2021 学年北京市高三定位考试

数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）A　　（2）D　　（3）D　　（4）B　　（5）C

（6）C　　（7）B　　（8）C　　（9）D　　（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(-\infty,0]$　　　　（12）2　　$(2\sqrt{2},0)$

（13）1　　　　（14）2π　　1（答案不唯一）

（15）①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：选条件①：$a=4$，$c=6$

（Ⅰ）在$\triangle ABC$中，因为$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，　　…………3 分

且$\cos C=-\dfrac{1}{8}$，$a=4$，$c=6$

所以$36=16+b^2-8b(-\dfrac{1}{8})$

所以$b=4$，$b=-5$（舍）.　　…………5 分

由正弦定理得$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}$.　　…………8 分

因为$\cos C=-\dfrac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$

所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.　　…………9 分

所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.　　…………10 分

（Ⅱ）因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$　　…………13 分

在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=4$，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

所以$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{7}$.　　…………14 分

选条件②：$a=4$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos C=-\frac{1}{8}$，

所以 C 为钝角．

因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

所以 C 为顶角．

所以 $a=b=4$． …………2 分

因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， …………5 分

所以 $c=6$．

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$． …………8 分

因为 $\cos C=-\frac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$

所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$． …………9 分

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$． …………10 分

（Ⅱ）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ …………13 分

在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=4$，$\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

所以 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{7}$． …………14 分

(17)（共 14 分）

解：（Ⅰ）连接 BD 交 AC 于点 O，连接 EO．

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，

所以 $ABCD$ 为矩形．

所以点 O 为 BD 中点．

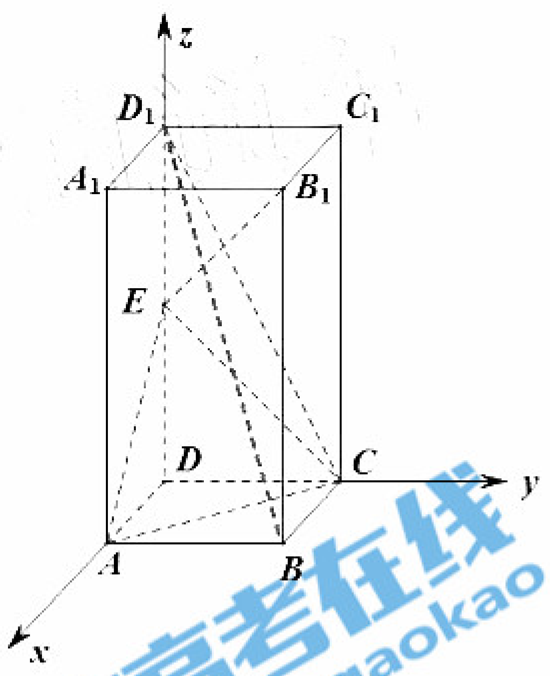
又因为 E 为 DD_1 中点，

所以在 ΔBD_1D 中，$OE \parallel BD_1$．　　…………2 分

又 $OE \subset$ 平面 ACE，$BD_1 \not\subset$ 平面 ACE，　　…………4 分

所以 $BD_1 \parallel$ 平面 ACE．　　…………5 分

（Ⅱ）以 D 为坐标原点，分别以 DA,DC,DD_1 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系．…………6 分



则 $A(1,0,0),C(0,1,0),E(0,0,1),B_1(1,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{EB_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{EA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{EC}=(0,1,-1)$．

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{EC}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}EB_1\perp EA,\\ EB_1\perp EC.\end{cases}$　　…………8 分

又 $EA\cap EC=E$，　　…………9 分

所以 $EB_1\perp$ 平面 ACE．　　…………10 分

（Ⅲ）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，

所以 $BC\perp$ 平面 DCC_1D_1

所以取平面 ECC_1 的法向量为 $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，　　…………11 分

再由（Ⅱ），取平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{EB_1}=(1,1,1)$．　　…………12 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{EB_1},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EB_1}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{EB_1}||\overrightarrow{BC}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

由题知二面角 $A-CE-C_1$ 为钝角，所以其余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$． …………14 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设事件 A 为“这位顾客两种手机都选择分 4 期付款”． …………1 分

故 $P(A)=0.1\times0.4=0.04$． …………4 分

（Ⅱ）X 的所有可能值为 $600,650,700,750,800,850,900$． …………5 分

$P(X=600)=0.4\times0.4=0.16$

$P(X=650)=\mathrm{C}_2^1\times0.4\times0.1=0.08$

$P(X=700)=0.1\times0.1+\mathrm{C}_2^1\times0.4\times0.1=0.09$

$P(X=750)=\mathrm{C}_2^1\times0.4\times0.4+\mathrm{C}_2^1\times0.1\times0.1=0.34$

$P(X=800)=0.1\times0.1+\mathrm{C}_2^1\times0.1\times0.4=0.09$

$P(X=850)=\mathrm{C}_2^1\times0.1\times0.4=0.08$

$P(X=900)=0.4\times0.4=0.16$

所以 X 的分布列为

X	600	650	700	750	800	850	900
P	0.16	0.08	0.09	0.34	0.09	0.08	0.16

…………11 分

（Ⅲ）$D(x_1)<D(x_2)$． …………14 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=(x+1)\ln x-ax+a$，

所以 $f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-a$． …………2 分

$f'(1)=2-a$．

由题设知 $f'(1)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

即 $2-a=1$，解得 $a=1$． …………5 分

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$．

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$． …………7 分

令 $g'(x)=0$，$x=1$．

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=2-a$，

即 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(1)=2-a$． …………9 分

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 成立.

所以 $2-a\geqslant 0$.

