学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密 封 线 内 不 要 答 题

丰台区 2018—2019 学年度第一学期期末练习

高三数学（理科）

2019.01

考生须知	1.考生要认真填写考场号和座位序号。 2.本试卷共5页，分为两个部分。第一部分为选择题，8个小题（共40分）；第二部分为非选择题，12个小题（共110分）。 3.试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用2B铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。 4.考试结束后，考生应将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，那么 $A\cap B=$

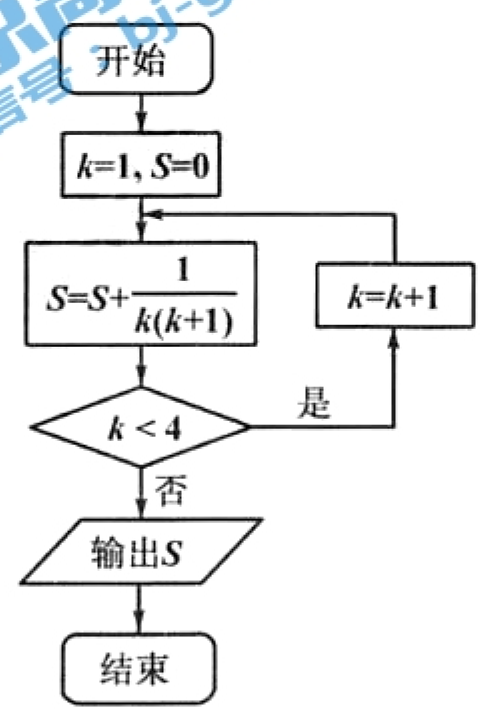
（A）$\{-1,0,1\}$ （B）$\{-1,0,1,2\}$

（C）$\{-1,0,1,2,3\}$ （D）$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

2．若复数 $(2-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的实部与虚部互为相反数，则实数 $a=$

（A）3 （B）$\dfrac{1}{3}$ （C）$-\dfrac{1}{3}$ （D）-3

3．执行如图所示的程序框图，输出的 S 的值为



（A）$\dfrac{3}{4}$ （B）$\dfrac{4}{5}$

（C）$\dfrac{5}{6}$ （D）$\dfrac{6}{7}$

4．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，$a_2=6$．

若 $b_n=a_{2^n}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项和等于

（A）30 （B）45

（C）90 （D）186

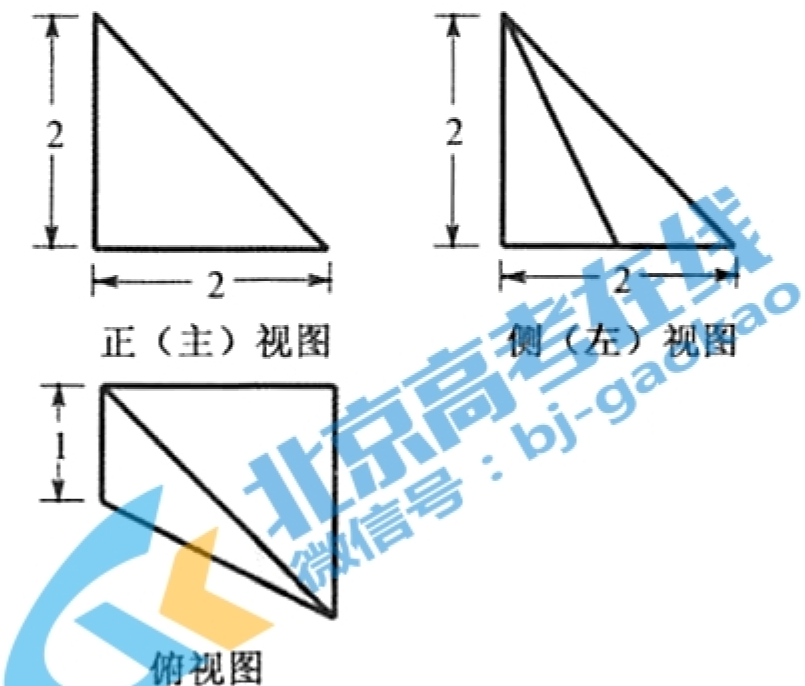
5．某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的棱中，最长的棱的长度为

