绝密★启用前

试卷类型：A

2021年茂名市高三级第二次综合测试

数学试卷

2021.4

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号填写在答题卡指定的位置上。
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid \log_2 x>1\}$，则 $A\cup B$ （ D ）

A. $(-1,2)$　　　　B. $(-1,3)$

C. $(2,3)$　　　　D. $(-1,+\infty)$

2. "绿水青山就是金山银山"的生态文明发展理念已经深入人心，推动着新能源汽车产业的迅速发展.下表是2020年我国某地区新能源乘用车的前5个月销售量与月份的统计表：

月份代码 x	1	2	3	4	5
销售量 y（万辆）	0.5	0.6	1	1.4	1.5

由上表可知其线性回归方程为：$\hat{y}=0.28x+a$，则 a 的值为（ A ）

A. 0.16　　B. 1.6　　C. 0.06　　D. 0.8

3. "$m\leqslant 0$"是"函数 $f(x)=\ln x-mx$ 在 $(0,1]$ 上为增函数"的（ A ）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 地震震级是根据地震仪记录的地震波振幅来测定的，一般采用里氏震级标准. 震级(M)是用距震中100千米处的标准地震仪所记录的地震波最大振幅值的对数来表示的。里氏震级的计算公式为：$M=\lg\frac{A\max}{A_0}$（其中A_0（常数）是距震中100公里处接收到的0级地震的地震波的最大振幅；$A\max$是指我们关注的这个地震在距震中100公里处接收到的地震波的最大振幅），地震的级数就是当地震发生时，以地震波的形式放出的能量的指示参数$E=10^{4.8}\times10^{1.5M}$焦耳，其中$M$为地震级数，它直接同震源中心释放的能量（热能和动能）大小有关，震源放出的能量越大，震级就越大。已知汶川地震最大振幅是玉树地震最大振幅的$10^{0.9}$倍，若玉树地震波产生的能量为E，则汶川地震波产生的能量为（C）

A. $10^{1.35}E$　　B. $1.35E$　　C. $10^{0.9}E$　　D. $90E$

5. 已知三角形ABC的边长分别为$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$（D）

A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 3　　D. $-\frac{2}{3}$

6. 设O为坐标原点，F为抛物线C：$x^2=8y$的焦点，P为C上一点，若$|PF|=6$，则$\triangle POF$的面积为（B）

A. 2　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 4

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$3a_n-2a_{n-1}=a_{n+1}$，且$a_1=0$，$a_6=2021$，则$a_2=$（D）

A. $\frac{2021}{31}$　　B. $\frac{2021}{33}$　　C. $\frac{2021}{63}$　　D. $\frac{2021}{65}$

8. 在三棱锥$A-BCD$中，$AB=2$，$\angle ABC=\angle ACD=60^\circ$，$E$、$F$分别为$BC$、$AD$的中点，且$EF\perp BC$，$EF\perp AD$，$BC\perp AD$，则异面直线$BF$与$DE$所成角的余弦值为（C）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 给出如下数据：第一组：3、11、5、13、7、2、6、8、9

第二组：12、20、14、22、16、11、15、17、18

则这两组数据的（CD）

A. 平均数相等　　　　B. 中位数相等

C. 极差相等　　　　D. 方差相等.

10. 已知函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$，则下列正确的是（AD）

A. $f(x)$的图像可由 $g(x)$的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到.

B. $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$时，$|g(x)|>|f(x)|$.

C. $h(x)=f(x)+g(x)$的对称轴方程为：$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$

D. 若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图像分别交于 M、N 两点，则 $|MN|$的最大值为 $\sqrt{2}$

11. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等。这是因为阿基米德认为这个“圆柱容球”是他最为得意的发现，于是留下遗言:他死后，墓碑上要刻上一个“圆柱容球”的几何图形。设圆柱的体积与球的体积之比为 m，圆柱的表面积与球的表面积之比为 n，若 $f(x)=\left(\frac{m}{n}x^3-\frac{1}{x}\right)^8$，则（C）

(第 11 题图)

A. $f(x)$的展开式中的常数项是 56

B. $f(x)$的展开式中的各项系数之和为 0

C. $f(x)$的展开式中的二项式系数最大值是 70

D. $f(i)=-16$，其中 i 为虚数单位

12. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，C 的一条渐近线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，且 F_1 到 l 的距离为 $3\sqrt{3}$，点 P 为 C 在第一象限上的点，点 Q 的坐标为（2，0），PQ 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线，则下列正确的是（ A ）

A. 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

B. $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$

C. $|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=3\sqrt{6}$

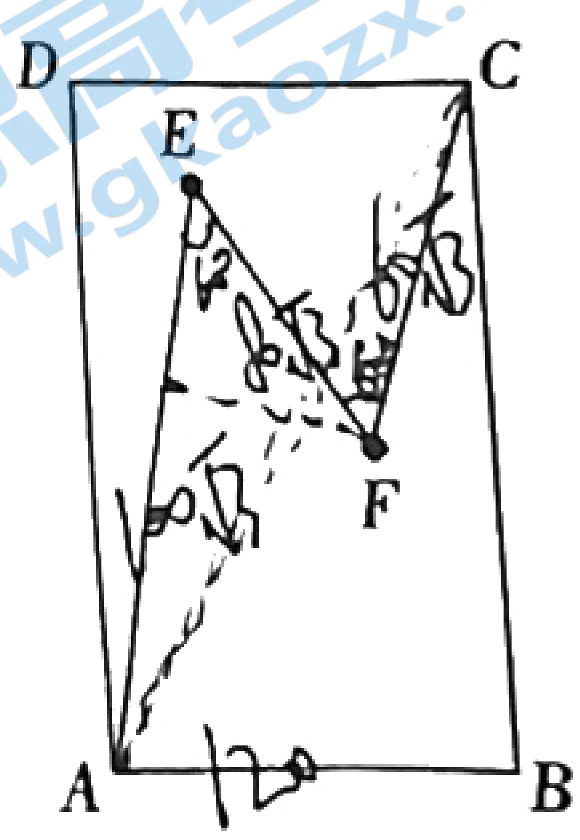
D. 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 1748 年，数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，得到公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为"数学中的天桥". 根据此公式，可以得到"最美的数学公式"：$e^{i\pi}+1=$ ___0___.

