

# 第 40 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答

(2023 年 9 月 16 日 9:00-12:00)

一、

(1)

(i) 设物距  $u_1$  对应的像距为  $v_1$ ，代入成像公式有

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{F} \quad ①$$

由横向放大关系得

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{l_1}{l} \quad ②$$

联立①②式得

$$u_1 = F \left( 1 + \frac{l}{l_1} \right) \quad ③$$

类似地，可得

$$u_2 = F \left( 1 + \frac{l}{l_2} \right) \quad ④$$

于是有

$$s = u_2 - u_1 = F \left( \frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1} \right) \quad ⑤$$

(对于  $u_2$  和对应的像距  $v_2$  重写物象关系及放大率关系，不额外给分)

所以

$$F = \frac{s}{\frac{l}{l_2} - \frac{l}{l_1}} = \frac{sl_1 l_2}{l(l_1 - l_2)} \quad ⑥$$

(ii) 将⑥式代入③式可得

$$u_1 = \frac{sl_2(l_1 + l)}{l(l_1 - l_2)} \quad ⑦$$

(2)

(i) 求物方主点 H 位置：

设透镜组成像时，透镜 1 的对应的物距和像距分别为  $u_1$  和  $v_1$ ，透镜 2 的对应的物距和像距分别为  $u_2$  和  $v_2$ （注意区分和 (1) 问中对应的参量的不同），代入成像公式有

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} \quad ⑧$$

透镜 1 和 2 的横向放大率分别为

$$m_1 = -\frac{v_1}{u_1}, \quad m_2 = -\frac{v_2}{u_2} \quad ⑨$$

联立⑧⑨式得

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{u_1}{f_1}, \quad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{u_2}{f_2} \quad ⑩$$

得透镜组的放大率  $m$  的倒数为

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} \frac{1}{m_2} = \left( 1 - \frac{u_1}{f_1} \right) \left( 1 - \frac{u_2}{f_2} \right) \quad ⑪$$

透镜 1 的像成为透镜 2 的物，两透镜光心距离为  $d$ ，故

$$u_2 = d - v_1 = d - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} \quad (12)$$

将(12)代入(11)式得

$$\frac{1}{m} = \left(1 - \frac{u_1}{f_1}\right) \left(1 - \frac{d - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}}{f_2}\right) = 1 - \frac{d}{f_2} - u_1 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) \quad (13)$$

令  $m=1$ , 得 H 相对于透镜 1 光心  $O_1$  的物距

$$u_H = u_1 = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2} \quad (14)$$

求像方主点  $H'$  位置:

将(14)代入(12)以及(8), 解出  $v_2$  即可。或根据光路的可逆性, 可得  $H'$  相对于透镜 2 光心  $O_2$  的像距为

$$v_{H'} = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} \quad (15)$$

(ii) 像方焦距  $F'$  的计算:

物距为无限大时 (即一束平行光入射透镜组), 经过透镜组成像的位置即为像方焦点。取  $u_1 = \infty$  得  $v_1 = f_1$ , 故  $u_2 = d - v_1 = d - f_1$ 。代入(8)式得

$$v_{F'} = v_2 = \frac{(d - f_1) f_2}{d - f_1 - f_2} \quad (16)$$

利用(15)(16)式, 可得像方焦距

$$F' = v_{F'} - v_{H'} = \frac{-f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{F'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (17)$$

同理可得物方焦距

$$F = F' = \frac{-f_1 f_2}{d - f_1 - f_2}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (18)$$

评分参考: 本题 40 分。

第 (1) 问 16 分:

第 (i) 小问 14 分, ①式 2 分, ②式 4 分, ③④⑤⑥式各 2 分;

第 (ii) 小问 2 分, ⑦式 2 分。

第 (2) 问 24 分:

第 (i) 小问 16 分, ⑨⑩式各 4 分, ⑫式 2 分, ⑭式 4 分, ⑮式 2 分;

第 (ii) 小问 8 分, ⑯式 2 分, ⑰式 4 分, ⑱式 2 分

二、

(1) 假设活塞受到一个微小扰动, 而偏离正中央位置的角度  $|\theta| \ll 1$ , 则活塞的运动方程为

$$mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)} \quad (1)$$

因为  $|\theta| \ll 1$ , 所以有

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}, \quad \frac{1}{\pi/2 - \theta} \approx \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \theta + \frac{8}{\pi^3} \theta^2 + \frac{16}{\pi^4} \theta^3, \quad \frac{1}{\pi/2 + \theta} \approx \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \theta + \frac{8}{\pi^3} \theta^2 - \frac{16}{\pi^4} \theta^3 \quad (2)$$

于是活塞的运动方程可化简为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{r} \left( g - \frac{8nRT}{\pi^2 rm} \right) \theta \quad (3)$$

如果圆环正中央是活塞的稳定平衡位置, 则需要满足

$$g - \frac{8nRT}{\pi^2 rm} < 0 \quad (4)$$

即

$$T > \frac{\pi^2 mgr}{8nR} \quad (5)$$

所以临界温度为

$$T_c = \frac{\pi^2 mgr}{8nR} \quad (6)$$

此时活塞将在平衡位置附近做简谐振动，其振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{r} \left( \frac{8nRT}{\pi^2 rm} - g \right)} \quad (7)$$

(2) 当温度  $T = T_c$  时，利用②式可得活塞的运动方程①近似为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{24 + \pi^2}{6\pi^2} \frac{g}{r} \theta^3 \quad (8)$$

由此可知活塞受到正比于  $\theta^3$  的恢复力，所以该位置是稳定平衡位置。 (9)

(3) 当  $T < T_c$  时，活塞的平衡位置可以在玻璃管的左侧或者右侧，与竖直线之间的夹角为  $\theta_0$ 。则此时活塞所受的合力为零

$$mg \sin \theta_0 - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta_0)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta_0)} = 0 \quad (10)$$

可得  $\theta_0 (\neq 0)$  满足

$$\frac{2nRT}{mgr} = \left( \frac{\pi^2}{4} - \theta_0^2 \right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (10')$$

对于  $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，方程右侧函数  $f(\theta_0) = \left( \frac{\pi^2}{4} - \theta_0^2 \right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$  是  $\theta_0$  的单调递减函数，当  $\theta_0 \rightarrow 0$  时， $f(\theta_0)$  取最大值  $\frac{\pi^2}{4}$ 。所

以上面方程有非零解的条件是

$$T < \frac{\pi^2 mgr}{8nR}$$

即  $T < T_c$ ，与题设自洽。由平衡位置  $\theta_0$  的方程⑩'和临界温度  $T_c$  的表达式⑥可知

$$\frac{T}{T_c} = \left( 1 - \frac{4\theta_0^2}{\pi^2} \right) \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \quad (11)$$

当  $T$  略小于  $T_c$  时， $\theta_0 \approx 0$ ，上式可以对  $\theta_0$  展开，得

$$\frac{T}{T_c} \approx 1 - \frac{24 + \pi^2}{6\pi^2} \theta_0^2 \quad (12)$$

因此，

$$\theta_0 = \pm \sqrt{\frac{6\pi^2}{24 + \pi^2} \frac{T_c - T}{T_c}} \quad (13)$$

这里  $\pm$  号表示平衡位置可以在左右两侧。

(4) 如果活塞在稳定平衡位置  $\theta_0$  处受到一个微小扰动，令其与竖直方向的夹角为  $\theta_0 + \theta$ ， $|\theta| \ll 1$ 。则活塞的运动方程为

$$mr \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin(\theta_0 + \theta) - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta_0 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta_0 + \theta)} \quad (14)$$

由于  $|\theta| \ll 1$ ，可有

$$\sin(\theta_0 + \theta) \approx \sin \theta_0 + \theta \cos \theta_0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi/2 - \theta_0 - \theta} \approx \frac{1}{\pi/2 - \theta_0} + \frac{\theta}{(\pi/2 - \theta_0)^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi/2 + \theta_0 + \theta} \approx \frac{1}{\pi/2 + \theta_0} - \frac{\theta}{(\pi/2 + \theta_0)^2} \quad (17)$$

所以活塞在平衡位置  $\theta_0$  附近的微振动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cos \theta_0}{r} \left[ 1 - \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \frac{\pi^2/2 + 2\theta_0^2}{\pi^2/2 - 2\theta_0^2} \right] \theta \quad (18)$$

所以活塞在平衡位置附近将做简谐振动，其振动圆频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{r} \left[ \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \frac{\pi^2/2 + 2\theta_0^2}{\pi^2/2 - 2\theta_0^2} - 1 \right]} \quad (19)$$

当  $T > T_c$  时，由⑥⑦式可得振动圆频率的温度依赖关系为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \left( \frac{8nRT}{\pi^2 mgr} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{T - T_c}{T_c}} \quad (20)$$

当  $T < T_c$  时，由于  $T$  略小于  $T_c$ ，所以  $|\theta_0| \ll 1$ ，此时振动圆频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \theta_0}{r} \left[ \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \frac{\pi^2/2 + 2\theta_0^2}{\pi^2/2 - 2\theta_0^2} - 1 \right]} \approx \sqrt{\frac{g}{r} \frac{24 + \pi^2}{3\pi^2} \theta_0^2} = \sqrt{\frac{2g}{r} \frac{T_c - T}{T_c}} \quad (21)$$