（A）2

（B）$\sqrt{5}$

（C）$2\sqrt{2}$

（D）$2\sqrt{3}$

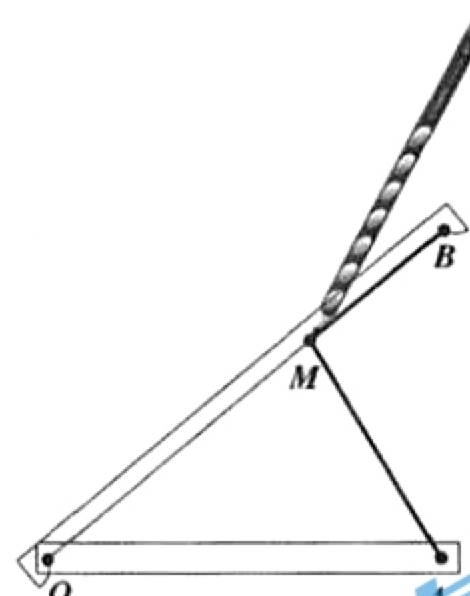


6．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是非零向量，则“$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．一种画双曲线的工具如图所示，长杆OB通过O处的铰链与固定好的短杆OA连接，取一条定长的细绳，一端固定在点A，另一端固定在点B，套上铅笔（如图所示）．作图时，使铅笔紧贴长杆OB，拉紧绳子，移动笔尖M（长杆OB绕O转动），画出的曲线即为双曲线的一部分．若$|OA|=10$，$|OB|=12$，细绳长为8，则所得双曲线的离心率为



（A）$\dfrac{6}{5}$　　（B）$\dfrac{5}{4}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{5}{2}$

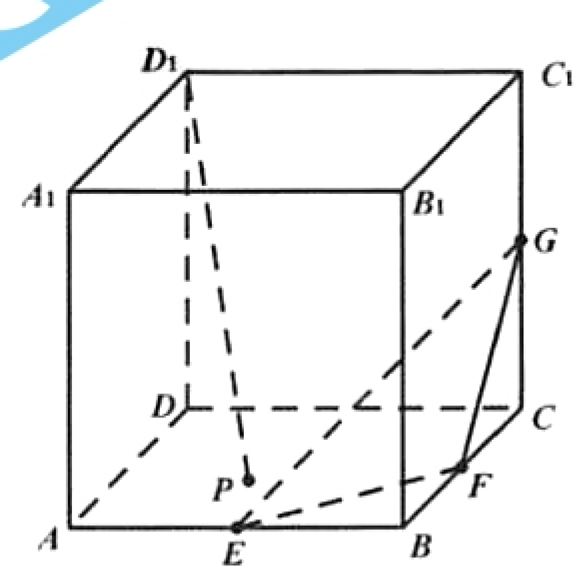
8．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G分别是棱AB,BC,CC_1的中点，P是底面$ABCD$内一动点，若直线D_1P与平面EFG不存在公共点，则三角形PBB_1的面积的最小值为

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（B）1

（C）$\sqrt{2}$

（D）2



第二部分 （非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．在极坐标系中，圆 $C:\rho=2\sin\theta$ 的圆心到点 $(1,0)$ 的距离为____.

10．$(2x-1)^5$ 展开式中 x^2 的系数为____.

11．能够说明“设 a,b 是任意非零实数．若 $\dfrac{b}{a}>1$，则 $b>a$”是假命题的一组整数 a,b 的值依次为____.

12．若 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ x-y\leqslant 1,\\ 2x-y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为____.

13．动点 $A(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上沿逆时针方向匀速旋转，12 秒旋转一周．已知时间 $t=0$ 时，点 A 的坐标是 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$，则当 $0\leqslant t\leqslant 6$ 时，动点 A 的纵坐标 y 关于 t（单位：秒）的函数的值域为____.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x, & x\geqslant a,\\ 2x, & x<a\end{cases}$.

