

广安市高 2021 级第一次诊断性考试

数 学 (文科)

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 + 4x - 5 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. \emptyset B. $(-3, 1]$ C. $[-1, 2)$ D. $(-3, 2)$

2. 复数 $z = \frac{1+i}{1-i} + i$, 则 $|z| =$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

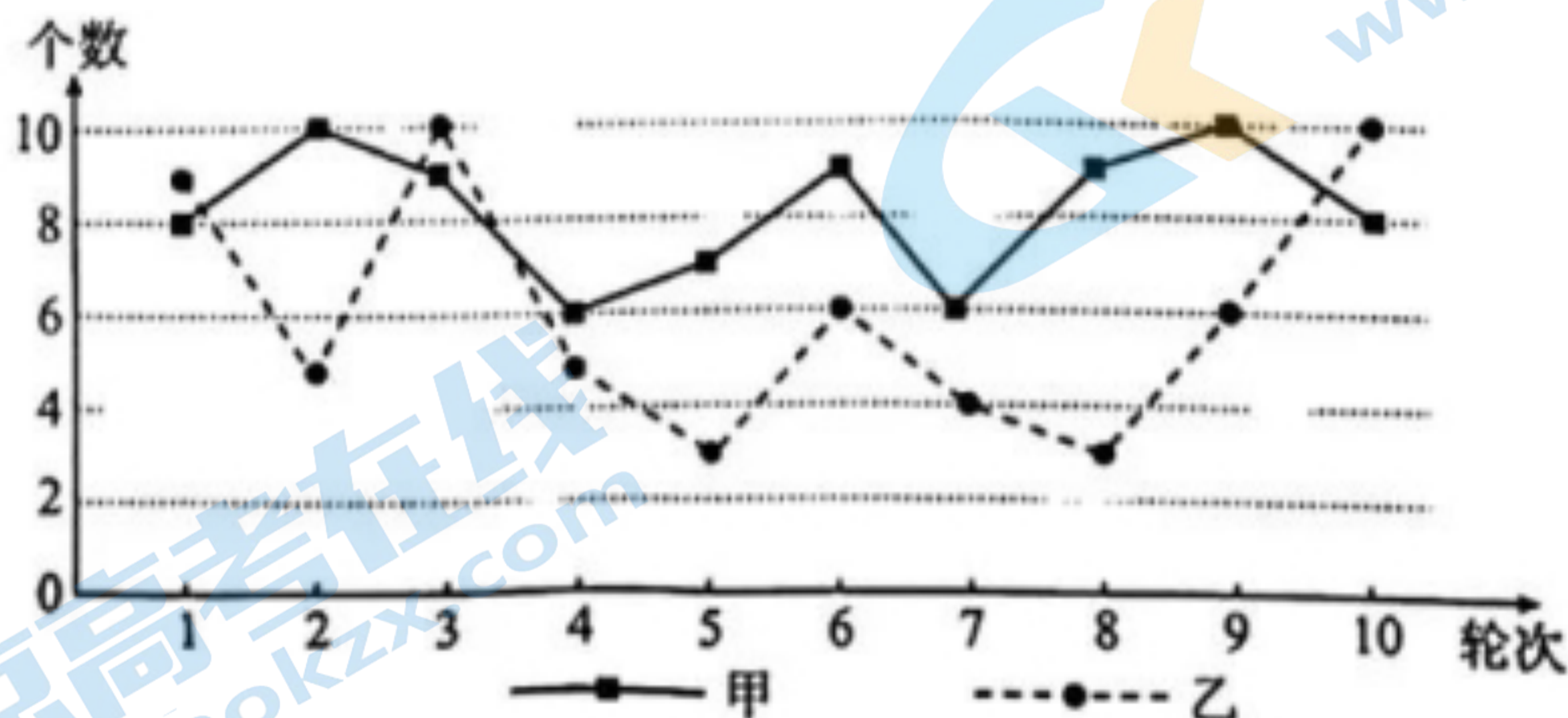
3. 已知向量 $a = (1, 3)$, $b = (-2, -1)$, 则 $(a+b) \cdot (2a-b) =$