(5) 令活塞与竖直方向的夹角为  $\theta$ 。则活塞的运动方程（如①式）为

$$mr \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)}$$

该方程两边同时乘以  $d\theta$ ，并积分可得，

$$\int_0^\theta mr \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^\theta \left[ mg \sin \theta - \frac{nRT}{r(\pi/2 - \theta)} + \frac{nRT}{r(\pi/2 + \theta)} \right] d\theta \quad (22)$$

这里  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ，由于活塞的初始速度近似为零，所以有

$$\frac{1}{2} mr \dot{\theta}^2 = mg(1 - \cos \theta) + \frac{nRT}{r} \ln \left( 1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right) \quad (23)$$

由此可得活塞从初始位置运动到可到达的  $\theta$  位置的角速度大小为

$$|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{2g}{r} (1 - \cos \theta) + \frac{2nRT}{mr^2} \ln \left( 1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right)} \quad (24)$$

**评分标准：** 本题 40 分。

第 (1) 问 12 分，①式 4 分，②③④⑤式各 1 分，⑥⑦式各 2 分；

第 (2) 问 4 分，⑧⑨式各 2 分

第 (3) 问 7 分，⑩式 2 分，⑫式 3 分，⑬式 2 分；

第 (4) 问 11 分，⑭式 2 分，⑮⑯⑰⑱式各 1 分，⑳㉑式各 2 分；

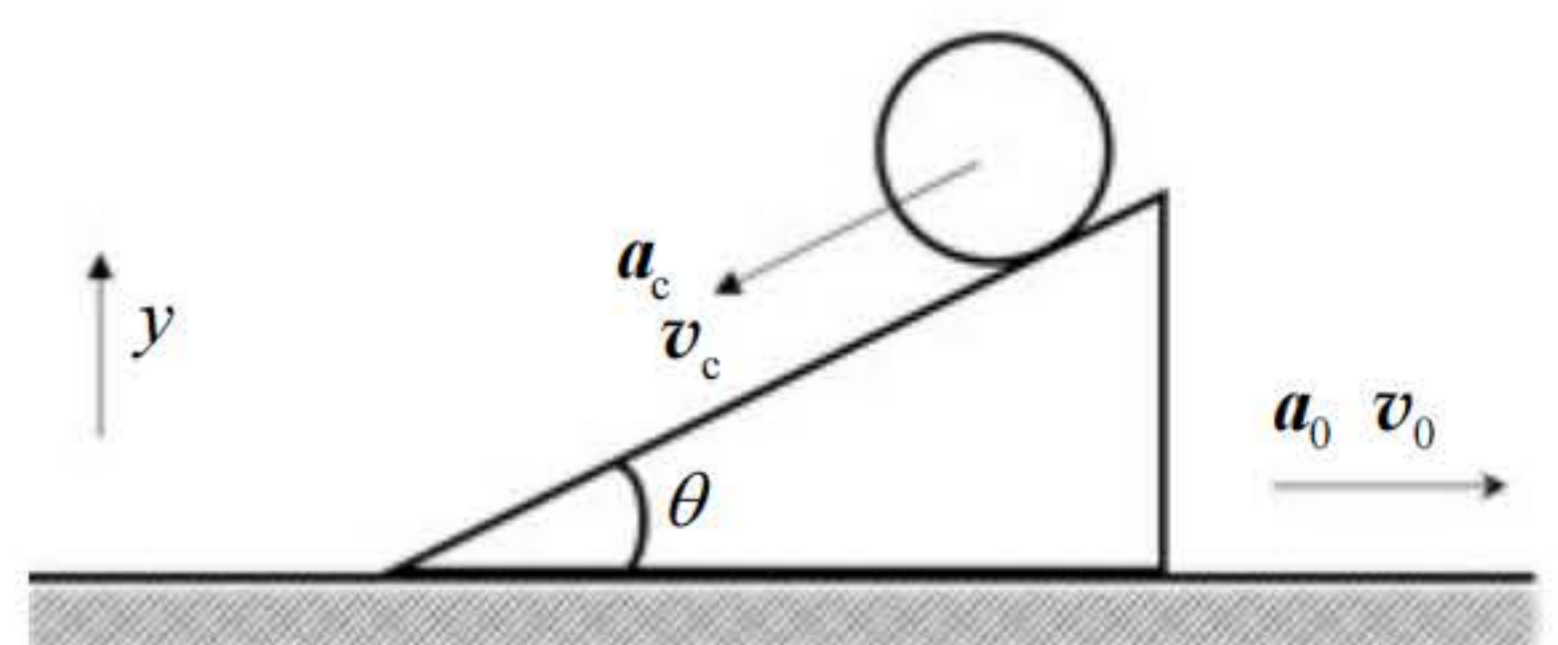
第 (5) 问 6 分，㉒㉓㉔式各 2 分。

三、

(1) (i) 由于球运动过程中楔块在光滑水平面上无转动，可知过球质心和楔块质心的竖直面与楔块斜面垂直，只需考虑球和楔块在图 3a 所示平面（即上述竖直面）内的运动。

如题解图 3a，设楔块相对于水平面的速度和加速度分别为  $v_0$ 、 $a_0$ ，圆球质心相对于楔块的速度加速度分别为  $v_c$ 、 $a_c$ 。

在相对于楔块静止的参考系中，球受到平动惯性力、重力和斜面对圆球的（斜向上）摩擦力  $f$  的作用，球的质心运动方程为



题解图 3a

$$ma_c = ma_0 \cos \theta + mg \sin \theta - f \quad (1)$$

设圆球相对其质心的转角为  $\varphi$ ，由绕质心轴的转动方程得

$$I_c \ddot{\varphi} = fr \quad (2)$$

由纯滚动条件得

$$v_c = r\dot{\varphi} \quad (3)$$

$$a_c = r\ddot{\varphi} \quad (4)$$

球的绕其中心的转动惯量为

$$I_c = \frac{2}{5}mr^2 \quad (5)$$

联立②④⑤式得

$$f = \frac{2}{5}ma_c \quad (6)$$

在地面系，由体系水平方向的动量守恒得

$$m(v_c \cos \theta - v_0) = Mv_0 \quad (7)$$

⑦式两边对时间求导得到

$$m(a_c \cos \theta - a_0) = Ma_0 \quad (8)$$

联立①⑥⑧式得

$$a_0 = \frac{\frac{5}{7}mg \sin \theta \cos \theta}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (9)$$

(ii) 将⑨式代入⑧式解得

$$a_c = \frac{\frac{5}{7}(M+m)g \sin \theta}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (10)$$

(iii) 将楔块和圆球看作一个整体。体系质心速度在竖直方向的分量为（向上为正）

$$v_y = \frac{-mv_c \sin \theta}{M + m} \quad (11)$$

对时间求导可知

$$a_y = \frac{-ma_c \sin \theta}{M + m} \quad (12)$$

设地面对楔块的支持力大小为  $N$ ，方向向上。竖直方向上体系质心的运动方程为

$$(M+m)a_y = N - (M+m)g \quad (13)$$

联立⑫⑬式并将⑩式代入得

$$N = (M+m)g \frac{M + \frac{2}{7}m}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (14)$$

【解法 2：也可将楔块作为研究对象，考虑下一问中的圆球的支持力，以及圆球对楔块的摩擦力得

$$N = Mg + N_1 \cos \theta + f \sin \theta$$

将第（4）问中⑫式代入，并联合⑥⑩式，可得

$$N = (M+m)g \frac{M + \frac{2}{7}m}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (14)$$

】

(iv) 在相对于楔块静止的参考系中, 设楔块对圆球的支持力大小为  $N_1$ , 方向垂直于斜面向上。在与斜面垂直的方向上球受力平衡有

$$N_1 + ma_0 \sin \theta = mg \cos \theta \quad (15)$$

将⑨式代入得

$$N_1 = mg \cos \theta \frac{M + \frac{2}{7}m}{M + m - \frac{5}{7}m \cos^2 \theta} \quad (16)$$

(v) 最小摩擦系数为

$$\mu_0 = \frac{f}{N_1} \quad (17)$$

联立⑥⑩⑬式得

$$\mu_0 = \frac{2(M + m)}{(7M + 2m)} \tan \theta \quad (18)$$

(2) 当  $\mu < \mu_0$  时, 圆球连滚带滑。相对于楔块静止的参考系, 圆球质心动力学方程仍由①式给出

$$ma_c = ma_0 \cos \theta + mg \sin \theta - f$$

其中摩擦力应满足

$$f = \mu N_1 \quad (19)$$

联立①⑧⑮⑱式解出

$$a_c = \frac{(M + m)g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{M + m - m \cos^2 \theta - \mu m \sin \theta \cos \theta} \quad (20)$$

$$f = \frac{\mu M m g}{\frac{M + m}{\cos \theta} - m \cos \theta - \mu m \sin \theta} \quad (21)$$

