北京师范大学附属实验中学高三数学十月月考试题

2021. 10. 7

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|2<x\le 3\}$　B. $\{x|2\le x\le 3\}$　C. $\{x|1\le x<4\}$　D. $\{x|1<x<4\}$

2. 复数 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点所在的象限为（　　）

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　B. $y=2^{-x}$　C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　D. $y=\dfrac{1}{x}$

4. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=-2x-1$　B. $y=-2x+1$　C. $y=2x-3$　D. $y=2x+1$

5. 已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（　　）

A. $a<b<c$　B. $a<c<b$　C. $c<a<b$　D. $b<c<a$

6. 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$（　　）

A. $e^{-x}-1$　B. $e^{-x}+1$　C. $-e^{-x}-1$　D. $-e^{-x}+1$

7. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_5-a_3=12, a_6-a_4=24$，则 $\dfrac{S_n}{a_n}=$（　　）

A. 2^n-1　B. $2-2^{1-n}$　C. $2-2^{n-1}$　D. $2^{1-n}-1$

8. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n. 设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

9. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位:天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$. 据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2\approx 0.69)$（　　）

A. 1.2 天　B. 1.8 天　C. 2.5 天　D. 3.5 天

10. 已知 $M=\{\alpha\,|\,f(\alpha)=0\}, N=\{\beta\,|\,g(\beta)=0\}$，若存在 $\alpha\in M,\beta\in N$，使 $|\alpha-\beta|<n$，则称函数 $f(x),g(x)$ 互为"n 度零点函数"，若 $f(x)=3^{2-x}-1, g(x)=x^2-ae^x$ 互为"1 度零点函数"，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{4}{e}]$　B. $(\dfrac{1}{e},\dfrac{4}{e^2}]$　C. $[\dfrac{4}{e^2},\dfrac{2}{e})$　D. $[\dfrac{4}{e^3},\dfrac{2}{e})$

二、填空题：5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 复数 $z=(3-2i)i$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 等于________.

12. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2,\\ |x-3|+a,x\leqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$，则 $a=$_____.

13. 若 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是________.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$:______.

① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；③ $f'(x)$ 是奇函数.

15. 已知只有 50 项的数列 $\{a_n\}$ 满足下列三个条件：① $a_i\in\{-1,0,1\}, i=1,2,\cdots,50$；

② $a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9$；③ $101\le(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2\le 111$。

对所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2$ 共有 k 个不同的值，则 $k=$______.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. （本小题 13 分）已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图像与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为-1.

（I）求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

（II）证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$；

17、（本小题 13 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, n\in\mathrm{N}^*$，从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知，并完成解答：

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_4$，$b_3=a_7$，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

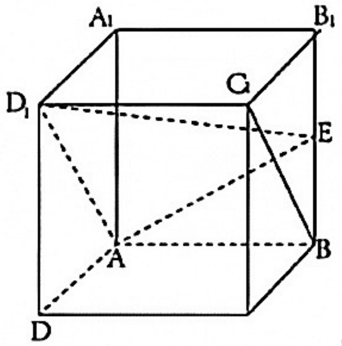
条件①：$a_1=-3$；

条件②：$a_{n+1}-a_n=2$；

条件③：$S_2=-4$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （本小题 14 分）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$BC_1 // $ 平面 AD_1E；

（Ⅱ）求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

19. （本小题 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，且 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围.

20. （本小题 15 分）已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx$（其中 a,b 为常数且 $a\neq 0$）在 $x=1$ 处取得极值.

(I) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上的最大值为 1，求 a 的值.

21.（本小题 15 分）在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<a_{n+1}$. 设 $m\in\mathbf{N}^*$，记使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m.

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 为 1，3，5，7，⋯，写出 b_1，b_2，b_3 的值；

（Ⅱ）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，求出所有可能的数列 $\{a_n\}$；

（Ⅲ）设 $a_p=q$，$a_1+a_2+\cdots+a_p=A$，求 $b_1+b_2+\cdots+b_q$ 的值.（用 p,q,A 表示）

北京师范大学附属实验中学高三数学十月月考试题

2021.10.7

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 设集合 $A=\{x|1\le x\le 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cup B=$（ C ）

$A.\{x|2<x\le 3\}$　$B.\{x|2\le x\le 3\}$　$C.\{x|1\le x<4\}$　$D.\{x|1<x<4\}$

2. 复数 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点所在的象限为（ A ）

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

【解析】：$\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10}=\dfrac{5+5\mathrm{i}}{10}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$，所以该复数对应的点为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，
该点在第一象限，故选：A.

3. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（ A ）

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　B. $y=2^{-x}$　C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　D. $y=\dfrac{1}{x}$

【解析】：$y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=2^{-x},y=log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是减函数．故选：A．

4. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程为（B ）

A. $y=-2x-1$　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　D. $y=2x+1$

【详解】$\because f(x)=x^4-2x^3$，$\therefore f'(x)=4x^3-6x^2$，$\therefore f(1)=-1$，$f'(1)=-2$，

因此，所求切线的方程为 $y+1=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$.故选：B

5. 已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则（ B ）

A. $a<b<c$　B. $a<c<b$　C. $c<a<b$　D. $b<c<a$

【解析】：$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，$b=2^{0.2}>2^0=1$，$\because 0<0.2^{0.3}<0.2^0=1$，$\therefore c=0.2^{0.3}\in(0,1)$，
$\therefore a<c<b$，故选：B．

6. 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$（ D ）

A. $e^{-x}-1$　B. $e^{-x}+1$　C. $-e^{-x}-1$　D. $-e^{-x}+1$

【解析】：设 $x<0$，则 $-x>0$，$\therefore f(-x)=e^{-x}-1$，$\because$ 设 $f(x)$ 为奇函数，$\therefore -f(x)=e^{-x}-1$，
即 $f(x)=-e^{-x}+1$．故选：D．

7. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $a_5-a_3=12,a_6-a_4=24$，则 $\dfrac{S_n}{a_n}=$（ B ）

$A.2^n-1$　$B.2-2^{1-n}$　$C.2-2^{n-1}$　$D.2^{1-n}-1$

【详解】设等比数列的公比为 q，

由 $a_5-a_3=12,a_6-a_4=24$ 可得：$\begin{cases}a_1q^4-a_1q^2=12\\a_1q^5-a_1q^3=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=2\\a_1=1\end{cases}$，

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}, S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，因此 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$. 故选：B.

8. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n． 设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则(B)

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【思路分析】根据等比数列的求和公式和充分条件和必要条件的定义即可求出.

【解析】：若 $a_1=-1$，$q=1$，则 $S_n=na_1=-n$，则 $\{S_n\}$ 是递减数列，不满足充分性；

$\because S_n=\frac{a_1}{1-q}(1-q^n)$，则 $S_{n+1}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^{n+1})$，$\therefore S_{n+1}-S_n=\frac{a_1}{1-q}(q^n-q^{n+1})=a_1q^n$，

若 $\{S_n\}$ 是递增数列，$\therefore S_{n+1}-S_n=a_1q^n>0$ 对 $\forall n\in N$ 恒成立，则 $a_1>0$，$q>0$，$\therefore$ 满足必要性，

故甲是乙的必要条件但不是充分条件，故选：B.

9. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位:天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$. 据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 ($\ln 2\approx 0.69$) （B　　）

A. 1.2 天　　　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　　　D. 3.5 天

【详解】因　$R_0=3.28$，$T=6$，$R_0=1+rT$，所以 $r=\frac{3.28-1}{6}=0.38$，所以 $I(t)=e^{rt}=e^{0.38t}$，

设在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间为 t_1 天，

则 $e^{0.38(t+t_1)}=2e^{0.38t}$，所以 $e^{0.38t_1}=2$，所以 $0.38t_1=\ln 2$，所以 $t_1=\frac{\ln 2}{0.38}\approx\frac{0.69}{0.38}\approx 1.8$ 天.

10. 已知 $M=\{\alpha\mid f(\alpha)=0\}.N=\{\beta\mid g(\beta)=0\}$,若存在 $\alpha\in M,\beta\in N$,使 $|\alpha-\beta|<n$,则称函数 $f(x),g(x)$ 互为“n 度零点函数“，若 $f(x)=3^{2-x}-1,g(x)=x^2-ae^x$ 互为“1 度零点函数“，则实数 a 的取值范围为（　　　）B

$A.(\frac{1}{e^2},\frac{4}{e}]$　　$B.(\frac{1}{e},\frac{4}{e^2}]$　　$C.[\frac{4}{e^2},\frac{2}{e})$　　$D.[\frac{4}{e^3},\frac{2}{e})$

二、填空题：5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 复数 $z=(3-2i)i$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 等于________．$2-3i$

12. 已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2,\\|x-3|+a,x\leqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$，则 $a=$ __2__.

