

2024 届高三数学试题（理科）

考生注意：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：小题（必修 1，必修 3，必修 4，必修 5，选修 2-1 第一章，选修 2-2 第一章），大题（高考范围）。

第 I 卷

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{a, 3\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$ ，若 $A \cap B \neq \emptyset$ ，则 a 的取值范围为（ ）

- A. \mathbf{R} B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

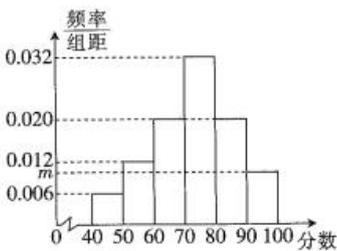
2. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则“ $a + b = 1$ ”是“ $ab \leq \frac{1}{4}$ ”的（ ）

- A. 充分必要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = 2^x + x + m$ ，则 $f(-3) =$ （ ）

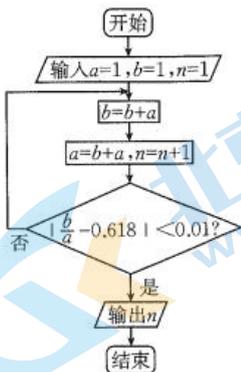
- A. -10 B. -4 C. 4 D. 10

4. 某地发起“寻找绿色合伙人——低碳生活知识竞赛”活动，选取了 n 人参与问卷调查，将他们的成绩进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），得到如图所示的频率分布直方图，且成绩落在 $[90, 100)$ 的人数为 10，则 $n =$ （ ）



- A. 60 B. 80 C. 100 D. 120

5. 执行如图所示的程序框图，输出的 $n =$ （ ）



A.3 B.4 C.5 D.6

6.已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_5 - a_1}{a_3 - a_1} = 3$, 则 $\frac{a_{10} - a_2}{a_6 + a_2} = (\quad)$

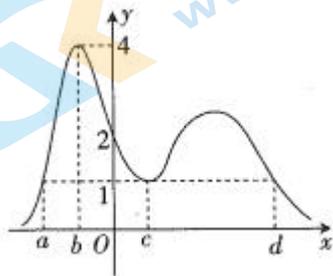
A.1 B.3 C.4 D.15

7.小明准备将新买的《孟子》《论语》《诗经》3本书立起来随机地放在书架上, 则《论语》《诗经》两本书相邻的概率为 ()



A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

8.已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若函数 $y = e^{f'(x)}$ 的图象大致如图所示, 则 $f(x)$ 的极大值点为 ()



A. a B. b C. c D. d

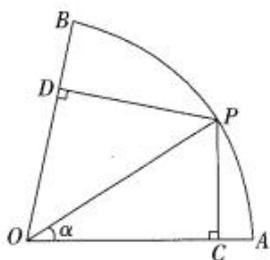
9.在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $AB = 3$, $\angle A = 60^\circ$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 + |\overline{PC}|^2 = (\quad)$

A.7 B.8 C. $\frac{26}{3}$ D. $\frac{20}{3}$

10.某工厂新购置并安装了先进的废气处理设备, 使产生的废气经过该设备过滤后排放, 以减少对空气的污染. 已知过滤过程中废气的污染物数量 P (单位: mg/L) 与过滤时间 t (单位: h) 的关系为 $P(t) = P_0 e^{-kt}$ (P_0 , k 是正常数). 若经过 10h 过滤后减少了 20% 的污染物, 在此之后为了使得污染物减少到原来的 10% 还需要的时长大约为 (参考数据: $\log_2 5 \approx 2.322$) ()

A. 103h B. 93h C. 83h D. 63h

11.如图, 扇形 AOB 是某社区的一块空地平面图, 点 P 在弧 AB 上 (异于 A, B 两点), $PC \perp OA$, $PD \perp OB$, 垂足分别为 C, D , $\angle AOB = \frac{5\pi}{12}$, $\angle AOP = \alpha$, $AO = 20$ 米. 该社区物业公司计划将四边形 $OCPD$ 区域作为儿童娱乐设施建筑用地, 其余的地方种植花卉, 则儿童娱乐设施建筑用地面积的最大值为 ()



A. 50 平方米

B. $100(\sqrt{3}+1)$ 平方米

C. $50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 平方米

D. $50(\sqrt{6}+3\sqrt{2})$ 平方米

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = \frac{6a_n + t}{a_n + 3}$ ($t \in \mathbf{R}$), 若对于任意正整数 n , 都有 $0 < a_n < a_{n+1} < 5$, 则 t

的取值范围为 ()

A. $[0, 5)$

B. $[0, 5]$

C. $[0, 10]$

D. $[0, 15]$

第 II 卷

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 2 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x + 1$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个零点, 则 ω 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = e^{ax-1} - \frac{1}{a} \ln x - \frac{1}{a}$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 60 分.

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n + 4 = 2a_n$

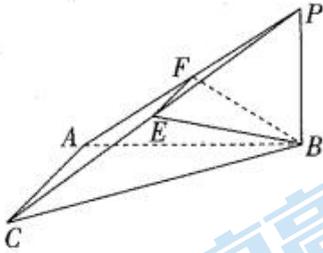
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{2n+1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 T_n

18. (12分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, E, F 分别为 PC, PA 的中点,且 $BP = 2\sqrt{3}$,
 $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6$.

- (1) 证明:平面 $BEF \perp$ 平面 PAB ,
- (2) 求平面 BEF 与平面 PEB 所成锐二面角的余弦值.



19. (12分)

为了促进消费,某商场针对会员客户推出会员积分兑换商品活动:每位会员客户可在价值80元,90元,100元的 A, B, C 三种商品中选择一种使用积分进行兑换,每10积分可兑换1元.已知参加活动的甲、乙两位客户各有1000积分,且甲兑换 A, B, C 三种商品的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$,乙兑换 A, B, C 三种商品的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$,且他们兑换何种商品相互独立.

- (1) 求甲、乙两人兑换同一种商品的概率;
- (2) 记 X 为两人兑换商品后的积分总余额,求 X 的分布列与期望

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$,且 $\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{17}{4}$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) A 是 C 的下顶点,过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 M, N 两点,直线 l 的斜率小于0, $\triangle AMN$ 的重心为 G, O 为坐标原点,求直线 OG 斜率的最大值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax^2$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线经过坐标原点, 求 a 的值

(2) 若方程 $f(x) = x + 1$ 恰有 2 个不同的实数根, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 16$.

(1) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 的极坐标方程;

(2) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 6$, 求 l 的斜率.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x-1| - |2x-a|$ ($a > 2$).

(1) 若 $a = 4$, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积为 $\frac{1}{6}$, 求 a .