2019 北京新学道临川学校高三(上)期中

数　　学

一．选择题（共 12 小题）

1．函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是（　　）

A．2π　　B．$2\sqrt{2}\pi$　　C．π　　D．$\frac{\pi}{4}$

2．已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|3^x<1\}$，则（　　）

A．$A\cap B=\{x|x<0\}$　　B．$A\cup B=R$　　C．$A\cup B=\{x|x>1\}$　　D．$A\cap B=\varnothing$

3．记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

4．$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$的值是（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

5．函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，$+\infty$）单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

6．已知曲线 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，则下面结论正确的是（　　）

A．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

B．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

C．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

D．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

7． $\sin 20°\cos 10° - \cos 160°\sin 10° =$（　　）

A． $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　B． $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　C． $-\frac{1}{2}$　　　D． $\frac{1}{2}$

8．设 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A． $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　　B． $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C． $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　　D． $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

9．设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$（　　）

A．3　　　B．6　　　C．9　　　D．12

10．已知关于 x 的不等式 $ax-b\leqslant 0$ 的解集是$[2,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $ax^2+(3a-b)x-3b<0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　　B．$(-3,2)$

C．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　　　D．$(-2,3)$

11．已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$(-7,-4)$　　　B．$(7,4)$　　　C．$(-1,4)$　　　D．$(1,4)$

12．等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为（　　）

A．130　　　B．170　　　C．210　　　D．260

二．填空题（共 4 小题）

13．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为 60°，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$_______.

14．若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为偶函数，则 $a=$_______.

15．对任意的 $x>0$，函数 $y=\frac{2x}{x^2+3x+1}$的最大值是_______.

16．已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，对任意 x 都满足 $f(x+2)=f(4-x)$，且当 $x\in[0,3]$，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(2019)=$

三．解答题（共 7 小题）

17．在△ABC 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 b，c 的值；

（Ⅱ）求 $\sin(B+C)$ 的值.

18．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2+a_8=82$，$S_{41}=S_9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求 S_n 的最大值.

19(文)．S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$

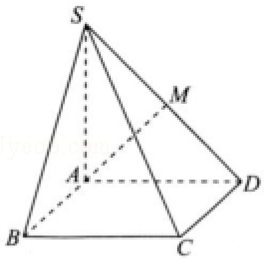
（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式：

（Ⅱ）设 $b_n=\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

19(理). 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$底面 $ABCD$，$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $SA=1$，点 M 是 SD 的中点.

（1）求证：$SC\perp AM$；

（2）求平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小.



20. 已知函数 $f(x)=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，$x\in R$，其中 $\vec{a}=(2\cos x,\ -\sqrt{3}\sin 2x)$，$\vec{b}=(\cos x,\ 1)$，

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间；

（2）在△ABC 中，$f(A)=-2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求△$ABC$ 中的面积.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对于所有的自然数 n，都有 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，证明 $\{a_n\}$ 是等差数列.

22．已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.

（1）求 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

（2）求证：$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, +\infty)$ 上仅有 2 个零点.

2019 北京新学道临川学校高三(上)期中数学

参考答案

一．选择题（共 12 小题）

1．函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是（　　）

A．2π　　B．$2\sqrt{2}\pi$　　C．π　　D．$\frac{\pi}{4}$

【分析】把三角函数式整理变形，变为 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)$ 的形式，再用周期公式求出周期，变形时先提出$\sqrt{2}$，式子中就出现两角和的正弦公式，公式逆用，得到结论．

【解答】解：$\because f(x)=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore T=2\pi$，故选：A．

【点评】本题关键是逆用公式，抓住公式的结构特征对提高记忆公式起到至关重要的作用，而且抓住了公式的结构特征，有利于在解题时观察分析题设和结论等三角函数式中所具有的相似性的结构特征，联想到相应的公式，从而找到解题的切入点．

2．已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|3^x<1\}$，则（　　）

A．$A\cap B=\{x|x<0\}$　　B．$A\cup B=R$　　C．$A\cup B=\{x|x>1\}$　　D．$A\cap B=\varnothing$