【解析】：因为函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2\\|x-3|+a,x\leqslant 2\end{cases}$，

所以 $f(\sqrt{6})=(\sqrt{6})^2-4=2$，

则 $f(f(\sqrt{6}))=f$（2）$=|2-3|+a=3$，解得 $a=2$．

13. 若 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是________．6

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$：______. $f(x)=x^4$

① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；③ $f'(x)$ 是奇函数.

【解析】：取 $f(x)=x^4$，则 $f(x_1x_2)=(x_1x_2)^4=x_1^4x_2^4=f(x_1)f(x_2)$，满足①，

$f'(x)=4x^3$，$x>0$ 时有 $f'(x)>0$，满足②，

$f'(x)=4x^3$ 的定义域为 R，又 $f'(-x)=-4x^3=-f'(x)$，故 $f'(x)$ 是奇函数，满足③.

故答案为：$f(x)=x^4$（答案不唯一，$f(x)=x^{2n}\left(n\in N^*\right)$ 均满足）

15. 已知只有 50 项的数列 $\{a_n\}$ 满足下列三个条件：① $a_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,50$；

② $a_1+a_2+\cdots+a_{50}=9$；③ $101\le(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{50}+1)^2\le111$。

对所有满足上述条件的数列 $\{a_n\}$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{50}^2$ 共有 k 个不同的值，则 $k=$______. 6

三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. （本小题 13 分）已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图像与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为-1.

（I）求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

（II）证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$；

解：（I）由 $f(x)=e^x-ax$，得 $f'(x)=e^x-a$. 又 $f'(0)=1-a=-1$，得 $a=2$. 所以

$f(x)=e^x-2x, f'(x)=e^x-2$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$. 当 $x<\ln 2$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增. 所以当 $x=\ln 2$ 时，$f(x)$ 取得极小值，且极小值为

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-\ln 4, f(x)$ 无极大值. （7 分）

（II）令 $g(x)=e^x-x^2$，则 $g'(x)=e^x-2x$. 由（I）得 $g'(x)=f(x)\ge f(\ln 2)>0$，故 $g(x)$ 在 R 上单调递增，又 $g(0)=1>0$，因此，当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)>0$，即 $x^2<e^x$.（13 分）

17、（本小题 13 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, n\in N^*$，从条件①、条件②和条件③中选择两个作为已知，并完成解答：

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_4$，$b_3=a_7$，求数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

条件①：$a_1=-3$；

条件②：$a_{n+1}-a_n=2$；

条件③：$S_2=-4$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：(不能选择①③作为已知条件)

选择①②作为已知条件. ………………2 分

因为 $a_1=-3$，$a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=-3$ 为首项，公差 $d=2$ 的等差数列.

所以 $a_n=2n-5$. ………………6 分

选择②③作为已知条件. ………………2 分

因为 $a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，公差为 $d=2$ 的等差数列.

因为 $S_2=-4$，所以 $a_1+a_2=-4$.所以 $2a_1+d=-4$.所以 $a_1=-3$.

所以 $a_n=2n-5$. ………………6 分

(II) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $b_2=a_4=3$，$b_3=a_7=9$，$q=\dfrac{b_3}{b_2}=3$，

所以 $b_1=\dfrac{b_2}{q}=\dfrac{3}{3}=1$.

所以等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

所以 $a_n+b_n=(2n-5)+3^{n-1}$.