所以 a 的最大值为 2 . ············11 分

（III）当 $a\leqslant 2$ 时， $f(x)$ 只有 1 个零点. ············12 分

当 $a>2$ 时， $f(x)$ 有 3 个零点. ············14 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为椭圆方程 $C:\dfrac{x^2}{6}+y^2=1$，

所以 $a^2=6,b^2=1$. ············1 分

所以 $c^2=5$. ············2 分

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. ············4 分

（Ⅱ）(i) 设 $P(x_1,y_1),Q(-x_1,-y_1)$ $x_1\neq\pm\sqrt{6}$.

由题设知， $M(\sqrt{6},0)$. ············5 分

因为 $PQ\perp PM$，

所以点 $P(x_1,y_1)$ 在以线段 OM 为直径的圆上，

所以有 $(x_1-\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2+y_1^{\ 2}=(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2$. ············6 分

又 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{6}+y_1^{\ 2}=1$. ············7 分

解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$， $x_1=\sqrt{6}$ （舍）.

所以 $x_1^{\ 2}=\dfrac{6}{25},y_1^{\ 2}=\dfrac{24}{25}$. ············9 分

所以 $PQ=2\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}=\dfrac{\sqrt{120}}{5}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

又 $PM=\sqrt{(x_1-\sqrt{6})^2+y_1^{\ 2}}=\dfrac{\sqrt{120}}{5}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$. ············10 分

所以 $PQ=PM$， 即 $\triangle PQM$ 为等腰三角形.

（ii）法 1：设 $M(x_2,y_2)$，且 $x_2\neq\pm x_1,x_1\neq\pm\sqrt{6},x_1\neq 0$.

记直线 PQ,PM,QM 的斜率分别为 k_{PQ},k_{PM},k_{QM} .

所以 $k_{PQ}=\dfrac{y_1}{x_1},k_{PM}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1},k_{QM}=\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$. ············11 分

因为 $PQ\perp PM$，

所以 $k_{PQ}\cdot k_{PM}=-1$. ············12 分

又 $k_{PM}\cdot k_{QM}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}}$.

因为$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{6}+y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{6}+y_2^2=1,\end{cases}$

所以$\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{1}{6}$. …………13 分

所以$k_{PM}\cdot k_{QM}=-\dfrac{1}{6}$.

所以$\dfrac{k_{PQ}}{k_{QM}}=6$，即直线PQ和直线QM的斜率之比为6. …………14 分

（ii）法 2：因为点P不是椭圆C的顶点，

所以直线PQ,PM,QM的斜率都存在且不为0，

设直线PM的方程为$y=kx+m(km\neq 0)$

由$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{6}+y^2=1\end{cases}$ 得$(1+6k^2)x^2+12kmx+6m^2-6=0$

由$\Delta>0$，所以$6k^2+1-m^2>0$.

设 $P(x_1,y_1),M(x_2,y_2)$，PM的中点$T(x_0,y_0)$.

因为$x_1+x_2=\dfrac{-12km}{1+6k^2}$， …………12 分

所以$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-6km}{1+6k^2}$

$y_0=kx_0+m=\dfrac{m}{1+6k^2}$， …………13 分

因为$OT//QM$，

所以$k_{QM}=k_{OT}=\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{6k}$

又因为$PQ\perp QM$，

所以$k_{PQ}=-\dfrac{1}{k}$.

所以$\dfrac{k_{PQ}}{k_{QM}}=\dfrac{-\dfrac{1}{k}}{-\dfrac{1}{6k}}=6$. …………14 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）①不可以；②可以. …………4 分

（Ⅱ）因为$a_k=k=|x_k-x_{k-1}|\leq m_0-1$，

所以$k \le m_0 - 1$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…………6 分

当m_0为奇数时，取$x_i = \begin{cases} \dfrac{m-i+1}{2}, i \in [0, m-1]\text{且}i\text{为偶数}, \\ \dfrac{m+i+2}{2}, i \in [0, m-1]\text{且}i\text{为奇数}. \end{cases}$

当m_0为偶数时，取$x_i = \begin{cases} \dfrac{m+i+2}{2}, i \in [0, m-1]\text{且}i\text{为偶数}, \\ \dfrac{m-i+1}{2}, i \in [0, m-1]\text{且}i\text{为奇数}. \end{cases}$

此时k可取$m_0 - 1$，所以$k_{\max} = m_0 - 1$.　　　　　　　　　　　　　　　…………10 分

（III）设数列$A: a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$满足$a_i \in [0,1] (i = 1, 2, \ldots, 2021)$，

构造数列$x_0, x_1, \cdots, x_{2021}$如下：

$x_0 = 0, x_1 = a_1$，　$x_{i+1} = \begin{cases} x_i + a_{i+1}, x_i \leqslant 1, \\ x_i - a_{i+1}, x_i > 1, \end{cases}$　其中$i = 1, 2, \ldots, 2020$.

根据x_{i+1}的定义知道，

当$x_i \leqslant 1$时，因为$a_{i+1} \in [0,1]$，所以$x_{i+1} \in [0,2]$.

当$x_i > 1$时，因为$a_{i+1} \in [0,1]$，所以$x_{i+1} \in [0,2]$.

而$|x_{i+1} - x_i| = \begin{cases} |x_i + a_{i+1} - x_i|, x_i \leqslant 1, \\ |x_i - a_{i+1} - x_i|, x_i > 1, \end{cases}$

所以$|x_{i+1} - x_i| = \begin{cases} a_{i+1}, x_i \leqslant 1, \\ a_{i+1}, x_i > 1. \end{cases}$

所以任取数列$A: a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$满足$a_i \in [0,1] (i = 1, 2, \ldots, 2021)$，均可以“嵌入”区间$[0,2]$.