① 若 $a=0$，则函数 $f(x)$ 的零点有____个；

② 若存在实数 m，使得函数 $y=f(x)+m$ 总有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15．（本小题 13 分）

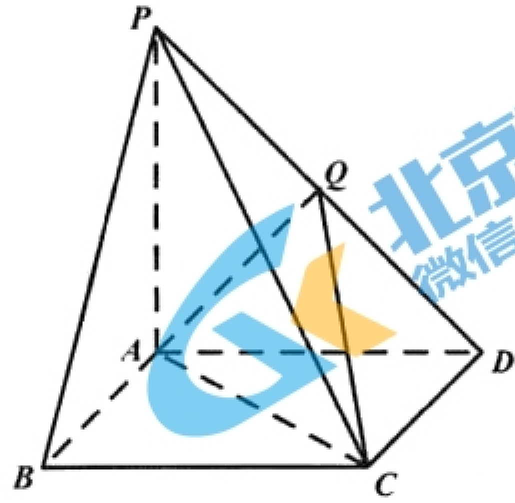
在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=3,b=2\sqrt{3},\cos B=\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求 c 的值；

（Ⅱ）求 $\triangle ABC$ 的面积.

16.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$， Q 为棱 PD 的中点， $PA=AB$.



（Ⅰ）求证： $AQ\perp CD$；

（Ⅱ）求直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值；

（Ⅲ）求二面角 $C-AQ-D$ 的余弦值.

17.（本小题 13 分）

2018 年 11 月 5 日上午，首届中国国际进口博览会拉开大幕，这是中国也是世界上首次以进口为主题的国家级博览会. 本次博览会包括企业产品展、国家贸易投资展. 其中企业产品展分为 7 个展区，每个展区统计了备受关注百分比，如下表：

展区类型	智能及高端装备	消费电子及家电	汽车	服装服饰及日用消费品	食品及农产品	医疗器械及医药保健	服务贸易
展区的企业数(家)	400	60	70	650	1670	300	450
备受关注百分比	25%	20%	10%	23%	18%	8%	24%

备受关注百分比指：一个展区中受到所有相关人士关注（简称备受关注）的企业数与该展区的企业数的比值.

（Ⅰ）从企业产品展 7 个展区的企业中随机选取 1 家，求这家企业是选自“智能及高端装备”展区备受关注的企业的概率；

（Ⅱ）从“消费电子及家电”展区备受关注的企业和“医疗器械及医药保健”展区备受关注的企业中，任选 2 家接受记者采访.

(i) 记 X 为这 2 家企业中来自于“消费电子及家电”展区的企业数，求随机变量 X 的分布列；

(ii) 假设表格中 7 个展区的备受关注百分比均提升 10%. 记 Y 为这 2 家企业中来自于“消费电子及家电”展区的企业数. 试比较随机变量 X,Y 的均值 $E(X)$ 和 $E(Y)$ 的大小.（只需写出结论）

密　封　线　内　不　要　答　题

18.（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，直线 $l:y=k(x-4)\ (k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于不同两点 M,N，直线 FM,FN 分别交 y 轴于 A,B 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求证：$|FA|=|FB|$.

19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=a\sin x-x\cos x, x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求证：$f(x)\geqslant 0$；

（Ⅱ）如果 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的最小值.

20.（本小题 13 分）

将 $m\times n$ 阶数阵 $\begin{bmatrix} a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn} \end{bmatrix}$ 记作 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$（其中，当且仅当 $i=s, j=t$ 时，$a_{ij}=a_{st}$）.如果对于任意的 $i=1,2,3,\cdots,m$，当 $j_1<j_2$ 时，都有 $a_{ij_1}<a_{ij_2}$，那么称数阵 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 具有性质 A.