14. 写出一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}，0\right)$ 的函数 $f(x)=$ ________.

15. 在矩形 $ABCD$ 内有 E、F 两点，其中 $AB=120cm$，$AE=100\sqrt{3}\ cm$，$EF=80\sqrt{3}\ cm$，$FC=60\sqrt{3}\ cm$，$\angle AEF=\angle CFE=60°$，则该矩形 $ABCD$ 的面积为 ________ cm^2.（答案如有根号可保留）



(第 15 题图)

16. 已知 $x>0$，$f(x)=x^2+e^x$，$g(x)=(m^2+1)x+\ln x$，若 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 ________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

在$\triangle ABC$，它的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，

$\cos(A+2B)+2\sin(A+B)\sin B=\frac{1}{2}$，且$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1，

在① $b+c=3$　② $\sin C=2\sin B$　③角 B 的平分线交 AC 于点 D，且 CD：$AD=\sqrt{3}$：2，

请在这三个条件中任选一个，补充在上面问题的横线中，求角 A 和$\triangle ABC$ 的面积.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_9=90$，$a_{10}=20$，数列$\{b_n\}$满足 $b_1=6$，$b_{n+1}=3b_n-4n$，T_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

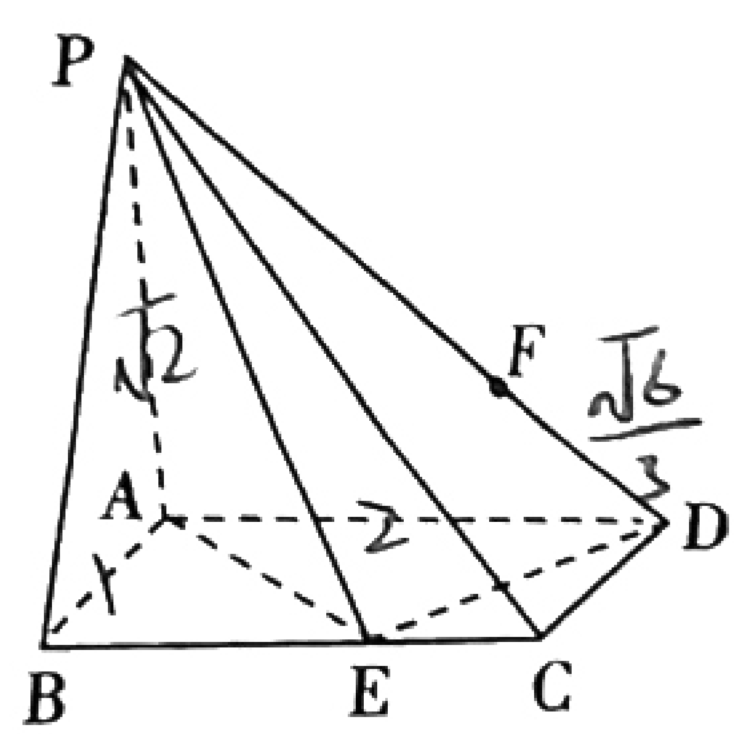
(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求证：数列 $\{b_n-a_n-1\}$ 为等比数列；

(3) 若 $T_n-369\geqslant 0$ 恒成立，求 n 的最小值.

19.（本题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$矩形 $ABCD$，其中 $AD=2$，$AB=1$，$PA=\sqrt{2}$，点 E 为矩形 $ABCD$ 的边 BC 上一动点.



(第 19 题图)