- A. 10 B. 18 C. $(-7, 8)$ D. $(-4, 14)$

4. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, 2^x \geq 2x+1$, 则 $\neg p$ 为

- A. $\exists x \in \mathbb{R}, 2^x < 2x+1$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, 2^x < 2x+1$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x < 2x+1$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x < 2x+1$

5. 甲、乙两人进行了 10 轮的投篮练习,每轮各投 10 个,现将两人每轮投中的个数制成如下折线图:



下列说法正确的是

- A. 甲投中个数的平均数比乙投中个数的平均数小
- B. 甲投中个数的中位数比乙投中个数的中位数小
- C. 甲投中个数的标准差比乙投中个数的标准差小
- D. 甲投中个数的极差比乙投中个数的极差大

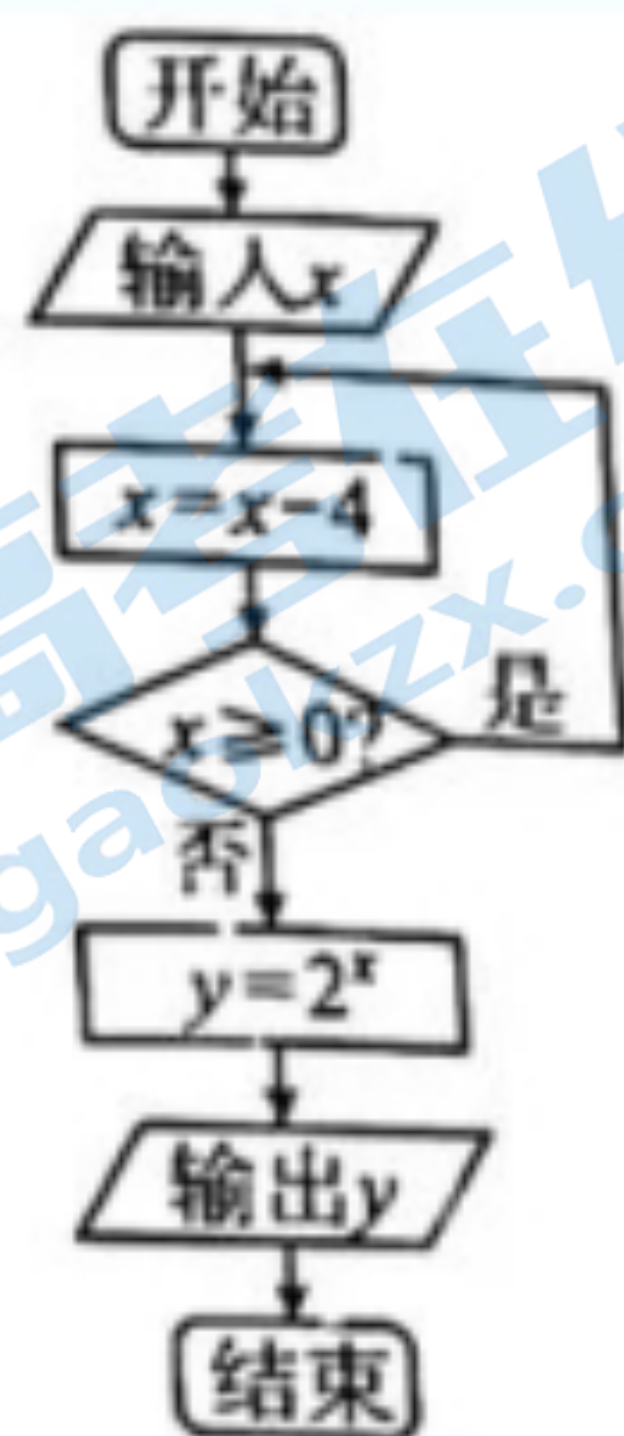
6. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 值为 2023, 则输出的 y 值为

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$



7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 若 $a_1 + a_5 + a_9 = 9$,

$b_2 b_5 b_8 = 3\sqrt{3}$, 则 $\frac{a_2 + a_4}{1 + b_2 b_5} =$

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 A 在 C 上, 若 $|F_1 A| = 2|F_2 A|$,

$\angle A F_1 F_2 = 30^\circ$, $\triangle A F_1 F_2$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

9. 若直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切, 则 $k =$

A. $\frac{1}{e^2}$

B. $\frac{2}{e^2}$

C.