（Ⅰ）写出一个具有性质 A 的数阵 $\{a_{ij}\}_{3\times 4}$，满足以下三个条件：① $a_{11}=4$，②数列 $\{a_{1n}\}$ 是公差为 2 的等差数列，③数列 $\{a_{m1}\}$ 是公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列；

（Ⅱ）将一个具有性质 A 的数阵 $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 的每一列原有的各数按照从上到下递增的顺序排列，形成一个新的 $m\times n$ 阶数阵，记作数阵 $\{b_{ij}\}_{m\times n}$. 试判断数阵 $\{b_{ij}\}_{m\times n}$ 是否具有性质 A，并说明理由.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2018~2019 学年度第一学期期末练习

高三数学（理科）参考答案及评分参考

2019．01

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	B	C	D	A	D	C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分）

9．$\sqrt{2}$

10．-40

11．满足 $b<a<0$ 且 $a,b\in\mathbf{Z}$ 即可

12．1

13．$[-\frac{1}{2},1]$

14．2；$a<0$ 且 $a\neq-1$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15．（共 13 分）

解：（Ⅰ）在△ABC 中，因为 $a=3$，$b=2\sqrt{3}$，$\cos B=\frac{1}{3}$，

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， ………………2 分

可得 $c^2-2c-3=0$， ………………4 分

所以 $c=3$，或 $c=-1$（舍）． ………………6 分

（Ⅱ）因为 $\cos B=\frac{1}{3}, B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$． ………………13 分

16．（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$，

正方形 $ABCD$ 中 $AD\perp CD$，

又因为 $PA\cap AD=A$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD，

因为 $AQ\subset$ 平面 PAD，

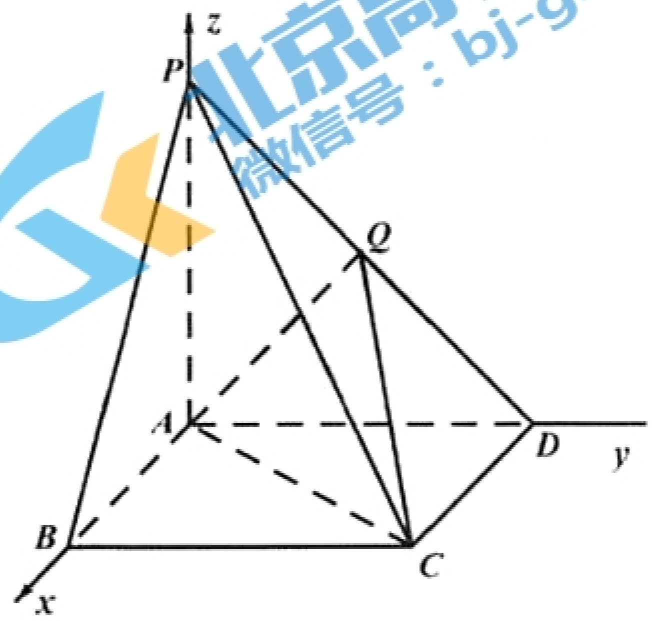
所以 $AQ\perp CD$． ………………4 分

（Ⅱ）正方形 $ABCD$ 中 $AB\perp AD$，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$．

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，不妨设 $AB=2$.

依题意，则 $A(0,0,0),C(2,2,0),P(0,0,2),Q(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2),\overrightarrow{AC}=(2,2,0),\overrightarrow{AQ}=(0,1,1)$.



设平面 ACQ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}2x+2y=0\\ y+z=0\end{cases}$.

令 $x=1$，得 $\begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=1\end{cases}$，即 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{CP}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{1}{3}$，

所以直线 PC 与平面 ACQ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$；..................11 分

（III）由（I）知 $CD\perp$ 平面 PAD，所以 $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$ 为平面 PAD 的法向量，

因为 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，且二面角 $C-AQ-D$ 为锐角，

所以二面角 $C-AQ-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ....14 分

17.（共 13 分）

解：（I）7 个展区企业数共 400+60+70+650+1670+300+450=3600 家，

其中备受关注的智能及高端装备企业共 $400\times25\%=100$ 家，

设从各展区随机选 1 家企业，这家企业是备受关注的智能及高端装备为事件 A，

所以 $P(A)=\dfrac{100}{3600}=\dfrac{1}{36}$. ....4 分

（II）消费电子及家电备受关注的企业有 $60\times20\%=12$ 家，

医疗器械及医药保健备受关注的企业有 $300\times8\%=24$ 家，共 36 家.