由⑳式可知线加速度大小  $a_c$  为常量。由㉑式并联立㉒㉓式知, 球滚动的角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{5}{2} \frac{f}{mr} \quad (22)$$

为常量。故球与楔块接触点 P 相对于楔块的速度为

$$v_p = v_c - r\dot{\varphi} = a_c \Delta t - r\ddot{\varphi} \Delta t \quad (23)$$

联立㉑㉒㉓㉔式得

$$v_p = \frac{(M + m)g \sin \theta - \mu(m + \frac{7}{2}M)g \cos \theta}{M + m - m \cos^2 \theta - \mu m \sin \theta \cos \theta} \Delta t \quad (24)$$

可以检验, 当  $\mu = \mu_0$  时,  $v_p = 0$ , 圆球相对楔块做纯滚动。  $\mu < \mu_0$  时,  $v_p > 0$ , 可知 P 点相对于楔块的速度斜向下。

评分标准: 本题 40 分。

第(1)问 22 分

(i) 12 分 其中①②式各 2 分, ③④⑤⑥式各 1 分, ⑦⑨各式 2 分

(ii) 2 分 其中 ⑩式 2 分

(iii) 4 分 其中⑪式 2 分, ⑬⑭式各 1 分

(iv) 4 分, 其中⑮⑯式各 2 分

(v) 2 分, 其中⑰⑱式各 1 分

第(2)问 18 分

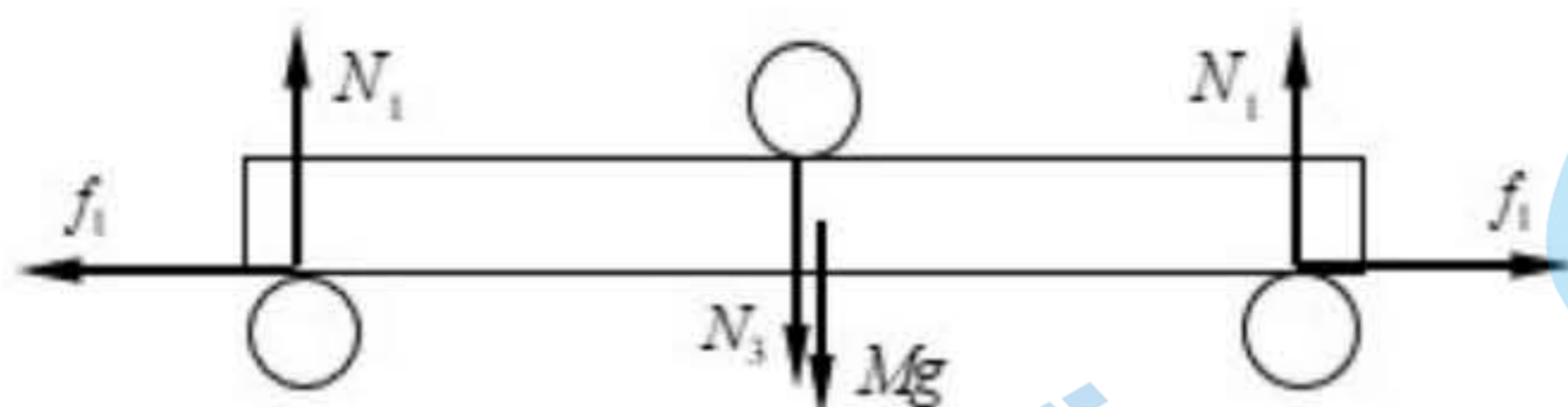
其中: ⑲式 2 分, ⑳㉑式各 4 分, ㉒㉓式各 2 分, ㉔式 4 分

四、

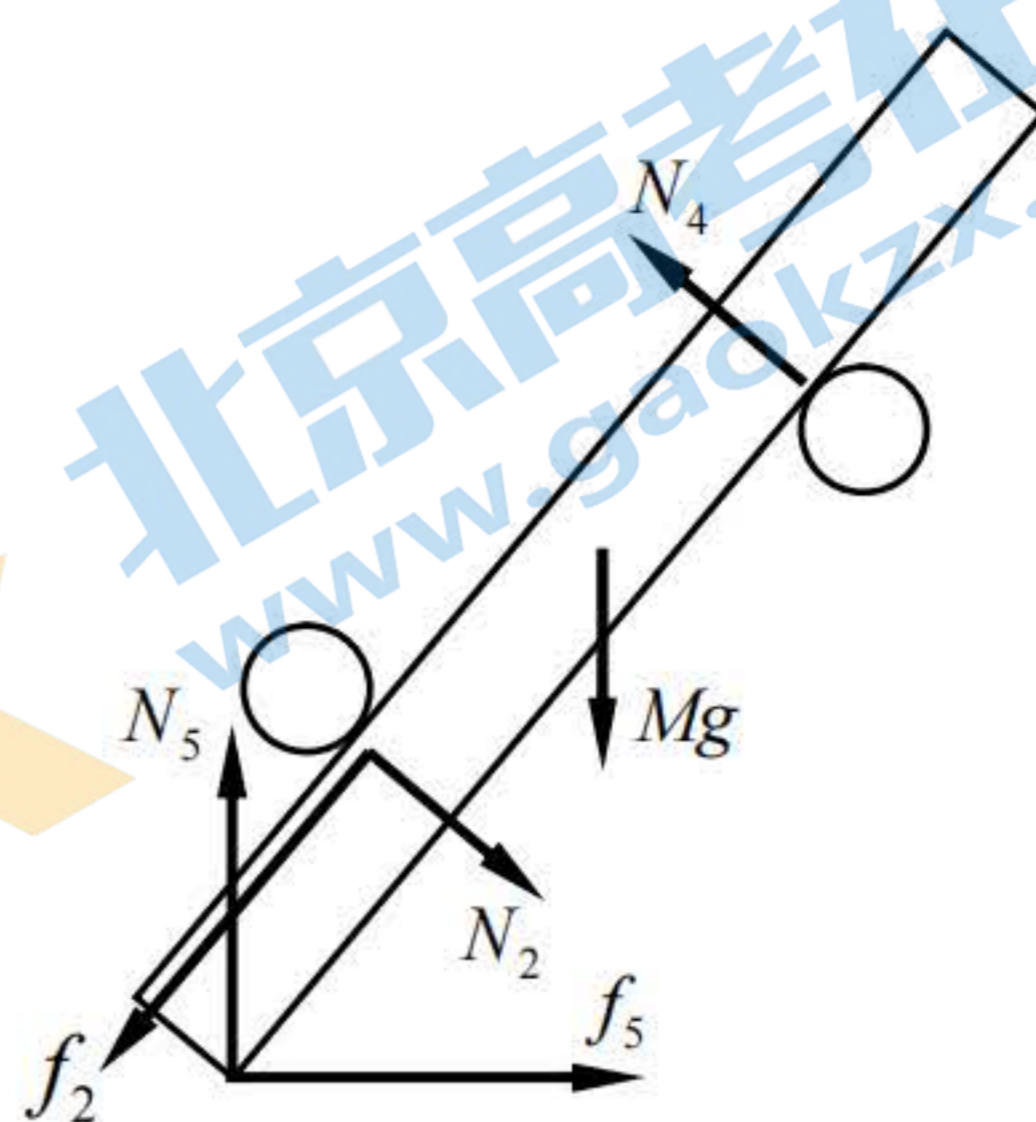
(1) 由几何关系得

$$b = a + 4R \cot \frac{\theta}{2} \quad \text{①}$$

(2) C、D 两根杆的受力图分别如题解图 4a 和题解图 4b 所示。



题解图 4a



题解图 4b

对 A 杆而言，力平衡方程为

$$N_1 + mg = N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta \quad \text{②}$$

$$f_1 + f_2 \cos \theta = N_2 \sin \theta \quad \text{③}$$

对圆柱轴线的力矩平衡方程为

$$f_1 R = f_2 R \quad \text{④}$$

对 B 杆而言，力平衡方程为

$$N_3 = 2N_4 \cos \theta + mg \quad \text{⑤}$$

对 C 杆而言，力平衡方程为

$$2N_1 = N_3 + Mg \quad \text{⑥}$$

对 D 杆而言，力平衡方程为

$$N_5 + N_4 \cos \theta = N_2 \cos \theta + f_2 \sin \theta + Mg \quad \text{⑦}$$

$$f_5 + N_2 \sin \theta = N_4 \sin \theta + f_2 \cos \theta \quad \text{⑧}$$

对 D 杆与地面接触点的力矩平衡方程为

$$N_2 a + Mg \left( \frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) = N_4 b + f_2 2R \quad \text{⑨}$$

【或对 D 杆质心的力矩平衡方程为

$$N_5 \left( \frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) = f_5 \left( \frac{L}{2} \sin \theta + R \cos \theta \right) + N_2 \left( \frac{L}{2} - a \right) + f_2 R + N_4 \left( b - \frac{L}{2} \right) \quad \text{⑨'】}$$