(1) F 为线段 PD 上一点，$|PD|=3|DF|$，是否存在点 E，使得 EF∥平面 PAB，若存在，请求出 CE 的长，若不存在，请说明理由；

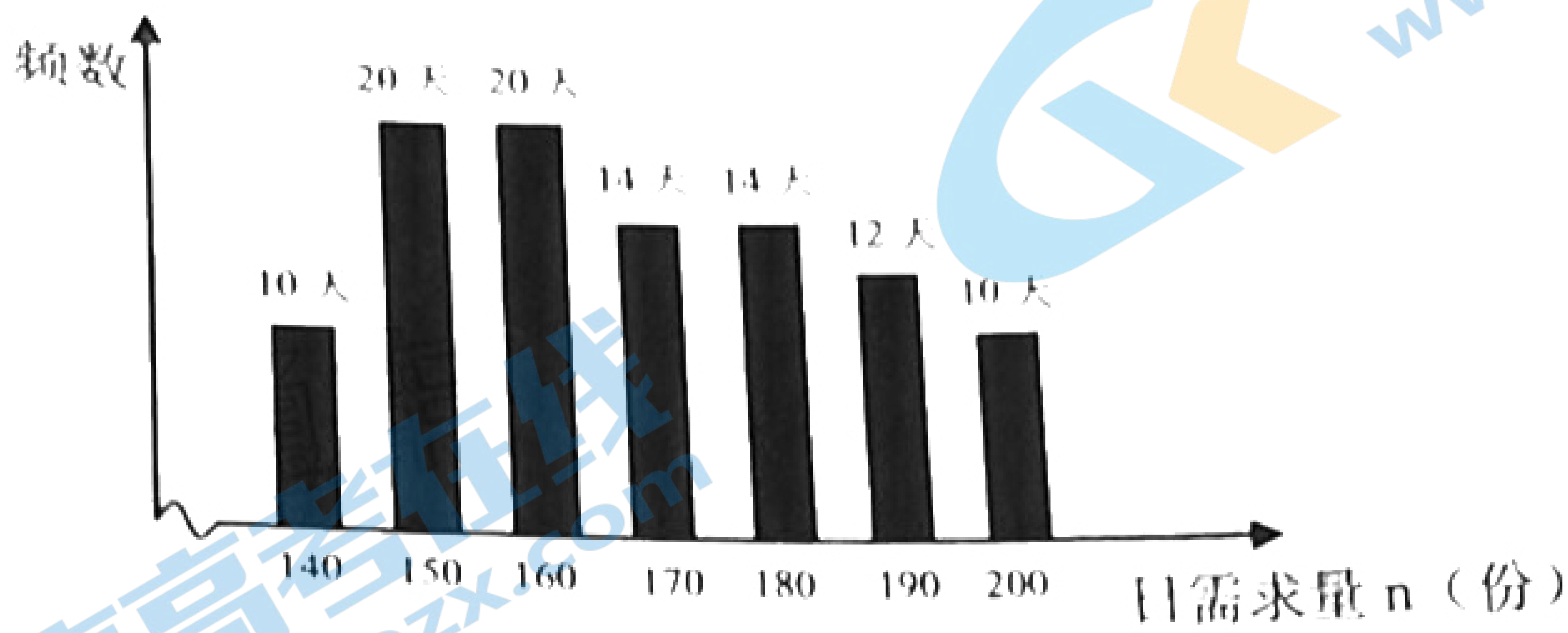
(2) 若 $DE\perp PE$，求直线 PC 与平面 PED 所成角的余弦值.

20. (本题满分 12 分)

茂名市是著名的水果之乡，"高农业"蓬勃发展，荔枝、华李、香蕉、龙眼等"岭南佳果"驰名中外.某商铺推出一款以新鲜水果为原料的加工产品，成本为每份 10 元，然后以每份 20 元的价格出售.如果当天卖不完，剩下的作垃圾处理.

(1) 若商铺一天准备 170 份这种产品，求当天的利润 y（单位：元）关于当天需求量 n 份，（$n\in N$）的函数解析式.

(2) 商铺记录了 100 天这种产品的日需求量（单位：份），整理得下图：



若商铺计划一天准备 170 份或 180 份这种产品，用 X 表示准备 170 份的利润，Y 表示准备 180 份的利润，你认为应准备哪个数量更合理？请说明理由.(以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率)

21. (本题满分 12 分)

已知点 N 为圆 C_1：$(x+1)^2+y^2=16$ 上一动点，圆心 C_1 关于 y 轴的对称点为 C_2，点 M，P 分别是线段 C_1N，C_2N 上的点，且 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{C_2N}=0$，$\overrightarrow{C_2N}=2\overrightarrow{C_2P}$.

(1) 求点 M 的轨迹方程；

(2) 过点 $A(-2,0)$且斜率为 $k(k>0)$的直线与点 M 的轨迹交于 A，G 两点，点 H 在点 M 的轨迹上，$GA\perp HA$，当 $2|AG|=|AH|$时，证明：$\sqrt{3}<k<2$.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=m\ln x+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=f(x)-x-\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，若不等式 $g(x)\leqslant e^{x-1}-x-1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2) 若存在两个不相等的正数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)+x_1=f(x_2)+x_2$，证明：$\sqrt{x_1x_2}<-2m$.

2021年茂名市高三第二次综合测试
数学答案及评分标准

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，满分40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	A	A	D	B	A	B

4．因为 $\frac{A'_{max}}{A_{max}}=10^{0.9}$,则 $M'_L-M_L=\lg\frac{A'_{max}}{A_0}-\lg\frac{A_{max}}{A_0}=\lg\frac{A'_{max}}{A_{max}}=\lg10^{0.9}=0.9$

$\frac{E'}{E}=10^{1.5(M'-M)}=10^{1.35}$ 所以 $E'=10^{1.35}E$.故选 A

5.方法一：以 A 为原点，分别以 AB、AC 为 x、y 轴建立直角坐标系，则 A(0,0),B(3,0),C(0,4),由 $\overline{BC}=3\overline{BD}$

得，$D(2,\frac{4}{3})$ 所以 $\overrightarrow{AD}=(2,\frac{4}{3}),\overrightarrow{BC}=(-3,4)$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=-6+\frac{16}{3}=-\frac{2}{3}$

方法二：由 $\overline{BC}=3\overline{BD}$ 得，$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{2}{3}$

故选 D

6．由抛物线的定义得 P 点的坐标为（$\pm 4\sqrt{2}$，4），则 ΔPOF 的面积为 $4\sqrt{2}$.故选 B

7．方法一：由 $3a_n-2a_{n-1}=a_{n+1}$ 得，$2(a_n-a_{n-1})=a_{n+1}-a_n$，即 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=2$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以首项为 a_2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=a_2\times2^{n-1}$

所以 $a_2-a_1+a_3-a_2+a_4-a_3+a_5-a_4+a_6-a_5=a_2\times2^0+a_2\times2^1+a_2\times2^2+a_2\times2^3+a_2\times2^4$