【分析】先分别求出集合 A 和 B，再求出 $A\cap B$ 和 $A\cup B$，由此能求出结果．

【解答】解：$\because$集合 $A=\{x|x<1\}$，

$B=\{x|3^x<1\}=\{x|x<0\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|x<0\}$，故 A 正确，D 错误；

$A\cup B=\{x|x<1\}$，故 B 和 C 都错误．

故选：A．

【点评】本题考查交集和并集求法及应用，是基础题，解题时要认真审题，注意交集、并集定义的合理运用．

3．记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A. 1　　　　　　B. 2　　　　　　C. 4　　　　　　D. 8

【分析】利用等差数列通项公式及前 n 项和公式列出方程组，求出首项和公差，由此能求出 $\{a_n\}$ 的公差.

【解答】解：∵ S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_4+a_5=24$，$S_6=48$，

$$\therefore \begin{cases} a_1+3d+a_1+4d=24 \\ 6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=48 \end{cases},$$

解得 $a_1=-2$，$d=4$，

∴ $\{a_n\}$ 的公差为 4.

故选：C.

【点评】本题考查等差数列公式的求法及应用，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列的性质的合理运用.

4. $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　　　　　B. 1　　　　　　C. $\frac{3}{2}$　　　　　　D. 2

【分析】根据 $\log_8 9=\frac{2}{3}\log_2 3$，从而得到答案.

【解答】解：$\frac{\log_8 9}{\log_2 3}=\frac{\frac{2}{3}\log_2 3}{\log_2 3}=\frac{2}{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查对数的运算性质.

5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $[-2, 2]$　　　　　　B. $[-1, 1]$　　　　　　C. $[0, 4]$　　　　　　D. $[1, 3]$

【分析】由已知中函数的单调性及奇偶性，可将不等式 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 化为 $-1\leqslant x-2\leqslant 1$，解得答案.

【解答】解：∵函数 $f(x)$ 为奇函数.

若 $f(1)=-1$，则 $f(-1)=1$，

又∵函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减，$-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$，

∴$f(1) \leqslant f(x-2) \leqslant f(-1)$，

∴$-1 \leqslant x-2 \leqslant 1$，

解得：$x \in [1, 3]$，

故选：D.

【点评】本题考查的知识点是抽象函数及其应用，函数的单调性，函数的奇偶性，难度中档.

6．已知曲线 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，则下面结论正确的是（　　）

A．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

B．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

C．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到曲线 C_2

D．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到曲线 C_2

【分析】利用三角函数的伸缩变换以及平移变换转化求解即可.

【解答】解：把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，得到函数 $y=\cos 2x$ 图象，再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到函数 $y=\cos 2(x+\frac{\pi}{12})=\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象，即曲线 C_2，

故选：D.

【点评】本题考查三角函数的图象变换，诱导公式的应用，考查计算能力.

7．$\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

【分析】直接利用诱导公式以及两角和的正弦函数，化简求解即可.

【解答】解：sin20° cos10° －cos160° sin10°

＝sin20° cos10° +cos20° sin10°

＝sin30°

$=\frac{1}{2}$.

故选：*D*.

【点评】本题考查诱导公式以及两角和的正弦函数的应用，基本知识的考查.

8．设 *D* 为△*ABC* 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

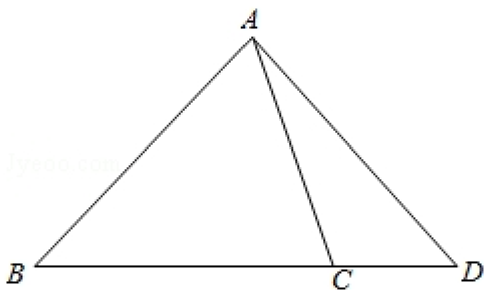
C．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

【分析】将向量 $\overrightarrow{AD}$ 利用向量的三角形法则首先表示为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，然后结合已知表示为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的形式.

【解答】解：由已知得到如图

由 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$；

故选：*A*.