(3) 此条件下

$$b = a + 4R \cot \frac{\theta}{2} = 24 \text{ cm} \quad \text{⑩}$$

由②③④式可得

$$f_1 = f_2 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} N_2 \quad \text{⑪}$$

$$N_1 + mg = N_2 \quad \text{⑫}$$

由⑤⑥式可得

$$N_1 = N_4 \cos \theta + \frac{1}{2}(M + m)g \quad \text{⑬}$$

将⑪⑫⑬式代入⑨式可得

$$(N_1 + mg)a + Mg \left( \frac{L}{2} \cos \theta - R \sin \theta \right) = \left[ N_1 - \frac{1}{2}(M + m)g \right] \frac{b}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (N_1 + mg) 2R \quad \text{⑭}$$

解得

$$N_1 = \frac{mga + Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta - R\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(M+m)g\frac{b}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}mg2R}{\frac{b}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}2R - a} \quad (15)$$

$$= 10.427mg$$

由⑪⑫式可得

$$f_1 = f_2 = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}(N_1 + mg) = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \frac{Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta - R\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(M+3m)g\frac{b}{\cos\theta}}{\frac{b}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}2R - a} \quad (16)$$

$$= 4.733mg$$

系统保持平衡要求

$$f_1 \leq \mu N_1, \quad f_2 \leq \mu N_2 \quad (17)$$

(因为  $f_1 = f_2$ 、 $N_2 = N_1 + mg > N_1$ ， $\mu$  的范围由上式中第一式决定)

解得

$$\mu \geq \frac{f_1}{N_1} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \frac{Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta - R\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(M+3m)g\frac{b}{\cos\theta}}{mga + Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta - R\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(M+m)g\frac{b}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}mg2R} \quad (18)$$

$$= 0.454$$

由②⑤⑥⑦式可得

$$N_5 = \frac{3}{2}(M+m)g = \frac{21}{2}mg \quad (19)$$

由⑧⑩⑪⑫式可得

$$f_5 = N_1 \left( \tan\theta - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \right) - \frac{1}{2}(M+m)g \tan\theta - mg \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad (20)$$

$$= 2.194mg$$

系统保持平衡要求

$$f_5 \leq \mu' N_5 \quad (21)$$

解得

$$\mu' \geq \frac{f_5}{N_5} = \frac{2N_1}{3(M+m)g} \left( \tan\theta - \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \right) - \frac{1}{3}\tan\theta - \frac{2m}{3(M+m)} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 0.209 \quad (22)$$

评分参考：本题 40 分。

第 (1) 问 2 分，①式 2 分；

第 (2) 问 20 分，C 杆和 D 杆的受力图各 2 分，②③④⑤⑥⑦⑧⑨（或⑨'）式各 2 分；

第 (3) 问 18 分，⑮⑯⑰式各 2 分，⑱式 3 分，⑲⑳㉑式各 2 分，㉒式 3 分。

五、

(1) 点电荷绕着  $z$  轴作匀速圆周运动时，其在  $z$  方向不受力，即有

$$\hat{z} \cdot eE = \frac{ep}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} (3\cos^2\theta_0 - 1) = 0 \quad (1)$$

因而

$$\cos\theta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

又由于点电荷作圆周运动要求静电力在垂直于  $z$  轴平面内的投影是指向转轴的向心力，即要求



$$F = -\frac{3ep}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \cos\theta_0 \sin\theta_0 > 0 \quad (3)$$

式②中只有  $\cos\theta_0 < 0$  的解符合要求，即有

$$\cos\theta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{或} \quad \theta_0 = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

由于圆周运动的半径为  $R = r_0 \sin\theta_0$ ，将其与③式代入牛顿第二定律

$$F = m \frac{v_0^2}{R} \quad (5)$$

得到

$$v_0 = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{-\frac{3ep}{4\pi\epsilon_0 m r_0^2} \cos\theta_0 \sin^2\theta_0} = \sqrt{-\frac{3ep}{4\pi\epsilon_0 m r_0^2} \cos\theta_0 (1 - \cos^2\theta_0)}$$

将式④中的数值代入得

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}ep}{6\pi\epsilon_0 m r_0^2}} \quad (6)$$

(2) (i) 易判断此后点电荷在图 5a 所示的平面内运动，则点电荷相对于原点的角动量和力矩分别为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{n} \quad (7)$$

和

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times e\mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n} \quad (8)$$

其中  $\hat{n} = \hat{r} \times \hat{\theta}$ 。因此，角动量定理可以写为

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (9)$$

将式⑨左右两边乘以  $L = mr^2\dot{\theta}$ ，得到

$$L \frac{dL}{dt} = \frac{ep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{mep \sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\theta}{dt}$$

由此给出

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{mep}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta \right)$$

即

$$L^2 + \frac{mep}{2\pi\epsilon_0} \cos\theta = \text{常量} \quad (10)$$

而  $t=0$  时刻点电荷静止意味着其初始角动量为零，又由于  $\theta(t=0) = \theta_0$ ，因而

$$L^2 = \frac{mep}{2\pi\epsilon_0} (\cos\theta_0 - \cos\theta) \quad (11)$$

(ii) 由于电偶极子的电势为

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

利用初始条件及能量守恒可得点电荷的能量为

$$\frac{1}{2}mv^2 + e\varphi = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{ep \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ep \cos\theta_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (12)$$

或者将其用径向动量  $p_r = m\dot{r}$  和角动量  $L = mr^2\dot{\theta}$  表示为

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{ep \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{ep \cos\theta_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (13)$$

将式⑪式代入⑬式，可得径向速率  $v_r$  和径向距离  $r$  之间满足的关系为

$$v_r^2 = \frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

即

$$v_r = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)} \quad (14)$$

(iii) 由于  $v_r^2 \geq 0$ ，因而由式⑭知：

$$\text{当 } \theta_0 < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } r \geq r_0;$$

而此时  $v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi m \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)} > 0$  且随  $r$  增大而增大，故运动无界。

$$\text{当 } \theta_0 > \frac{\pi}{2} \text{ 时, } r \leq r_0;$$

$$\text{当 } \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } r = r_0。$$

如上两种情形运动均有界。所以点电荷有界运动要求

$$\theta_0 \geq \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

如果  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，则点电荷的运动恰好有界， $v_r = \dot{r} \equiv 0$ 。此情形下，点电荷在运动过程中到原点的距离始终保持不变，为  $r = r_0$ ；而由于  $L^2 \geq 0$ ，按照式⑪，这就要求  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  时有

$$L^2 = -\frac{mep}{2\pi \epsilon_0} \cos \theta \geq 0 \quad (16)$$

可见，如果  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ，点电荷的运动满足

$$r = r_0, \quad \cos \theta \leq 0 \quad (17)$$

即其轨道在竖直平面上是一个半径为  $r_0$  的半圆 ( $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ )。(因能量守恒且左右对称，可判断点电荷可以划过整个半圆轨道)

(iv) 上问分析表明无界运动要求  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 。此情形下，可将式⑭式写为

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi \epsilon_0 m} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right)} \quad (18)$$

或者将其改写为

$$\sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi \epsilon_0 m r_0^2}} dt = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = d\sqrt{r^2 - r_0^2}$$

从而

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} - \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi \epsilon_0 m r_0^2}} t = \text{常数} \quad (19)$$

利用初始条件  $r(t=0) = r_0 > 0$ ，得到

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} - \sqrt{\frac{ep \cos \theta_0}{2\pi \epsilon_0 m r_0^2}} t = 0$$

即径向距离随时间按照如下方式变化

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{ep \cos \theta_0}{2\pi \epsilon_0 m r_0^2} t^2} \quad (20)$$

评分标准：本题 40 分。

第 (1) 问 10 分，①式 2 分，②式 1 分，③④式各 2 分，⑤式 1 分，⑥式 2 分；

第 (2) 问 30 分，其中

(i) 问 10 分，⑦⑧⑨⑩⑪式各 2 分；

(ii) 问 6 分，⑫⑬⑭式各 2 分；

(iii) 问 8 分，⑮式 3 分，⑯式 2 分，⑰式 3 分；

(iv) 问 6 分，⑱⑲⑳式各 2 分。

六、

(1) 根据题意，球外的总磁场可写为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}' = \mathbf{B}_e + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{m}] \quad (1)$$

由于对理想导体，球内的总磁场为零，且根据磁场高斯定理， $\mathbf{B}$  的法向分量连续，因而

$$\hat{r} \cdot \mathbf{B}|_{r=a} = \hat{r} \cdot \mathbf{B}_e + \frac{\mu_0}{2\pi a^3} (\mathbf{m} \cdot \hat{r}) = 0 \quad (2)$$

而根据对称性， $\mathbf{m}$  必与  $\mathbf{B}_e$  平行或反平行，因此由式②就得到

$$\mathbf{m} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \mathbf{B}_e \quad (3)$$

磁化电流在远处产生的场就等于磁偶极子产生的场，因而这里的  $\mathbf{m}$  实际上就是导体球的磁偶极矩。将式③代入式①中，就得到导体球外的磁感应强度：

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_e - \frac{a^3}{2r^3} [3(\mathbf{B}_e \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{B}_e] \quad (4)$$