所以 $T_n=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$

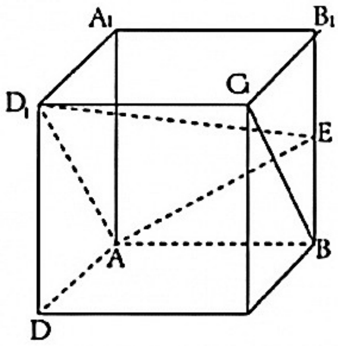
$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=[-3+(-1)+\cdots+(2n-5)]+(1+3+\cdots+3^{n-1})$

$=\dfrac{n\times[-3+(2n-5)]}{2}+\dfrac{1-3^n}{1-3}$

$=n^2-4n+\dfrac{1}{2}(3^n-1)$. ………………13 分

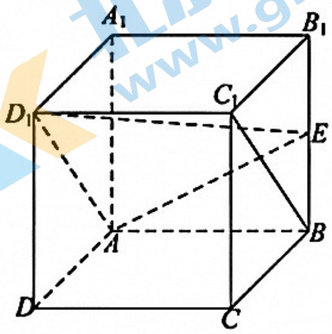
18. (本小题 14 分) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点.



（Ⅰ）求证：BC_1 // 平面 AD_1E；

（Ⅱ）求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

【详解】（Ⅰ）如下图所示：

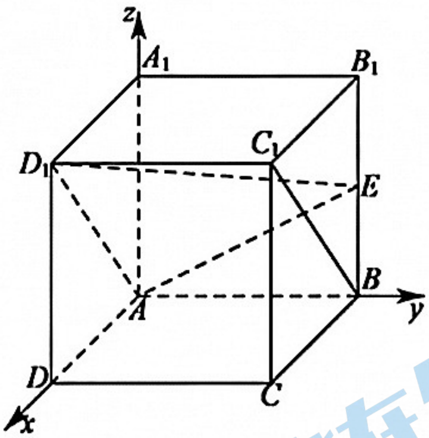


在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，$A_1B_1//C_1D_1$ 且 $A_1B_1=C_1D_1$，

$\therefore AB//C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，所以，四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1//AD_1$，

$\because BC_1\not\subset$ 平面 AD_1E，$AD_1\subset$ 平面 AD_1E，$\therefore BC_1//$ 平面 AD_1E；（6 分）

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点，AD、AB、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，则 $A(0,0,0)$、$A_1(0,0,2)$、$D_1(2,0,2)$、$E(0,2,1)$，

$\overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

令 $z=-2$，则 $x=2$，$y=1$，则 $n=(2,1,-2)$.

$$\cos<\vec{n},\overrightarrow{AA_1}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=-\frac{4}{3\times2}=-\frac{2}{3}.$$

因此，直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.（14 分）

19. （本小题 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，且 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围.

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　（5 分）

（Ⅱ）当直线 l 的斜率不存在时，直线 l：$x=1$ 与椭圆 C 交于 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(1,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点，

所以 $|PA|=|PB|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $|PA|\cdot|PB|=\frac{3}{4}$.

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)$，

由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$得$(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$．

且$\Delta=64k^4-4(1+4k^2)(4k^2-4)=16(3k^2+1)>0$．

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$．

所以$|PA||PB|=(\sqrt{1+k^2}\,|x_1-1|)(\sqrt{1+k^2}\,|x_2-1|)=(1+k^2)|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|=\dfrac{3(1+k^2)}{1+4k^2}$．

令$t=1+4k^2$，则$t\ge 1$，

所以$|PA||PB|=\dfrac{3(1+k^2)}{1+4k^2}=\dfrac{3(1+\frac{t-1}{4})}{t}=\dfrac{3t+9}{4t}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4t}\in(\dfrac{3}{4},3]$．

当$t=1$，即$k=0$时，$|PA|\cdot|PB|$取最大值3．

综上所述，$|PA|\cdot|PB|$的取值范围是$[\dfrac{3}{4},3]$．（15 分）

20．（本小题 15 分）已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$（其中a,b为常数且$a\ne 0$）在$x=1$处取得极值.

(I) 当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间；

(II) 若$f(x)$在$(0,e]$上的最大值为1，求a的值.

解：(I) 因为$f(x)=\ln x+ax^2+bx$,所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax+b$

因为函数$f(x)=\ln x+ax^2+bx$在$x=1$处取得极值

$f'(1)=1+2a+b=0$

当$a=1$时，$b=-3$，$f'(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$，

$f'(x),f(x)$随x的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,\dfrac{1}{2})$，$(1,+\infty)$

单调递减区间为$(\dfrac{1}{2},1)$（6 分）

(II) 因为 $f'(x)=\dfrac{2ax^2-2(a+1)x+1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x-1)}{x}$

令 $f'(x)=0$，$x_1=1,x_2=\dfrac{1}{2a}$

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $x_2=\dfrac{1}{2a}\neq x_1=1$