D. $\frac{2}{e}$

10. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象经过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 将该函数的图象向右平移

$\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后, 所得函数图象关于原点对称, 则 ω 的最小值是

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{8}{3}$

C. 3

D. $\frac{7}{2}$

11. 在正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, 下列结论正确的是

A. AB_1 与 $A_1 C_1$ 所成的角为 60°

B. DB_1 与 $A_1 C_1$ 所成的角为 60°

C. AB_1 与 $A_1 D$ 所成的角为 45°

D. DB_1 与 $C_1 D_1$ 所成的角为 45°

12. 已知 O 为坐标原点, F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, A, B 分别为 C 的左、

右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF_2 \perp x$ 轴, 直线 AP 与 y 轴交于点 M , 直线 BM 与 PF_2 交于点 Q ,

直线 $F_1 Q$ 与 y 轴交于点 N . 若 $|ON| = \frac{1}{4}|OM|$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = (a-1)x^2 + a \sin x$ 为偶函数, 则 $a =$

$y \leq 4 - x,$

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y + 2 \geq 0 \\ y \leq x + 2 \end{cases}$, 则 $2x + 3y$ 的最大值为

$y \leq x + 2,$

15. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个球与该四棱台的每个面都相切, 若 $A_1B_1=2, AB=4$, 则该四棱台的高是_____.

16. 《九章算术》有这样一个问题: 今有女子善织, 日增等尺, 四日织 24 尺, 且第七日所织尺数为前两日所织尺数之积. 则第十日所织尺数为? 译为: 现有一善于织布的女子, 从第 2 天开始, 每天比前一天多织相同量的布, 前 4 天织了 24 尺布, 且第 7 天所织布尺数为第 1 天和第 2 天所织布尺数的积. 问第 10 天织布尺数为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生依据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

某工厂注重生产工艺创新, 设计并试运行了甲、乙两条生产线. 现对这两条生产线生产的产品进行评估, 在这两条生产线所生产的产品中, 随机抽取了 300 件进行测评, 并将测评结果 (“优”或“良”) 制成如下所示列联表:

	良	优	合计
甲生产线	40	80	120
乙生产线	80	100	180
合计	120	180	300

(1) 通过计算判断, 是否有 90% 的把握认为产品质量与生产线有关系?

(2) 现对产品进行进一步分析, 在测评结果为 “良” 的产品中按生产线用分层抽样的方法抽取了 6 件产品. 若在这 6 件产品中随机抽取 2 件, 求这 2 件产品中至少有一件产自于甲生产线的概率.

附表及公式:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $A = \frac{\pi}{3}$, _____, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

从① $a = 2\sqrt{3}$; ② $b = 2$ 这两个条件中任选一个; 补充在上面问题中并作答.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (12分)

已知 O 为坐标原点, 过点 $P(2,0)$ 的动直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点.

(1) 求 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在不同于点 P 的定点 Q , 使得 $\angle AQP = \angle BQP$ 恒成立? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