根据安培环路定理可知，导体球表面的面电流密度  $\mathbf{i}$  满足

$$\mu_0 \mathbf{i} = \hat{r} \times \mathbf{B}|_{r=a} \quad (5)$$

将式④代入，得到

$$\mathbf{i} = \hat{r} \times \frac{3\mathbf{B}_e}{2\mu_0} = \left( -\frac{3B_e}{2\mu_0} \sin \theta \right) \hat{\phi} \quad (6)$$

【解法二】(备用解法：需要利用等效磁荷法)

为了求解导体球内、外磁场，先引入均匀磁化球模型，其半径为  $a$ 、磁化强度为  $\mathbf{M} = M\hat{z}$ 。

采用等效磁荷方法(量纲及单位制约定参考《新概念物理教程·电磁学》)，引入等效磁极化强度  $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ ，则均匀

磁(极)化球的内、外的附加磁场强度

$$\mathbf{H}' = -\frac{\mathbf{P}_m}{3\mu_0} = -\frac{\mathbf{M}}{3}, \quad r < a \quad (1')$$

$$\mathbf{H}' = \frac{a^3}{3\mu_0 r^3} [3(\mathbf{P}_m \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{P}_m] = \frac{a^3}{3r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{M}], \quad r > a \quad (2')$$

相应球内、外附加磁感应强度

$$\mathbf{B}' = \mu_0 (\mathbf{H}' + \mathbf{M}) = \frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{3}, \quad r < a \quad (3')$$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}' = \frac{\mu_0 a^3}{3r^3} [3(\mathbf{M} \cdot \hat{r})\hat{r} - \mathbf{M}], \quad r > a \quad (4')$$

设理想导体球的面电流与如上均匀磁化球的磁化面电流相同，则由③'式，若想保证球内叠加的磁感应强度为零，要求

$$\frac{2\mu_0 \mathbf{M}}{3} + \mathbf{B}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = -\frac{3\mathbf{B}_e}{2\mu_0} \quad (5')$$

对照题给条件及④'式，并代入⑤'式得

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{M} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \mathbf{B}_e \quad \text{⑥}'$$

相应理想导体球面电流分布

$$\mathbf{i} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{r}} = \left( -\frac{3B_e}{2\mu_0} \sin\theta \right) \hat{\phi} \quad \text{⑦}'$$

由电流激发磁场的唯一性可知：⑥'⑦'式是满足题给条件的唯一解。

【解法三】(备用解法：矢势法)

假设理想导体球的球面电流分布为

$$\mathbf{i} = i_0 \sin\theta \hat{\phi} \quad \text{①}''$$

其中  $i_0$  为待定常量。积分可求解该电流分布激发的球内、外矢势可表示为

$$\mathbf{A}' = \frac{\mu_0 i_0}{3} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}, \quad r < a \quad \text{②}''$$

$$\mathbf{A}' = \frac{\mu_0 i_0 a^3}{3r^3} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}, \quad r > a \quad \text{③}''$$

相应附加磁场为

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$$

计算可得球内、外附加磁感应强度

$$\mathbf{B}' = \frac{2\mu_0 i_0}{3} \hat{\mathbf{z}}, \quad r < a \quad \text{④}''$$

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 i_0 a^3}{3r^3} [3(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}], \quad r > a \quad \text{⑤}''$$

由④''式，若想保证球内叠加的磁感应强度为零，则要求

$$\frac{2\mu_0 i_0}{3} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_e = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = -\frac{3B_e}{2\mu_0} \quad \text{⑥}''$$

代入①''式得

$$\mathbf{i} = \left( -\frac{3B_e}{2\mu_0} \sin\theta \right) \hat{\phi}$$

对照题给条件及⑤''式，并代入⑥''式得

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} i_0 \hat{\mathbf{z}} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \mathbf{B}_e \quad \text{⑦}''$$

由电流激发磁场的唯一性可知：⑥''⑦''式是满足题给条件的唯一解。

(2) 由对称性，线圈在球心处产生的磁感应强度  $\mathbf{B}$  沿着其对称轴 ( $z$  轴) 方向。据此，利用毕奥-萨伐尔定律得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(b^2 + h^2)} \times \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times 2\pi b \hat{\mathbf{z}}$$

即有

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{\mu_0 I_0 b^2}{2(b^2 + h^2)^{3/2}} \cos\omega t \right] \hat{\mathbf{z}} = (B_0 \cos\omega t) \hat{\mathbf{z}} \quad \text{⑦}$$

其中

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_0 b^2}{2(b^2 + h^2)^{3/2}}$$

(3) 由于  $a \ll b$ ，因此线圈在导体球所在区域产生的磁场几乎均匀，约等于球心处的磁场，该磁场由式⑦式给出。又由于  $\delta \ll a$ ，因此，导体球与(1)问中处于均匀外磁场中的理想导体球接近，其磁偶极矩与③式接近，为(如下为了简化，“ $\approx$ ”均记为“ $=$ ”)

$$\mathbf{m} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} \mathbf{B} \quad \text{⑧}$$

由于  $m$  和  $B$  均沿着  $z$  轴方向, 根据题目提示, 导体球受到的安培力为

$$F(t) = m \frac{dB}{dz} \hat{z}$$

所以

$$F = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} B \frac{dB}{dz} \hat{z} = -\frac{\pi a^3}{\mu_0} \frac{dB^2}{dz} \hat{z}$$

将式⑦代入其中, 就得到

$$F(t) = -\frac{\pi a^3}{\mu_0} \frac{d}{dz} \left[ \frac{\mu_0^2 I_0^2 b^4}{4(b^2 + z^2)^3} \cos^2 \omega t \right] \hat{z} = \frac{3\pi a^3 b^4 z}{2(b^2 + z^2)^4} \mu_0 I_0^2 \cos^2 \omega t \hat{z} \quad (9)$$

由于

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

忽略  $z$  方向上的振动, 即  $z=h$ , 因而在一个周期内力的平均值为

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} F dt = \frac{3\pi a^3 b^4 h}{4(b^2 + h^2)^4} \mu_0 I_0^2 \hat{z} \quad (10)$$

而由平衡方程

$$\langle F \rangle = G \quad (11)$$

即得所需  $I_0$  为

$$I_0 = \sqrt{\frac{4G(b^2 + h^2)^4}{3\pi a^3 b^4 \mu_0 h}} \quad (12)$$

(4) 将式⑥中的  $B_e$  替换为式⑦中的  $B$ , 即可得导体球表面的 (近似) 等效面电流密度。因而, 趋肤深度范围内的体电流密度为

$$J = \frac{i}{\delta} = \left( -\frac{3B}{2\mu_0 \delta} \sin \theta \right) \hat{\phi} \quad (13)$$

根据焦耳定律, 热功率密度为

$$p = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{9B^2}{4\mu_0^2 \sigma \delta^2} \sin^2 \theta \quad (14)$$

因而总的热功率为

$$P(t) = \int p dV = \int p \times 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{9\pi B^2}{2\mu_0^2 \sigma \delta^2} \int_{a-\delta}^a r^2 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (15)$$

其中

$$\int_{a-\delta}^a r^2 dr = \frac{1}{3} [a^3 - (a-\delta)^3] \approx a^2 \delta \quad (16)$$

而

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{4}{3} \quad (17)$$

因而

$$P(t) = 6\pi a^2 \frac{B^2}{\mu_0^2 \sigma \delta} \quad (18)$$

将式⑦式以及  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$  代入⑱式得

$$P(t) = \frac{3}{4} \frac{\pi a^2 b^4 I_0^2}{(b^2 + h^2)^3} \sqrt{\frac{2\omega \mu_0}{\sigma}} \cos^2 \omega t \quad (19)$$

因而平均热功率为

$$\langle P \rangle = \frac{3}{8} \frac{\pi a^2 b^4 I_0^2}{(b^2 + h^2)^3} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \quad (20)$$

评分标准：本题 40 分。

第 (1) 问 12 分，①②③④⑤⑥式各 2 分；

【解法 2】：①'②'式各 1 分，③'④'⑤'⑥'⑦'式各 2 分；

【解法 3】：①''式 2 分，②''③''式各 1 分，④''⑤''⑥''⑦''式各 2 分；

第 (2) 问 4 分，⑦式 4 分；

第 (3) 问 11 分，⑧式 1 分，⑨式 2 分，⑩式 4 分，⑪⑫式各 2 分

第 (4) 问 13 分，⑬⑭⑮式各 2 分，⑯⑰⑱式各 1 分；⑲⑳式各 2 分

七、

(1) 在高度为  $z$  处，压强为  $p(z)$ ，温度为  $T(z)$ ，利用理想气体的状态方程可以得到气体密度为

$$\rho(z) = \frac{n\mu}{V} = \frac{p(z)\mu}{RT(z)} \quad (1)$$

这里  $n$  是气体的摩尔数， $V$  为气体的体积。

如题解图 7a 所示，面积为  $A$ 、高度位于  $[z, z + \Delta z]$  这个小区间内气体的重力为  $\rho(z)A\Delta z g$ ，方向向下；上表面受到向下的压力，大小为  $p(z + \Delta z)A$ ；下表面受到力为  $p(z)A$ ，方向向上。由于气体上升缓慢，这三个力互相抵消

$$p(z + \Delta z)A + \rho(z)A\Delta z g = p(z)A \quad (2)$$

对小量  $\Delta z$  展开，方程②可以化为

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (3)$$

利用①式中的密度公式，可以得到

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\mu g}{RT} \quad (4)$$

两边同除以压强  $p$ ，可以得到

$$\frac{d \ln p}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} \quad (5)$$

