绝密★启用前

天一大联考
2021—2022学年高中毕业班阶段性测试(三)
理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式:设圆台的上下底面半径分别为 r,R,圆台的高为 h,则圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(R^2+r^2+Rr)h$.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x<0或x>3\}$,$B=\{-3a,a\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,首项 $a_1=1$,前5项和 $S_5=25$,则 $a_7=$

A. 15　　B. 14　　C. 13　　D. 12

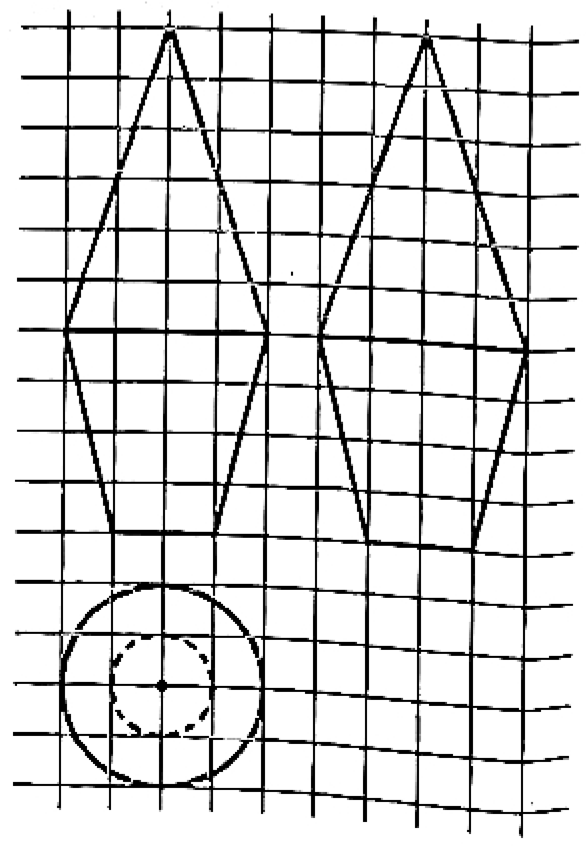
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,\lambda)(\lambda\in\mathbf{R})$,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. 5　　B. $5\sqrt{2}$　　C. $5\sqrt{3}$　　D. 10

4. 已知 $a\in\mathbf{R}$,则"圆 $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-14y+a=0$ 有4条公切线"的充要条件是

A. $41<a<50$　　B. $43<a<49$　　C. $a>41$　　D. $40<a<51$

5. 中世纪是骑兵的黄金时代,其中最具有代表性的是拜占庭重骑兵,他们的主要武器是长矛,如图所示,粗线为一款长矛的矛头模型的三视图,图中小正方形的边长均为1,则该模型的体积为



A. $\frac{50}{3}\pi$　　B. 17π

C. $\frac{52}{3}\pi$　　D. 18π

6. 已知 $a,b\in(0,+\infty)$,若 $\frac{1}{5a+2b}+\frac{1}{2a+5b}=2$,则 $a+b$ 的最小值为

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{3}{14}$

C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{1+\sqrt{2}}{7}$

7. 计算：$\frac{\sin 1\ 100°-2\sin 100°}{\cos 160°}=$

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知$\triangle ABC$中，边AB,AC的垂直平分线交于点D，且$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$，若$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{AB}|=2$，则$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=$

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

9. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+3}{x-1},x\leqslant 0,\\ x^2-x-3,x>0,\end{cases}$ 若函数$g(x)=f(x)-m$有两个不同的零点，则实数m的取值范围为

A. $(2,+\infty)$　　B. $\left(-\frac{15}{4},2\right)$

C. $\left(-\frac{13}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{13}{4},2\right)$

10. 某工厂使用过滤仪器过滤排放的废气，过滤过程中体积一定的废气中的污染物浓度P(mg/L)与过滤时间t(h)之间的关系式为$P=P_0\cdot e^{-kt}$（$P_0>0$，k为常数），且根据以往的经验，前2个小时的过滤能够消除$\frac{1}{4}$的污染物. 现有如下说法：①$k=\ln 2$；②经过1个小时的过滤后，能够消除$\frac{1}{5}$的污染物；③经过5个小时的过滤后，废气中剩余的污染物低于原来的$\frac{1}{2}$. 则其中正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球表面积为27π，点E为棱BB_1的中点，且$DE\perp$平面α，点$C_1\in$平面α，则平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面图形的面积为

A. $\frac{81\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{81\sqrt{2}}{8}$　　C. $\frac{81}{4}$　　D. $\frac{81}{8}$

12. 已知点A在双曲线$C:\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{b^2}=1(b>0)$上，且双曲线$C$的上、下焦点分别为$F_1,F_2$，点$B$在$\angle F_1AF_2$的平分线上，且$BF_2\perp AB$，若点$D$在直线$l:y=x-8$上，则$|BD|$的最小值为

A. $2\sqrt{2}-2$　　B. $3\sqrt{2}-2$　　C. $4\sqrt{2}-2$　　D. $4\sqrt{2}-4$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ 3x-y\geqslant 0,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$则目标函数$z=x+2y$的最大值为________.