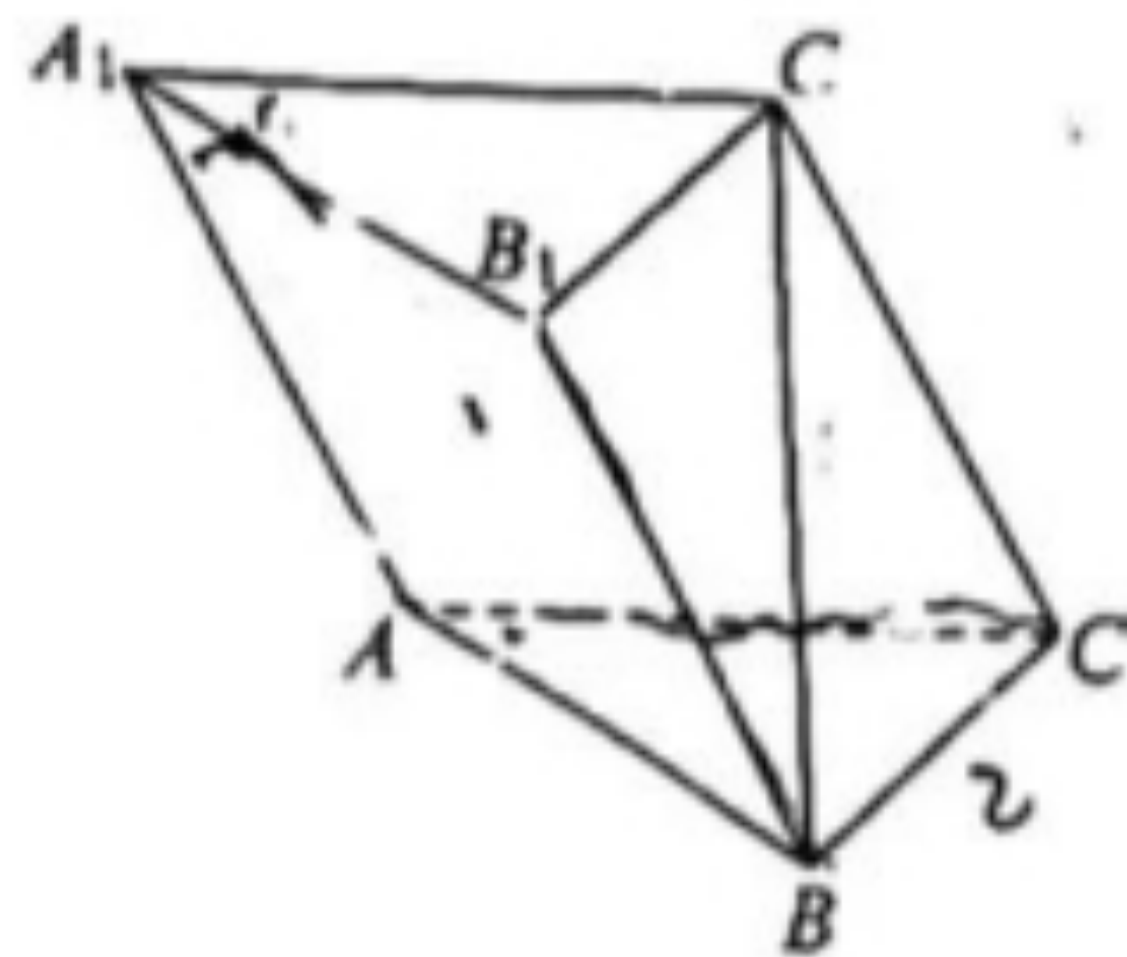
20. (12分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 直线 $C_1B \perp$ 平面 ABC , 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 BB_1C_1 ,

(1) 求证: $AC \perp BB_1$;

(2) 若 $AC = BC = BC_1 = 2$, 在棱 A_1B_1 上是否存在一点 P , 使得四棱

锥 $P-BCC_1B_1$ 的体积为 $\frac{4}{3}$? 若存在, 指出点 P 的位置; 若不存在, 请说明理由.



21. (12分)

已知函数 $f(x) = ax^3 + 2\sin x - x\cos x$.

(1) 若 $a = 0$, 判断 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的单调性, 并说明理由;

(2) 当 $a > 0$, 探究 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的极值点个数.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = |x| + y$ (其中 $y > 0$), 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为

参数, $t > 0$), 曲线 $C_2: \begin{cases} x = -t\sin\alpha, \\ y = t\cos\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的

正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 C 的极坐标方程;

(2) 若曲线 C 与 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

设函数 $f(x) = |2x - 2| + |x + 2|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 5 - 2x$;

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 T , 正数 a, b 满足 $a^2 + b^2 + 2b = T$, 证明: $a + b \leq 2\sqrt{2} - 1$.