绝热过程  $pV^\gamma$  为常量，带入理想气体状态方程可得  $p^{1-\gamma}T^\gamma$  是常量，取对数可得

$$C = -(\gamma - 1) \ln p + \gamma \ln T \quad (6)$$

其中  $C$  为常量。方程两边对高度  $z$  求微分可以得到

$$0 = -(\gamma - 1) \frac{d \ln p}{dz} + \gamma \frac{d \ln T}{dz} \quad (7)$$

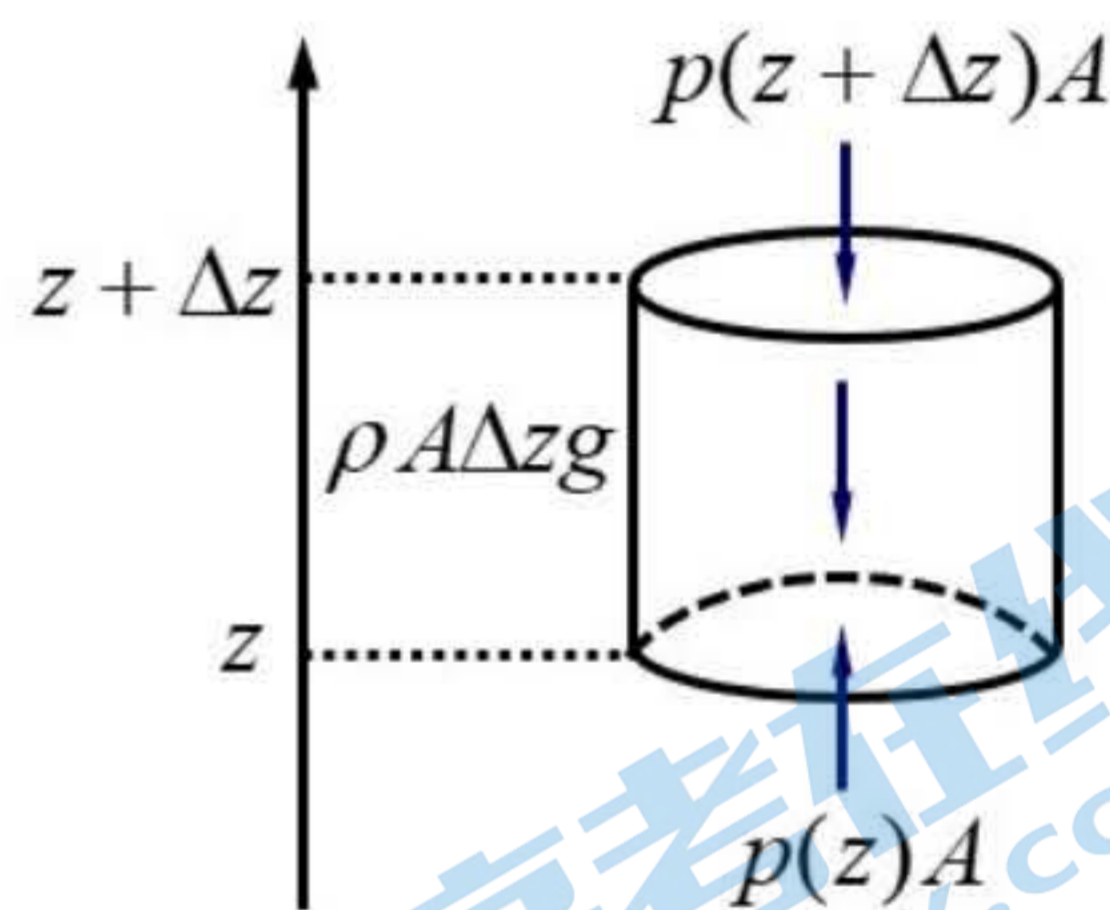
移项并利用⑤式可以得到

$$\frac{d \ln T}{dz} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT} \quad (8)$$

所以

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{(\gamma - 1)\mu g}{\gamma R} \quad (9)$$

对高度  $z$  积分之后可得



题解图 7a

$$T(z) = T_0 - \frac{(\gamma - 1)\mu g}{\gamma R} z \quad (10)$$

(2) 绝热过程  $pV^\gamma$  为常量, 即  $p = C\rho^\gamma$ , 因此

$$v_s^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\text{绝热}} = \frac{d(C\rho^\gamma)}{d\rho} = \gamma C\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{C\rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (11)$$

利用  $\rho = \frac{n\mu}{V}$  并代入理想气体状态方程  $pV = nRT$  得

$$v_s^2 = \gamma \frac{pV}{n\mu} = \gamma \frac{nRT}{n\mu} = \gamma \frac{RT}{\mu} \quad (12)$$

因此在对流层里声速随高度升高而降低, 直到同温层为止;

在同温层里温度近似保持不变, 所以声速近似不随高度改变而变化;

在逆温层里温度随高度升高而升高, 所以声速会随高度升高而增大。

(3) 在简化模型中同温层之外的温度为

$$-10^\circ\text{C} = (273.15 - 10)\text{K} = 263.15\text{K},$$

在同温层内部的温度为

$$-55^\circ\text{C} = (273.15 - 55)\text{K} = 218.15\text{K}$$

因此同温层外面的音速  $v_o$  和同温层内部的音速  $v_i$  之比为,

$$\frac{v_o}{v_i} = \sqrt{\frac{263.15}{218.15}} \approx 1.098 \quad (16)$$

同温层内的声音传播到界面时, 如果入射角度为  $\theta_i$ , 那么按照折射定律, 折射角  $\theta_o$  满足

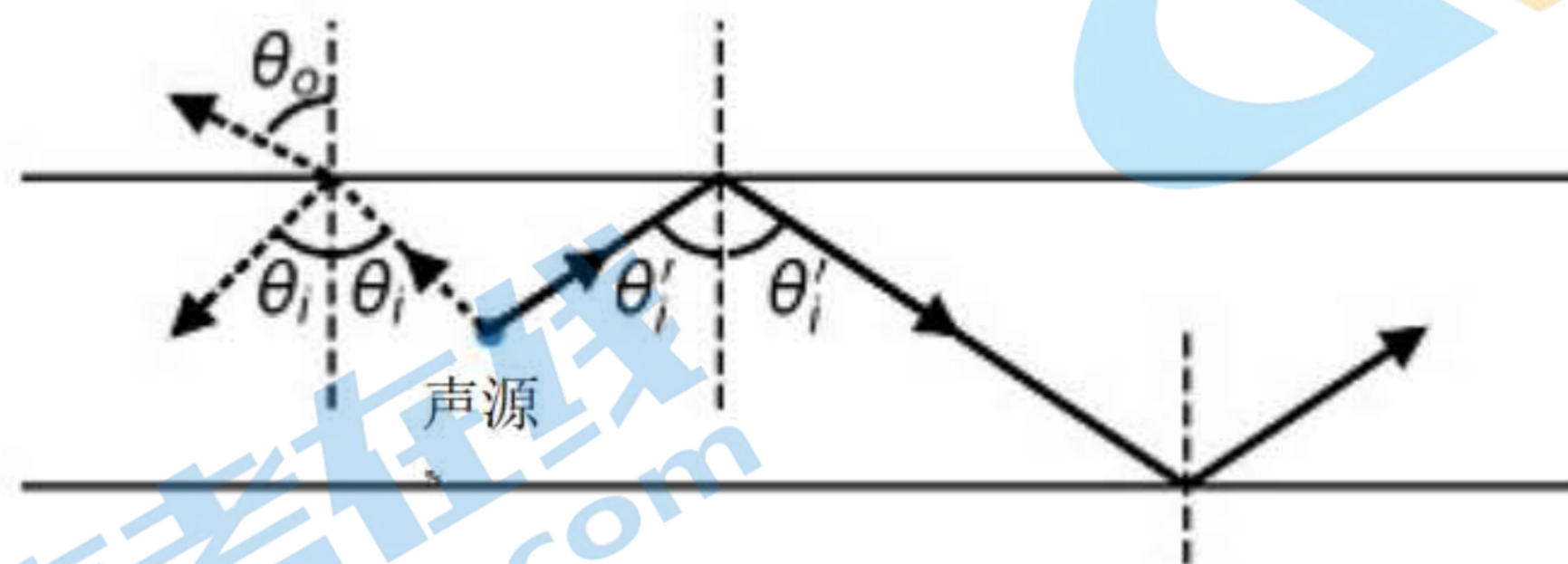
$$\sin \theta_o = \frac{v_o}{v_i} \sin \theta_i \approx 1.098 \sin \theta_i \quad (17)$$