则 $a_6=31a_2,\therefore a_2=\frac{2021}{31}$

方法二：由 $3a_n-2a_{n-1}=a_{n+1}$ 得

$n=5$时，$a_6=3a_5-2a_4$

$n=4$时，$a_5=3a_4-2a_3$

$n=3$时，$a_4=3a_3-2a_2$

$n=2$时，$a_3=3a_2-2a_1$，

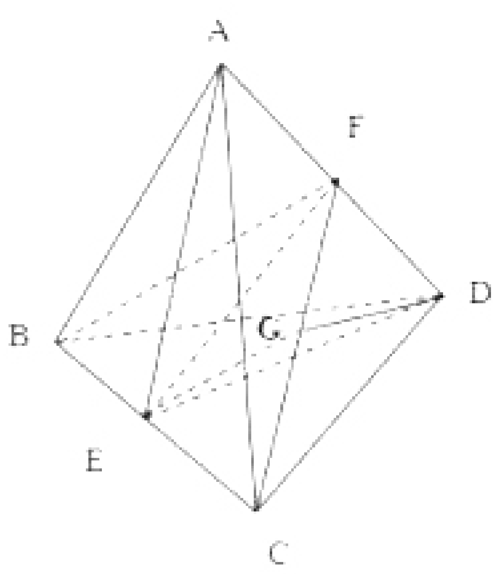
由 $a_1=0$ 得，$a_3=3a_2$，$a_4=7a_2$，$a_5=15a_2$，$a_6=31a_2$，所以 $a_2=\frac{a_6}{31}=\frac{2021}{31}$ 选 A

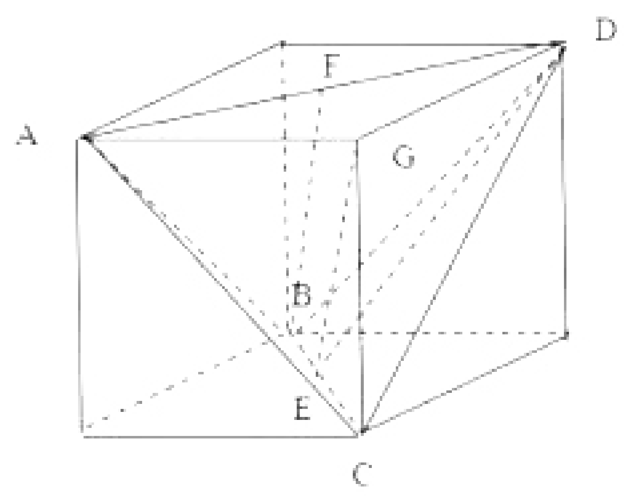
8. 解析： 如图，连接AE、DE、BF、CF，因为$BC\perp EF,BC\perp AD$，$EF\cap AD=F$，所以$BC\perp$面AED，$BC\perp AE$，$BC\perp DE$，又因为E为BC的中点，所以AB=AC，DB=DC，同理可得，AB=BD，AC=CD，又因为$\angle ABC=\angle ACD=60^0$，所以$\Delta ABC$和$\Delta ADC$都是等边三角形，所以AB=BD=AC=CD=BC=AD，所以三棱锥A-BCD为正四面体，

方法一：取CF的中点，连接EG，则EG//BF，所以$\angle GED$就是BF与DE所成的角，由AB=2得，

$EG=\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$ED=\sqrt{3}$，$DG=\sqrt{FG^2+FD^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，在$\Delta EGD$中，由余弦定理得，

$$\cos\angle GED=\frac{3+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$$





方法二：在正方体中，易得到正四面体 A-BCD，易得EG//BF，得$\angle GED$就是BF与DE所成的角，由AB=2得，正方体的边长为$\sqrt{2}$，$BF=\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{3}$，

在ΔEGD中，由余弦定理得 $\cos\angle GED=\frac{3+3-2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.

9	10	11	12
CD	ABD	BC	ABD

9．第一组的每个数据都加上9，得到第二组对应同一个位置的数据，CD正确

10．A. $g(x)=\cos x$的图像向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位得到$g(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$，A正确；

B. $|g(x)|>|f(x)|\Leftrightarrow-\cos x>\sin x\Leftrightarrow\sin x+\cos x<0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})<0$

当$x\in[\frac{3}{4}\pi,\pi]$时，$x+\frac{\pi}{4}\in(\pi,\frac{5\pi}{4})$，所以$\sin(x+\frac{\pi}{4})<0$，所以$|g(x)|>|f(x)|$，则B正确，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，对称轴满足：$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，则$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，

则C错.$|MN|=|\sin x-\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\right|\le\sqrt{2}$，则D正确.故选ABD

11．设球的半径为R，则圆柱的底面半径为R，高为$2R$，所以圆柱的体积$V_1=\pi R^2\times 2R=2\pi R^3$，

球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以 $m=\frac{V_1}{V_2}=\frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

又圆柱的表面积为 $S_1=2\pi R\times 2R+2\pi R^2=6\pi R^2$，球的表面积为 $S_2=4\pi R^2$，

所以 $n=\frac{S_1}{S_2}=\frac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{2}$，$\frac{m}{n}=1$，$f(x)=\left(\frac{m}{n}x^3-\frac{1}{x}\right)^8=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$，其展开式中

通项 $T_{r+1}=C_8^r x^{24-4r}(-1)^r$，令 $24-4r=0$ 得 $r=6$，常数项为 $C_8^6(-1)^6$=28.