14. 已知函数$f(x)=\log_9(x+3)$，$x\in[0,m]$，若$\forall x_1\in[0,m]$，$\exists x_2\in[0,m]$，使得$f(x_1)=\frac{1}{f(x_2)}$，则$m=$______.

15. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线l_1的距离为3，点M在抛物线C上，$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}$（点$O$为坐标原点），过点$N$作直线$OM$的垂线$l_2$与$x$轴交于点$P$，若$2|OP|=|MF|+\lambda p$，则实数$\lambda=$________.

16. 已知函数$f(x)=\sqrt{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}+\sqrt{2\left|\cos\frac{x}{2}\right|}$，则$f(x)$的最小正周期为________；当$x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$时$f(x)$的值域为________.（本题第一空2分，第二空3分）

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=3\sin^2\frac{3}{2}x+a\sin 3x$ 的最大值为$\frac{9}{2}$，其中 $a>0$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上的单调递减区间.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=2a_1=6$，$\frac{a_{n+2}+4S_n+4a_n}{4}=S_{n+1}$.

(Ⅰ)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅱ)求数列$\left\{\frac{8n+10}{3}\cdot a_{2n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

19. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中，点 M 在边 BC 上，$\angle MAC=\frac{\pi}{6}$，$AC=3$，$AM+MC=2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求证：$\triangle AMC$ 是等腰三角形；

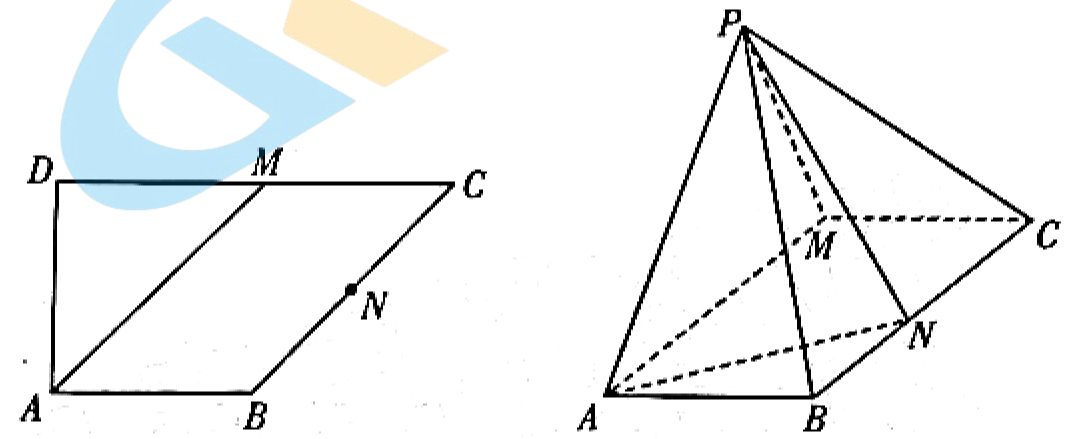
(Ⅱ)若 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$，求 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 的面积之差.

20. (12 分)

已知梯形 $ABCD$ 如图(1)所示,其中 $AB/\!/CD$, $\angle BAD=90°$, $\angle BCD=45°$, $CD=\sqrt{2}BC$,过点 A 作 BC 的平行线交线段 CD 于 M,点 N 为线段 BC 的中点. 现将△DAM 沿 AM 进行翻折,使点 D 到达点 P 的位置,且平面 $PAM\perp$ 平面 AMC,得到的图形如图(2)所示.

(Ⅰ)求证: $AP\perp PN$;

(Ⅱ)求平面 PAN 与平面 PCM 所形成的锐二面角的余弦值.



图(1)　　图(2)

21. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A,B,上顶点为 D,点 $P(x_0,y_0)$在椭圆 C 上,且 $x_0y_0\neq 0$.

(Ⅰ)过点 D 作斜率为 2 的直线 l,设 l 与椭圆 C 的另一个交点为 G,求 $|DG|$;

(Ⅱ)若直线 AD 与直线 BP 交于点 E,直线 DP 与 x 轴交于点 M,求证:直线 EM 过定点 $T(2,1)$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=x(e^x-a)(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $a=2e$,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(Ⅱ)若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 2\ln x+\ln\frac{e^2}{4}$在$(0,+\infty)$上恒成立,求 a 的取值范围.