从上面表达式可以看到存在一个临界角度,

$$\theta_i^m = \arcsin \frac{v_i}{v_o} = \arcsin \frac{1}{1.098} \approx 65.61^\circ \quad (18)$$

当入射角小于  $\theta_i^m$  时, 存在  $\theta_o$  满足折射定律, 这时候可以发生折射。当入射角大于  $\theta_i^m$  时, 不存在  $\theta_o$  满足折射定律, 声音发生全反射。

因此在入射角度大于  $\theta_i^m$  时以及小于  $\theta_i^m$  时折射和反射行为不同。如题解图 7b 中虚线所示, 当入射角  $\theta_i$  小于  $\theta_i^m$  时, 声音可以同时发生折射和反射, 声音可以传入对流层和逆温层中。如题解图 7b 的实线所示, 当入射角  $\theta_i$  大于  $\theta_i^m$  时, 声音发生全反射, 没有折射。



题解图 7b

(4) 当距离比较大时, 需要考虑地球的形状, 按照声源和探测气球所在位置不同分为四种情况讨论:

A. 声源和气球同在对流层时, 声音从对流层传播到同温层中不会发生全反射, 在忽略反射的情况下, 只有在声源和气球的连线不受地球阻碍时才能探测到, 如题解图 7c 中标号为 A 的箭头所示。这种情况下最长探测距离是地表的一条切线和对流层顶部的两个交点之间的间距

$$l_1 = 2\sqrt{(R_e + h_1)^2 - R_e^2} \approx 2\sqrt{2R_e h_1} \approx 714 \text{ km}$$

其中  $R_e \approx 6371 \text{ km}$  是地球半径,  $h_1 = 10 \text{ km}$  是对流层顶部距地面高度。因此这种情况不能探测几千公里之外的声音。

B. 声源在对流层内，气球在同温层内，在忽略反射的情况下，同样只有在声源和气球的传播路径不受地球阻碍时才能探测到，如题解图 7c 中标号为 B 的箭头所示。在这种情况下最长的探测距离不会超过从对流层顶部一个点沿着地表的切线到同温层顶部的一个点之间的间距，即不超过

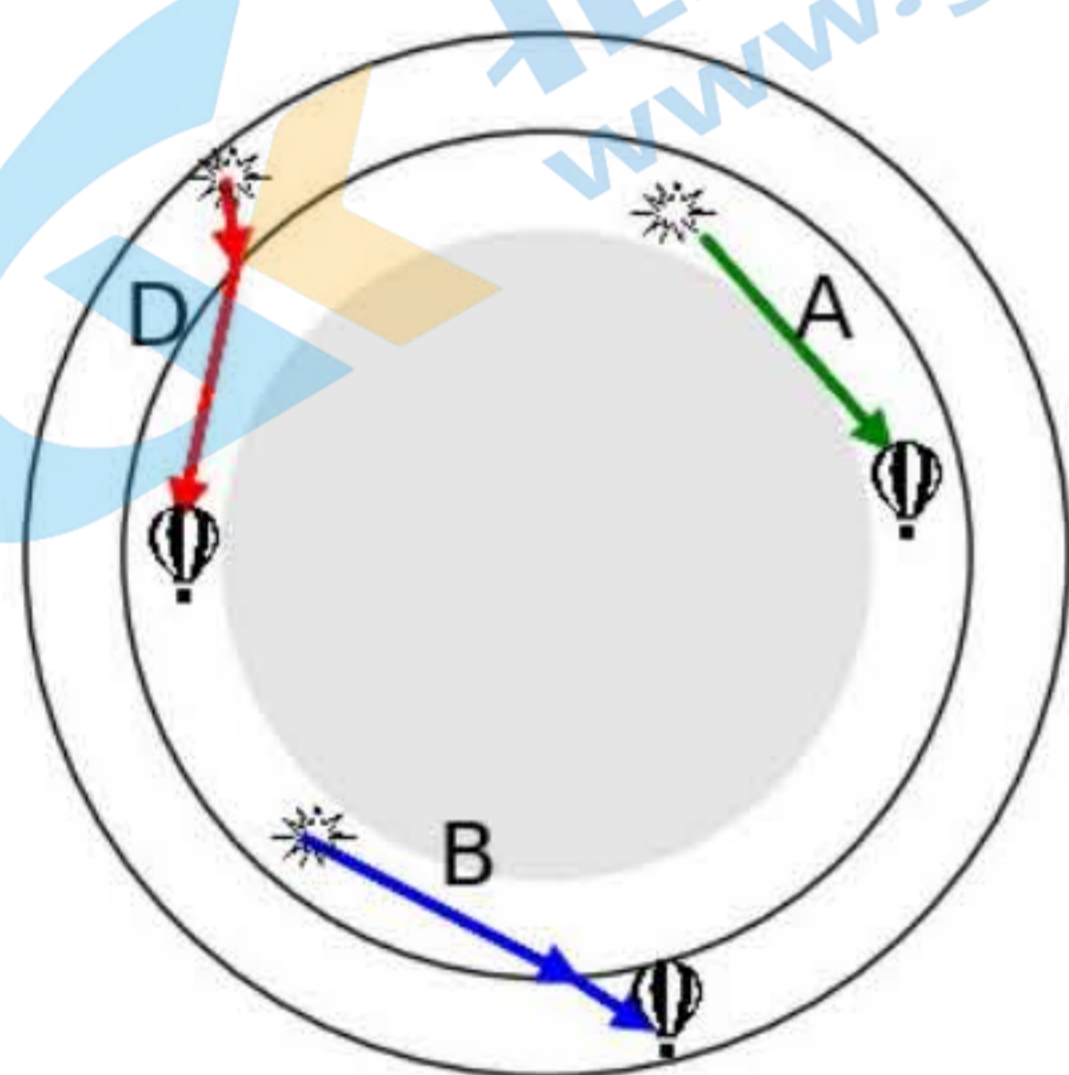
$$l_2 = \sqrt{(R_e + h_2)^2 - R_e^2} + \sqrt{(R_e + h_1)^2 - R_e^2} \approx \sqrt{2R_e h_2} + \sqrt{2R_e h_1} \approx 862 \text{ km}$$

其中  $h_2 = 20 \text{ km}$  是同温层顶部距地面高度。因此这种情况也不能探测到远处的声音。 ⑳

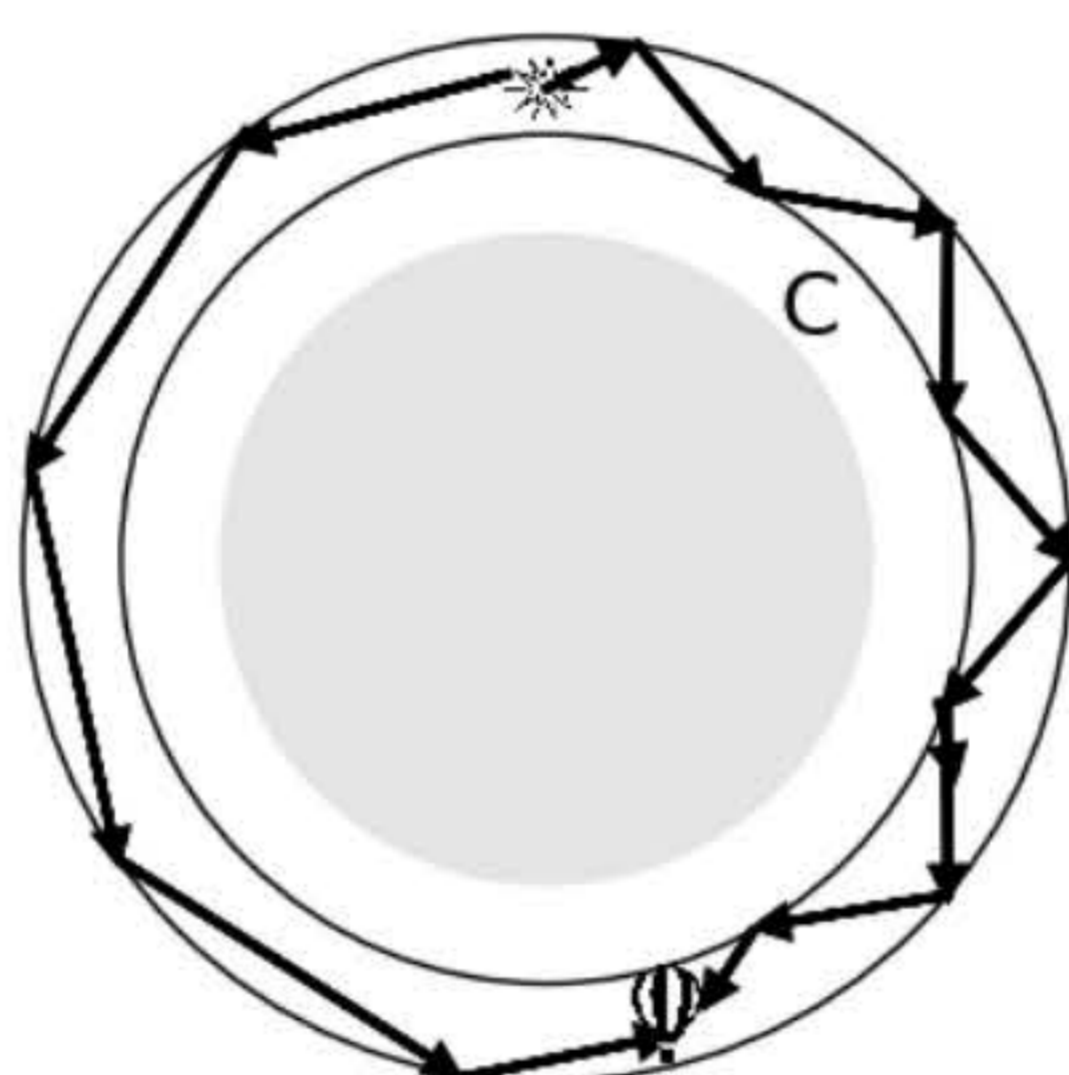
C. 声源和气球同在同温层中。由于大气层的两个界面距离和地球半径相比很小，这样在一个表面上发生全反射的声音在另外一个表面上也会发生全反射。因此同温层中掠射角小的声音可以通过两个界面不停地反射，会被局限在同温层中一直传播下去。如题解图 7d 中标号为 C 的箭头所示。因此这种情况下气球可以探测到远处发出的声音。 ㉑