当 $\dfrac{1}{2a}<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,e]$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,e]$ 上的最大值为 $f(1)$，令 $f(1)=1$，解得 $a=-2$

当 $a>0$，$x_2=\dfrac{1}{2a}>0$

当 $\dfrac{1}{2a}<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2a})$ 上单调递增，$(\dfrac{1}{2a},1)$ 上单调递减，$(1,e)$ 上单调递增

所以最大值 1 可能在 $x=\dfrac{1}{2a}$ 或 $x=e$ 处取得

而 $f(\dfrac{1}{2a})=\ln\dfrac{1}{2a}+a(\dfrac{1}{2a})^2-(2a+1)\dfrac{1}{2a}=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}-1<0$

所以 $f(e)=\ln e+ae^2-(2a+1)e=1$，解得 $a=\dfrac{1}{e-2}$

当 $1\le\dfrac{1}{2a}<e$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，$(1,\dfrac{1}{2a})$ 上单调递减，$(\dfrac{1}{2a},e)$ 上单调递增

所以最大值 1 可能在 $x=1$ 或 $x=e$ 处取得

而 $f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$

所以 $f(e)=\ln e+ae^2-(2a+1)e=1$，

解得 $a=\dfrac{1}{e-2}$，与 $1<x_2=\dfrac{1}{2a}<e$ 矛盾

当 $x_2=\dfrac{1}{2a}\ge e$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,e)$ 单调递减，

所以最大值 1 可能在 $x=1$ 处取得，而 $f(1)=\ln 1+a-(2a+1)<0$，矛盾

综上所述，$a=\dfrac{1}{e-2}$ 或 $a=-2$．　（15 分）

21．（本小题 15 分）在无穷数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<a_{n+1}$．设 $m\in\mathbf{N}^*$，记使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m．

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 为 1，3，5，7，…，写出 b_1，b_2，b_3 的值；

（Ⅱ）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，求出所有可能的数列 $\{a_n\}$；

（Ⅲ）设 $a_p=q$，$a_1+a_2+\cdots+a_p=A$，求 $b_1+b_2+\cdots+b_q$ 的值．（用 p,q,A 表示）

（Ⅰ）解：$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=2$．　（4 分）

（Ⅱ）解：由题意，得 $1=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

结合条件 $a_n\in\mathbf{N}^*$，得 $a_n\geqslant n$．

又因为使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，使得 $a_n\leqslant m+1$ 成立的 n 的最大值为 b_{m+1}，

所以 $b_1=1$，$b_m\leqslant b_{m+1}(m\in\mathbf{N}^*)$．

设 $a_2=k$，则 $k\geqslant 2$．假设 $k>2$，即 $a_2=k>2$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n>2$；当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n\geqslant k+1$．

所以 $b_2=1$，$b_k=2$．因为 $\{b_n\}$ 为等差数列，所以公差 $d=b_2-b_1=0$，所以 $b_n=1$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

这与 $b_k=2(k>2)$ 矛盾，所以 $a_2=2$．

又因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，所以 $b_2=2$，

由 $\{b_n\}$ 为等差数列，得 $b_n=n$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$．

因为使得 $a_n\leqslant m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，所以 $a_n\leqslant n$，

由 $a_n\geqslant n$，得 $a_n=n$．　（10 分）

（Ⅲ）解：设 $a_2=k$ $(k>1)$，

因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，所以 $b_1=b_2=\cdots=b_{k-1}=1$，且 $b_k=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 中等于 1 的项有 $k-1$ 个，即 a_2-a_1 个；

设 $a_3=l$ $(l>k)$，则 $b_k=b_{k+1}=\cdots=b_{l-1}=2$，且 $b_l=3$，

所以数列$\{b_n\}$中等于2的项有$l-k$个，即a_3-a_2个；……

以此类推，数列$\{b_n\}$中等于$p-1$的项有a_p-a_{p-1}个.

所以$b_1+b_2+\cdots+b_q=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+(p-1)(a_p-a_{p-1})+p$

$$=-a_1-a_2-\cdots-a_{p-1}+(p-1)a_p+p$$

$$=pa_p+p-(a_1+a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p)$$

$$=p(q+1)-A.$$

即$b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$.　　　　（15分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。