

2019 北京十五中高三（上）期中

数 学

2019.11

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟，考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

一、 选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x|x^2 - 2x < 0\}$ ， $B = \{x|x - 1 \geq 0\}$ ，那么 $A \cap (C_U B) =$

- A. $\{x|0 < x < 1\}$ B. $\{x|x < 0\}$
 C. $\{x|x > 2\}$ D. $\{x|1 < x < 2\}$

2. 若复数 $(1 - i)(a + i)$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -1)$
 C. $(1, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

3. 下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(-\infty, 0)$ 上为减函数的是

- A. $y = \log_2(-x)$ B. $y = \frac{x}{1-x}$ C. $y = -x^2 + 1 - 8x$ D. $y = e^{|x|}$

4. 设 m, n 为非零向量，则“存在复数 λ ，使得 $m = \lambda n$ ”是“ $m \cdot n < 0$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 中国历法推测遵循以测为辅、以算为主的原则。例如《周髀算经》和《易经》里对二十四节气的晷（guǐ）影长的记录中，冬至和夏至的晷影长是实测得到的，其它节气的晷影长则使按照等差数列的规律计算得出的，下表为《周髀算经》对二十四节气晷影长的记录，其中 $115.1\frac{4}{6}$ 寸表示 115 寸 $1\frac{4}{6}$ 分（1 寸=10 分）。

节气	冬至	小寒（大雪）	大寒（小雪）	立春（立冬）	雨水（霜降）	惊蛰（寒露）
晷影（寸）	135	$125.\frac{5}{6}$	$115.1\frac{4}{6}$	$105.2\frac{3}{6}$	$95.3\frac{2}{6}$	$85.4\frac{2}{6}$

节气	春分（秋分）	清明（白 鹭）	谷雨（处 暑）	立夏（立 秋）	小满（大 暑）	芒种（小 暑）	夏至
晷影（寸）	75.5	$66.5\frac{5}{6}$	$55.6\frac{4}{6}$	$45.7\frac{3}{6}$	$35.8\frac{2}{6}$	$25.9\frac{1}{6}$	16.0

已知《易经》中记录的冬至晷影长为 130.0 寸，夏至晷影长为 14.8 寸，那么《易经》中所记录的惊蛰的晷影长应为

- A. 72.4 寸 B. 81.4 寸 C. 82.0 寸 D. 91.6 寸

6. 已知函数 $f(x) = |2^x - 2|$ ，若 $f(a) = f(b)(a \neq b)$ ，则 $a+b$ 的取值范围是

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

7. 已知在直角三角形 ABC 中，A 为直角，AB=1，BC=1，若 AM 是 BC 边上的高，点 P 在 $\triangle ABC$ 内部或边界上运动，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的取值范围

- A. $[-1, 0]$ B. $[-\frac{1}{2}, 0]$ C. $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$ D. $[-\frac{3}{4}, 0]$

8. 已知函数 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$ ， $f(x_1) + f(x_2) = 0$ ，且函数 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性，则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 在 $(x + \frac{1}{x^2})^6$ 的展开式中，常数项为_____。（用数字作答）

10. 已知向量 $a = (k, 3), b = (1, 4), c = (2, 1)$, 且 $(2a - 3b) \perp c$, 则实数 k 的值为_____.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3^n + 1$, 则数列的通项公式 $a_n =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x}$ 的最小正周期是_____.

13. 海水受日月的引力，在一定的时候发生的涨落现象叫潮，港口的水深会随潮的变化而变化，某港口水的深度 y （单位：米）是时刻 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位：小时) 的函数，记作 $y = f(t)$.

下面是该港口某日水深的

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	8.0	11.0	7.9	5.0	8.0	11.0	8.0	5.0	8.0

经长期观察，曲线 $y = f(t)$ 可以近似地看成函数 $y = A \sin \omega t + b$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象。

根据以上数据，函数 $y = f(t)$ 的近似表达式为_____.

14. 设集合 X 是实数集 R 的子集，若果点 $x_0 \in R$, 满足：对任意 $a > 0$, 都存在 $x \in X$, 使得 $0 < |x - x_0| < a$, 那么称 x_0 为集合 X 的聚点，有下列集合

① $\{\frac{n}{n+1} | n \in Z, n \geq 0\}$; ② $\{x | x \in R, x \neq 0\}$; ③ $\{\frac{1}{n} | n \in Z, n \neq 0\}$; ④ 整数集 Z . 其中以 0 为聚点的集合有_____.
(请写出所有满足条件的集合的编号)

三、解答题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, A = \frac{\pi}{3}, \tan B = -4\sqrt{3}, b = 8$

(I) 求 a ;

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_2 = 3, a_4 - a_3 = 18$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_n + \log_3 a_n$, 求 $b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin x \cos x + 1$

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值;

(III) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上恰有两个零点, 求 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = e^x \sin x - ax$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a \leq 0$ 时, 判断 $f(x)$ 在 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上的单调性, 并说明理由;

(III) 当 $a < 0$ 时, 求证: $\forall x \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ 都有 $f(x) \geq 0$



长按识别关注

20. 若项数为 n 的单调递增数列 $\{a_n\}$ 满足:

① $a_1 = 1$

② 对任意 $k (k \in N^*, 2 \leq k \leq n)$, 存在 $i, j (i \in N^*, j \in N^*, 1 \leq i \leq j \leq n)$ 使得 $a_k = a_i + a_j$; 则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

(I) 分别判断数列 1, 3, 4, 7 和 1, 2, 3, 5 是否具有性质 P, 并说明理由;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P, 且 $a_n = 36$,

(i) 证明数列 $\{a_n\}$ 的项数 $n \geq 7$;

(ii) 求数列 $\{a_n\}$ 中所有项的和的最小值.