X 的可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\dfrac{C_{24}^2}{C_{36}^2}=\dfrac{46}{105}$；

$P(X=1)=\dfrac{C_{12}^1C_{24}^1}{C_{36}^2}=\dfrac{16}{35}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_{12}^{2}}{C_{36}^{2}}=\dfrac{11}{105}$；

所以随机变量 X 的分布列为：

P	0	1	2
X	$\dfrac{46}{105}$	$\dfrac{16}{35}$	$\dfrac{11}{105}$

………………11 分

（III）$E(X)>E(Y)$ ………………13 分

18.（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} c=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}. \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………5 分

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ $(x_1\neq 1 \text{且} x_2\neq 1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$

依题意 $\Delta=(-32k^2)^2-4\cdot(4k^2+3)\cdot(64k^2-12)>0$，即 $0<k^2<\dfrac{1}{4}$.

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}, \\ x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}. \end{cases}$ ………………8 分

因为 $k_{MF}+k_{NF}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}$

$=\dfrac{k(x_1-4)}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2-4)}{x_2-1}$

$=\dfrac{k[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\dfrac{k\left[2\cdot\left(\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}\right)-5\cdot\left(\dfrac{32k^2}{4k^2+3}\right)+8\right]}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=0$.

所以直线 MF 的倾斜角与直线 NF 的倾斜角互补，即 $\angle OFA=\angle OFB$.

因为 $OF\perp AB$，所以 $|FA|=|FB|$. ……………………14 分

19.（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a=1$，所以 $f(x)=\sin x-x\cos x$，$f'(x)=x\sin x$.

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$. ……………5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=a\sin x-x\cos x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $f'(x)=(a-1)\cos x+x\sin x$.

①当 $a=1$ 时，由（Ⅰ）知，$f(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立；

②当 $a>1$ 时，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $f'(x)>0$.

因此 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$ 对 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立；

③当 $a<1$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=(2-a)\sin x+x\cos x$，

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

因此 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

且 $g(0)=a-1<0$，$g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 使得 $g(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$.

所以任意 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减.

所以 $f(x)<f(0)=0$，不合题意. ……………12 分

综上可知，a 的最小值为 1. ……………13 分

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）$\begin{bmatrix} 4,6,8,10 \\ 2,3,5,7 \\ 1,9,11,12 \end{bmatrix}$（答案不唯一）．　…………4 分

（Ⅱ）数阵 $\{b_{ij}\}_{m\times n}$ 具有性质 A.

只需证明，对于任意的 $i=1,2,3,\cdots,n$，都有 $b_{ij}\leqslant b_{i(j+1)}$，其中 $j=1,2,3,\cdots,n-1$.

下面用反证明法证明：

假设存在 $b_{pq}>b_{p(q+1)}$，则 $b_{(p+1)q},b_{(p+2)q},\cdots,b_{mq}$ 都大于 $b_{p(q+1)}$，即在第 q 列中，共有 $m-p+1$ 个数大于 $b_{p(q+1)}$，且 $b_{p(q+1)}>b_{(p-1)(q+1)}>\cdots>b_{2(q+1)}>b_{1(q+1)}$.

根据题意，对于每一个 $b_{t(q+1)}(t=1,2,\cdots,p)$，都至少存在一个 a_{i_tq} $(i_t\in\{1,2,3,\cdots,m\})$，使得 $a_{i_tq}<b_{t(q+1)}$，即在第 q 列中，至少有 p 个数小于 $b_{p(q+1)}$.

所以，第 q 列中至少有 $m-p+1+p=m+1$ 个数，这与第 q 列中只有 m 个数矛盾.

所以假设不成立.

所以数阵 $\{b_{ij}\}_{m\times n}$ 具有性质 A.　…………13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）