各项系数之和为 $f(1)$=0，二项式系数最大值是 C_8^4=70

$f(i)=(i^3-\frac{1}{i})^8=(\frac{i^4-1}{i})^8=0^8=0$ 故选 ABD

12. 易知 $a=3,b=3\sqrt{3}$，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$，因为 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$ 且 $\left||PF_1|-|PF_2|\right|=6$ 所以 $|PF_1|$=12,$|PF_2|$=6，又因为 $|F_1F_2|$=12，所以在 ΔPF_1F_2 中，点 $点F_1到PF_2的距离为3\sqrt{15}$，由等面积得，点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. $\because\left|\vec{PF_1}-\vec{PF_2}\right|^2=\vec{PF_1}^2+\vec{PF_2}^2+2\vec{PF_1}\cdot\vec{PF_2}=216\therefore\left|\vec{PF_1}-\vec{PF_2}\right|=6\sqrt{6}$ 故选 ABD

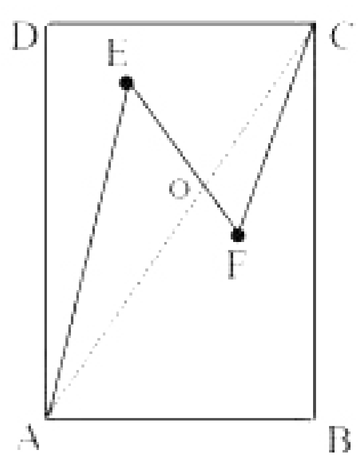
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． 0

14． $\sin(x-\frac{\pi}{4})$（答案不唯一，任何奇函数向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 均可）

15． $14400\sqrt{3}$

解析：连接 AC 交 EF 与点 O，由 $\angle AEF=\angle CFE=60^0$ 得，AE//FC，所以 ΔAEO 与 ΔCFO 相似，$\frac{AE}{CF}=\frac{OE}{OF}=\frac{5}{3}$ 所以 $EO=50\sqrt{3}$，$FO=30\sqrt{3}$，在 ΔAEO 中，由余弦定理得，AO=150 同理 CO=90 所以 AC=240，从而 BC= $\sqrt{AC^2-AB^2}=120\sqrt{3}$，所以矩形 ABCD 的面积为 $14400\sqrt{3}$ cm²



16．$[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

解法 1：参数全分离—构造函数

$f(x)\ge g(x)$ 等价于 $m^2+1\le x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$ （x>0）设 $g(x)=x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$

则 $g(x)=x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$， $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-1+\ln x+x^2}{x^2}$

令 $\varphi(x)=e^x(x-1)-1+\ln x+x^2$，则 $\varphi'(x)=xe^x+\dfrac{1}{x}+2x>0$

所以 $\varphi(x)$是增函数，又$\varphi(1)=0$，易得 $g(x)$在（0, 1）上递减，在（1, +∞）上递增

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+1$, 所以 $m^2+1\le e+1, \therefore m\in[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

解法 2：参数全分离—放缩法

$f(x)\ge g(x)$ 等价于 $m^2+1\le x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$ （x>0）设 $g(x)=x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$，则有

$x+\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{e^x-\ln x+x^2}{x}\ge\dfrac{ex-(x-1)+(2x-1)}{x}=e+1$（当且仅当$x=1$时取得等号）

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e+1$, 所以 $m^2+1\le e+1, \therefore m\in[-\sqrt{e},\sqrt{e}]$

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．(本题满分 10 分)

解：由 $\cos(A+2B)+2\sin(A+B)\sin B=\dfrac{1}{2}$得，

$\cos[(A+B)+B]+2\sin(A+B)\sin B$

$=\cos[(A+B)\cos B-\sin(A+B)\sin B+2\sin(A+B)\sin B$ ……………………………………**2 分**

$=\cos[(A+B)\cos B+\sin(A+B)\sin B=\cos A=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………**3 分**

$\because A\in(0,\pi)\ \therefore A=\dfrac{\pi}{3}$ ………………………………**4 分**

又因为$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ 得， $a=\sqrt{3}$ ……………………………………**5 分**

选①b+c=3

由余弦定理得 $3=b^2+c^2-bc$ ………………………………**6 分**

$\therefore 3=(b+c)^2-3bc$ ………………………………**7 分**

$\therefore bc=2$ ………………………………**8 分**

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ………………………………**9 分**

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………10 分

选②sinC=2sinB

方法一：由 sinC=2sinB，A+B+C=180^0 得 $\sin(A+B)=2\sin B$ ……………………………………6 分

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B=2\sin B$，即 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$ ……………………………………7 分

$\therefore \tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 因为 B 为三角形内角所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$， 所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$ ……………………………………8 分

由 $a=\sqrt{3}$ 得，$c=2, b=1$ ……………………………………9 分

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………10 分

方法二：由 sinC=2sinB，得 c=2b.……………………………………6 分

由余弦定理得，$3=b^2+c^2-bc$ ……………………………………7 分

$\therefore b=1$，c=2……………………………………8 分

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………10 分

选③

由角 B 的角平分交 AC 于点 D，且 CD：AD $=\sqrt{3}:2$，得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………6 分

所以 $c=2$ ……………………………………7 分

又由余弦定理得 $b^2-2b+1=0$，$b=1$ ……………………………………8 分

$\therefore S_{\Delta}ABC=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………10 分

18.解：（1）解法一：由等差数列$\{a_n\}$前 9 项的和为 90 得

$\dfrac{(a_1+a_9)\times 9}{2}=90$，所以 $a_5=10$ ……………………………………1 分

由 $a_{10}=20$ 得，5d=10，所以 d=2.……………………………………3 分

所以 $a_n=a_{10}+(n-10)d$ =2n……………………………………4 分

解法二：由 $S_9=90$ 和 $a_{10}=20$ 得

$$\begin{cases}9a_1+36d=90\\ a_1+9d=20\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a_1=2\\ d=2\end{cases}$ ……………………………………3 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$ ……………………………………4 分