这种情况下的另一种情形是，声音不入射到对流层和同温层界面，而仅在同温层和逆温层界面上进行多次全反射，题解图 7d 中左侧声音传播路径所示。这种情形下气球也可以探测到远处发出的声音。

D. 声源在同温层，气球在对流层，类似于 B 和 C 的分析，从同温层中发出的声音要传入对流层的话，只能通过一次折射，并且不能受到地球的阻碍。如题解图 7c 中标号为 D 的箭头所示，因此这种情况下传播距离同样不会超过  $l_2$ ，也无法探测到远处发出的声音。 ㉒



题解图 7c



题解图 7d

评分标准：本题 40 分。

第 (1) 问 15 分，①②③式各 2 分，④⑤⑥⑦式各 1 分，⑧式 2 分，⑨式 1 分，⑩式 2 分；

第 (2) 问 7 分，⑪⑫式各 2 分，⑬⑭⑮式各 1 分；

第 (3) 问 10 分，⑯⑰⑱式各 2 分，⑲式 4 分（其中结论与题解图各 2 分）；

第 (4) 问 8 分，⑳㉑㉒㉓式各 2 分（其中结论与分析各 1 分）。

八、

(1) (i) 产生 K 线系 X 射线光的物理过程是：

电子与金属阳极靶原子碰撞，使该靶原子 K 壳层的一个电子电离，从而在该靶原子 K 壳层出现一个空位，随后 L 壳层电子立即跃迁到 K 壳层并同时发射出  $K_\alpha$  特征 X 射线。

设阴极产生的电子被电压为  $U$  的电场加速后的动能为  $T_e$ ，则由能量守恒有

$$T_e = eU \quad \text{①}$$

由题意知，金属阳极靶原子 K 壳层电子的电离能为：

$$E_k = 20.1 \text{ keV}$$

因此，该靶原子 K 壳层出现一个空位的条件为

$$T_e \geq E_k \quad \text{②}$$



由①②式得，加速阴极发射的电子的电压至少应为

$$U_{\min} = \frac{E_k}{e} = 20.1 \text{ kV} \quad (3)$$

(ii) X 射线管发出的连续谱 X 射线来自于电子碰撞金属阳极靶产生的轫致辐射。在此加速电压  $U_{\min}$  下，设 X 射线管发出的连续 X 射线光的最短波长为  $\lambda_{\min}$ ，这相当于是电子的动能  $E_k$  全部转化为辐射光子的能量，即

$$T_e = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (4)$$

由①④式得，

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} \approx 0.0617 \text{ nm} \quad (5)$$

(iii) 由题意知，金属靶原子发出的  $K_{\alpha}$  特征 X 射线光子的能量为  $E = 17.44 \text{ keV}$ ，即：

$$E = \frac{hc}{\lambda_{K\alpha}} = 17.44 \text{ keV} \quad (6)$$

式中  $\lambda_{K\alpha}$  为相应的特征 X 射线光子的波长。电子与金属靶原子碰撞产生的 K 线系 X 射线光谱结构特点与氢原子的莱曼系光谱类似，主要区别在于原子中电子感受的核电荷数不同。由于金属靶原子 K 壳层出现一个空穴后还有一个电子，这个电子对原子核有屏蔽作用，L 壳层电子感受到的核电荷数实际上是一个大于  $Z - 1$  而小于  $Z$  的数值，通常称为有效核电荷数  $Z^*$ 。根据玻尔理论，类似于氢原子莱曼系光谱公式，金属靶原子发出  $K_{\alpha}$  特征 X 射线的波长满足下面关系：

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = R_{\infty} Z^{*2} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \quad (7)$$

式中  $R_{\infty}$  为里德堡常数， $Z^*$  为有效核电荷数。公式⑦实际上是莫塞莱通过分析原子特征 X 射线获得的一个经验公式。由⑥⑦式得，

$$Z^* = \sqrt{\frac{4}{3R_{\infty}\lambda_{K\alpha}}} = \sqrt{\frac{4E}{3hcR_{\infty}}} = \sqrt{\frac{4 \times 17440}{3 \times 13.6}} \approx 41.35 \quad (8)$$

由于  $Z - 1 < Z^* < Z$ ，所以

$$Z^* < Z < Z^* + 1$$

且为整数，于是由⑧式有

$$Z = 42 \quad (9)$$

(2) 由于 X 射线光子能量很高，材料靶中电子的束缚能相对很小，X 光子与材料靶的作用可以近似为 X 光子与自由电子的散射。设入射光子能量为  $E_0$ ，动量为  $p_0$ ，靶电子初始时静止。X 光子与静止的自由电子碰撞后，出射光子能量为  $E_1$ ，动量为  $p_1$ ， $p_1$  与入射方向之间的夹角为  $\theta$ ；出射光电子的能量为  $E_2$ ，动量为  $p_2$ 。由于 X 光子能量很高，出射电子动能也会很高，需要考虑相对论效应。

出射电子的能量为

$$E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10)$$

动能为

$$T_2 = E_2 - mc^2 \quad (11)$$

动量为

$$p_2 = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12)$$

由⑩⑫式得

$$E_2^2 = m^2 c^4 + p_2^2 c^2 \quad (13)$$

由动量守恒

$$p_0 = p_1 + p_2 \quad (14)$$

于是有

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos\theta \quad (15)$$

由能量守恒有

$$E_0 + mc^2 = E_1 + \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} \quad (16)$$

碰撞后电子动能  $T_2$  为

$$T_2 = \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2} - mc^2 = E_0 - E_1 = c(p_0 - p_1) \quad (17)$$

由(17)式得

$$p_2^2 = (p_0 - p_1)^2 + 2mc(p_0 - p_1) \quad (18)$$

由(15)(18)式得

$$mc(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos\theta) = 2p_0p_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

由  $\lambda_0 = \frac{h}{p_0}$ ,  $\lambda_1 = \frac{h}{p_1}$  和(19)式得

$$\lambda_1 = \lambda_0 - 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (20)$$

式中  $\lambda_c$  称为电子的康普顿波长

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m} \quad (21)$$

可以看出, 波长差

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_1 = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

仅与散射角  $\theta$  有关, 当  $\theta=90^\circ$  时, 入射光与散射光的波长差等于电子的康普顿波长。

由能量守恒得, 光电子的动能为:

$$T_2 = E_0 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc(1 - \cos\theta)}{\lambda_0(1 - \cos\theta + \frac{\lambda_0}{\lambda_c})} \quad (22)$$

(4)  $\lambda_1$  光谱峰来源于 X 射线光子与靶电子碰撞使之电离的物理过程, 由于能量损失, 散射光的波长变长。

②③

$\lambda_0$  光谱峰来源于 X 射线光子与靶原子碰撞的准弹性散射过程, 靶原子的反冲动能可以忽略不计, 散射光的波长近似不变。

②④

对于 X 射线光子与靶原子碰撞, 由于原子的静能  $Mc^2$  远大于 X 射线光子能量, 其康普顿波长  $\lambda_c = \frac{h}{Mc} \ll \lambda_0$ , 故由(20)式可知, 散射光的波长几乎不变。

$\lambda_1$  光谱峰较宽的原因来自于材料靶中电子的运动,  $\lambda_1$  光的谱形状体现了靶电子的动量分布特征 (这就是著名的康普顿轮廓)。

②⑤

评分参考: 本题 40 分

第 (1) 问 8 分, ②③④⑤式各 2 分;

第 (2) 问 8 分, ⑥⑦⑧⑨式各 2 分;

第 (3) 问 18 分, ⑫⑬⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒式各 2 分;

第 (4) 问 6 分, ㉓㉔㉕各 2 分。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