(2)由 $b_{n+1}=3b_n-4n$ 得，

$$\frac{b_{n+1}-2(n+1)-1}{b_n-2n-1}=\frac{3b_n-4n-2(n+1)-1}{b_n-2n-1}=\frac{3b_n-6n-3}{b_n-2n-1}=3$$ ……………………………………5 分

又因为 $b_1=6$，所以 $\{b_n-2n-1\}$ 是以首项为 3，公比为 3 的等比数列……………………………………6 分

所以 $b_n-2n-1=3\times3^{n-1}=3^n$

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3^n+2n+1$ ……………………………………7 分

（3）由（2）得 $b_n=3^n+2n+1$

$S_n=(3+3^2+\cdots+3^n)+[3+5+\cdots+(2n+1)]$ ……………………………………8 分

$$=\frac{3-3^n\cdot3}{1-3}+\frac{(3+2n+1)n}{2}$$

$$=\frac{3^{n+1}+2n^2+4n-3}{2}$$ ……………………………………9 分

$$\because S_{n+1}-S_n=\frac{3^{n+2}+2(n+1)^2+4(n+1)-3}{2}-\frac{3^{n+1}+2n^2+4n-3}{2}$$

$$=3^{n+1}+2n+3>0$$

$\therefore S_n$ 随 n 的增大而增大 ……………………………………10 分

又因为 $\therefore S_4=144\ \therefore S_5=398$ ……………………………………11 分

所以 $S_n-369>0$ 的最小 n 值 5. ……………………………………12 分

19.解：解法一：（1）存在点 E 满足 $EF\,//$ 平面 PAB，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………1 分

证明如下：在线段 PA 上取一点 M，使得 PA=3MA

$\because PA=3MA, PD=3FD \therefore MF // AD$ 且 $MF=\dfrac{2}{3}AD$

又 $\because BE // AD$ 且 $BE=\dfrac{2}{3}AD$ ……………………2 分

$\therefore BE // MF$ 且 $BE=MF \therefore$ 四边形 $BEFM$ 是平行四边形 ……………………………………3 分

$\because EF // MB, MB \subset$ 平面 PAB ……………………………………4 分

$\therefore EF //$ 平面 PAB ……………………………………5 分

解法二：存在点 E 满足 $EF //$ 平面 PAB，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………1 分

在线段 PD 上取一点 M，使得 AD=3MD

$\because DA=3MD, PD=3FD \therefore MF // AD \therefore FM //$ 平面 PAB ……………………………………2 分

$\because MA=EB, MA // BE \therefore$ 四边形 $ABEM$ 为平行四边形 ……………………………………3 分

$\therefore ME // AB \therefore ME //$ 平面 PAB

$\therefore$ 平面 $EFM //$ 平面 PAB ……………………………………4 分

$\because EF \subset$ 平面 $EFM \therefore EF //$ 平面 PAB ……………………………………5 分

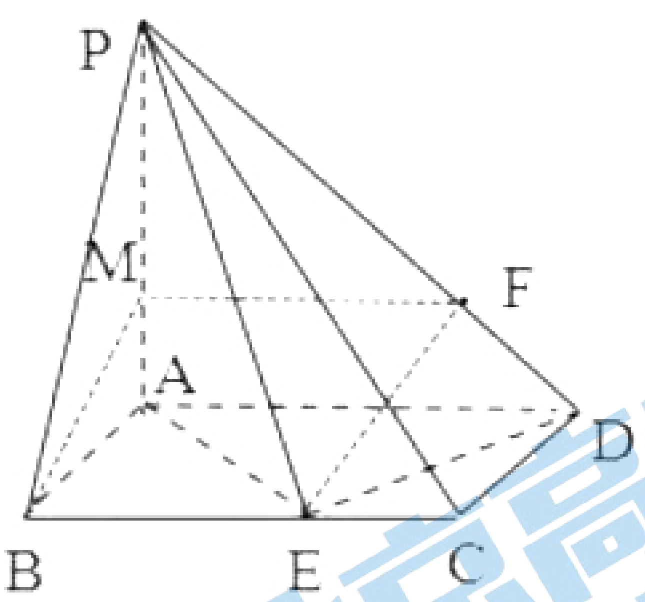
解法三：存在点 E 满足 $EF //$ 平面 PAB，此时 $CE=\dfrac{2}{3}$ ……………………………………1 分

延长 DE 与 AB 的延长线交于 M 点，连接 PM ……………………………………**2 分**

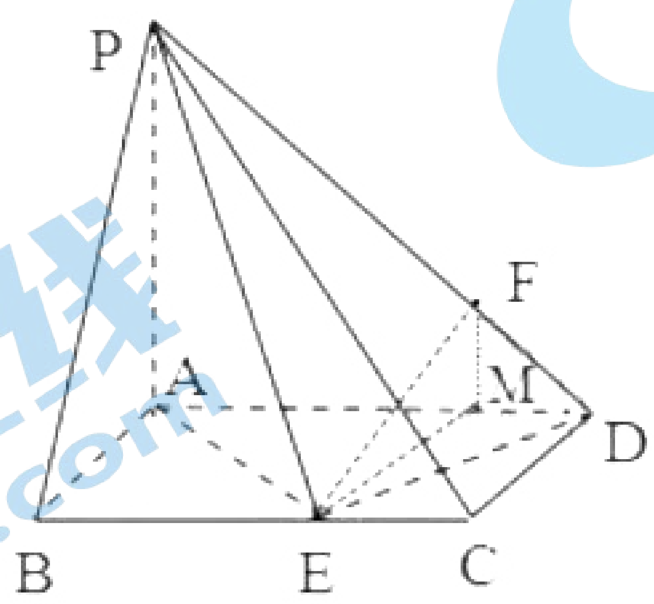
$\because \Delta BME$ 与 ΔCDE 相似 $\therefore MD=3ED$ ……………………………………3 分

$\because PD=3FD, MD=3ED \therefore EF // PM$ ……………………………………4 分

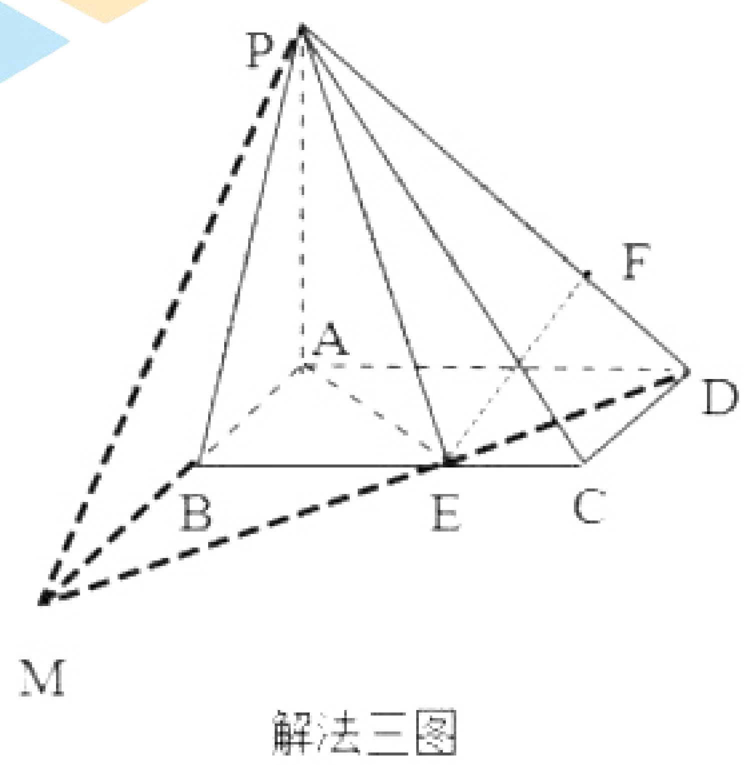
$\because PM \subset$ 平面 $PAB \therefore EF //$ 平面 PAB ……………………………………5 分



解法一图



解法二图



解法三图

(2)$\because PA\perp$ 平面$ABCD\therefore PA\perp DE$ ……………………………………6 分

$\because DE\perp PE\therefore DE\perp$ 平面PAE

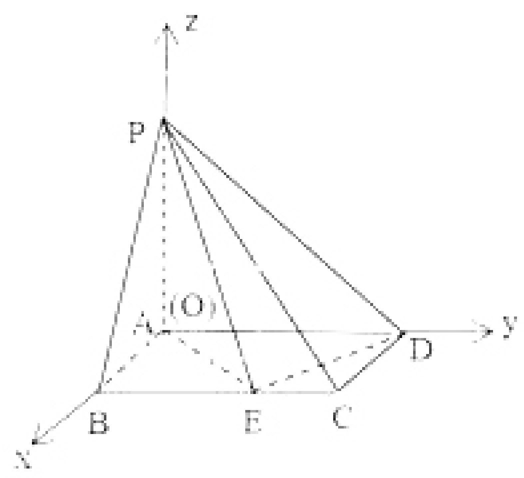
$\therefore DE\perp AE$ ……………………………………7 分

设$CE=x$,由$DE^2+AE^2=AD^2$得$x=1$，即E为BC的中点 ……………………………………8 分

以 A 为原点，分别以边 AB、AD、AP 所在的直线为 x、y、z 轴建立直角坐标系

所以 $P(0,0,\sqrt{2})$，$E(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，$C(1,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PE}=(1,1,-\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{PD}=(0,2,-\sqrt{2})$ ……………………………………9 分



设平面 PED 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

由$\vec{n}\perp\overrightarrow{PE},\vec{n}\perp\overrightarrow{PD}$得，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y-\sqrt{2}z=0\\ 2y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令$y=1$，则$x=1,z=\sqrt{2}$

所以得$\vec{n}=(1,1,\sqrt{2})$ ……………………………………10 分

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{PC}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{1+2-2}{\sqrt{7}\times 2}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ ……………………………………11 分

设直线 PC 与面 PED 的线面角为α

所以$\cos\alpha=\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{7}}{14})^2}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$ ……………………………………12 分

20. （1）当$n\geq 170$时，$y=170\times(20-10)=1700$； ……………………………………1 分

当$n<170$时，$y=20n-1700$ ……………………………………2 分

所以$y=\begin{cases}20n-1700,n<170\\ 1700,n\geq 170\end{cases}$（$n\in N$） ……………………………………3 分

（2）若准备 170 份时，X 的可能取值为 1100，1300，1500, 1700 ……………………………………4 分

$P(X=1100)=0.1$ $P(X=1300)=0.2$ $P(X=1500)=0.2$ $P(X=1700)=0.5$ ……………………5 分

X 的分布列为:

X	1100	1300	1500	1700
P	0.1	0.2	0.2	0.5

……………………………………6 分

X 的数学期望 $EX = 1100\times0.1 + 1300\times0.2 + 1500\times0.2 + 1700\times0.5 = 1520$ ……………………………7 分

若准备 180 份时，Y 的可能取值为 1000，1200，1400，1600, 1800 ……………………………8 分

$P(Y = 1000) = 0.1$ $P(X = 1200) = 0.2$ $P(X = 1400) = 0.2$

$P(X = 1600) = 0.14$ $P(X = 1800) = 0.36$ ……………………………9 分

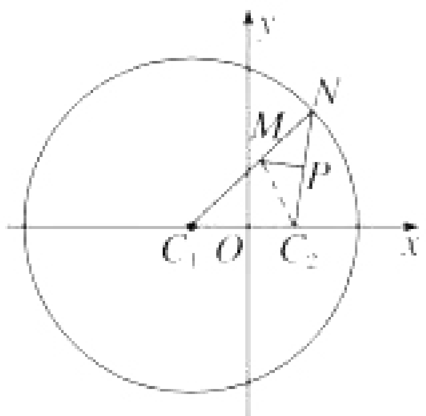
Y 的分布列为:

Y	1000	1200	1400	1600	1800
P	0. 1	0. 2	0. 2	0. 14	0. 36

……………………………10 分

$EY = 1000\times0.1 + 1200\times0.2 + 1400\times0.2 + 1600\times0.14 + 1800\times0.36 = 1492$ ……………………11 分

因为 $EX > EY$，所以该商铺应该准备 170 份. ……………………………12 分



21. (1)因为 $\overrightarrow{C_2N} = 2\overrightarrow{C_2P}$，所以 P 为 C_2N 的中点，

因为 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{C_2N} = 0$，所以 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{C_2N}$，

所以点 M 在 C_2N 的垂直平分线上，所以 $|MN| = |MC_2|$，……………………………1 分

因为 $|MN| + |MC_1| = |MC_2| + |MC_1| = 4 > 2$ ……………………………2 分

所以点 M 在以 C_1，C_2 为焦点的椭圆上，$a = 2, c = 1$，$b = \sqrt{3}$，……………………………3 分

所以点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ ……………………………4 分

（2）将直线 AG 的方程 $y = k(x+2)(k > 0)$ 代入 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

得 $(3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$.……………………………5 分

由 $x_1\cdot(-2) = \dfrac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}$ 得 $x_1 = \dfrac{2(3 - 4k^2)}{3 + 4k^2}$

故 $AG = \sqrt{1 + k^2}\,|x_1 + 2| = \dfrac{12\sqrt{1 + k^2}}{3 + 4k^2}$ ……………………………7 分

由题设，直线 AH 的方程为 $y = -\dfrac{1}{k}(x + 2)$

故同理可得 $AH = \dfrac{12k\sqrt{1 + k^2}}{4 + 3k^2}$ ……………………………8 分

由$2|AG|=|AH|$得$\frac{2}{3+4k^2}=\frac{k}{4+3k^2}$，即$4k^3-6k^2+3k-8=0$.…………………………………9分

设$f(t)=4t^3-6t^2+3t-8$，则k是$f(t)$的零点，……………………………………10分

$f'(t)=12t^2-12t+3=3(2t-1)^2\ge 0$，所以$f(t)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$f(\sqrt{3})=15\sqrt{3}-26<0, f(2)=6>0$，……………………………………11分

因此$f(t)$在$(0,+\infty)$有唯一的零点，且零点k在$(\sqrt{3},2)$内，所以$\sqrt{3}<k<2$.……………………12分

22（1）当$x\ge 1$时，$g(x)\le e^{x-1}-x-1$等价于$h(x)=m\ln x-e^{x-1}+1\le 0$，

则$h'(x)=\frac{m}{x}-e^{x-1}=\frac{m-xe^{x-1}}{x}$……………………1分

（i）$m\le 1$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，$\therefore h(x)\le 0$恒成立，满足题意。……………………………………2分

（ii）$m>1$时，令$\varphi(x)=m-xe^{x-1}$，$\varphi'(x)=-e^{x-1}-xe^{x-1}<0$，

$\therefore \varphi(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，$\therefore \varphi_{\max}(x)=\varphi(1)=m-1>0$，……………………………………3分

其中$\varphi(m)=m(1-e^{m-1})<0$，且$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore$根据零点存在性定理$\exists x_0\in[1,m]$，使得$\varphi(x_0)=0$，……………………………………4分

即$\forall x\in(1,x_0)$，$\varphi(x)>0$；$\forall x\in(x_0,+\infty)$，$\varphi(x)<0$

$\therefore \forall x\in(1,x_0)$，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(1,x_0)$上单调递增，

又$\because h(1)=0$，$\therefore \forall x\in(1,x_0)$，$h(x)>0$，不满足题意，舍掉；……………………………………5分

综上可得$m\le 1$……………………………………6分

（2）不妨设$0<x_1<x_2$，则$\ln x_2-\ln x_1>0$。

$\because f(x_1)+x_1=f(x_2)+x_2$，$\therefore x_1-\frac{1}{2}\sin x_1+m\ln x_1=x_2-\frac{1}{2}\sin x_2+m\ln x_2$ ……………………………7分

令$P(x)=x-\sin x$，$P'(x)=1-\cos x\ge 0$，$\therefore P(x)$在$(0,+\infty)$上单增，

$\therefore x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，从而$x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$；……………………………………8分

$\therefore -m\left(\ln x_2-\ln x_1\right)=x_2-x_1-\frac{1}{2}\left(\sin x_2-\sin x_1\right)>\frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)$，

即 $0<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<-2m$； ……………………………………9 分

下面证明 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$， 令 $\frac{x_2}{x_1}=t$， 则 $t>1$， ……………………………10 分

即证明 $\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$， 只要证明 $\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}<0$，

设 $h(t)=\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$， $\therefore h'(t)=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立， …………………………11 分

$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减， 故 $h(t)<h(1)=0$ 。

$\therefore \sqrt{x_1x_2}<-2m$ 成立。 ……………………………………12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。