【点评】本题考查了向量的三角形法则的运用；关键是想法将向量 $\overrightarrow{AD}$ 表示为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$.

9．设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$（　　）

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

【分析】先求 $f(-2)=1+\log_2(2+2)=1+2=3$，再由对数恒等式，求得 $f(\log_2 12)=6$，进而得到所求和.

【解答】解：函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geq 1\end{cases}$，

即有 $f(-2)=1+\log_2(2+2)=1+2=3$，

$f(\log_2 12)=2^{\log_2 12-1}=2^{\log_2 12}\times\frac{1}{2}=12\times\frac{1}{2}=6$，

则有 $f(-2)+f(\log_2 12)=3+6=9$.

故选：C.

【点评】本题考查分段函数的求值，主要考查对数的运算性质，属于基础题.

10．已知关于 x 的不等式 $ax-b\leq 0$ 的解集是$[2,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $ax^2+(3a-b)x-3b<0$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　B．$(-3,2)$

C．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　　D．$(-2,3)$

【分析】由一元一次不等式求得 $b=2a$，且 $a<0$；由此化简二次不等式并求出解集.

【解答】解：由关于 x 的不等式 $ax-b\leq 0$ 的解集是$[2,+\infty)$，

得 $b=2a$ 且 $a<0$，

则关于 x 的不等式 $ax^2+(3a-b)x-3b<0$ 可化为 $x^2+x-6>0$，

即 $(x+3)(x-2)>0$，

解得：$x<-3$ 或 $x>2$，

所求不等式的解集为：$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

故选：A.

【点评】本题考查了一元一次不等式的解法以及二次不等式的解法和应用问题，是基础题.

11．已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$(-7,-4)$　　B．$(7,4)$　　C．$(-1,4)$　　D．$(1,4)$

【分析】顺序求出有向线段 $\overrightarrow{AB}$，然后由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 求之.

【解答】解：由已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，得到 $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，

则向量 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-7,-4)$；

故选：A.

【点评】本题考查了有向线段的坐标表示以及向量的三角形法则的运用；注意有向线段的坐标与两个端点的关系，顺序不可颠倒.

12．等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为（　　）

A．130　　　　B．170　　　　C．210　　　　D．260

【分析】利用等差数列的前 n 项和公式，结合已知条件列出关于 a_1，d 的方程组，用 m 表示出 a_1、d，进而求出 s_{3m}；或利用等差数列的性质，s_m，$s_{2m}-s_m$，$s_{3m}-s_{2m}$成等差数列进行求解.

【解答】解：解法 1：设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，

由题意得方程组$\begin{cases} ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=30 \\ 2ma_1+\frac{2m(2m-1)}{2}d=100 \end{cases}$，$a1$

解得 $d=\frac{40}{m^2}$，$a_1=\frac{10(m+2)}{m^2}$，

$\therefore s_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=3m\frac{10(m+2)}{m^2}+\frac{3m(3m-1)}{2}\times\frac{40}{m^2}=210$.

故选 C.

解法 2：∵设$\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore s_m$，$s_{2m}-s_m$，$s_{3m}-s_{2m}$成等差数列，

即 30，70，$s_{3m}-100$ 成等差数列，

$\therefore 30+s_{3m}-100=70\times2$，

解得 $s_{3m}=210$.

故选 C．a_1

【点评】解法 1 为基本量法，思路简单，但计算复杂；解法 2 使用了等差数列的一个重要性质，即等差数列的前 n 项和为 s_n，则 s_n，$s_{2n}-s_n$，$s_{3n}-s_{2n}$，…成等差数列.

二．填空题（共 4 小题）

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为 60°，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则$|\vec{a}+2\vec{b}|=$__$2\sqrt{3}$__.

【分析】根据平面向量的数量积求出模长即可.

【解答】解：【解法一】向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，且$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，

$\therefore (\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2$

$=2^2+4\times2\times1\times\cos60°+4\times1^2$

$=12$，

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

【解法二】根据题意画出图形，如图所示；

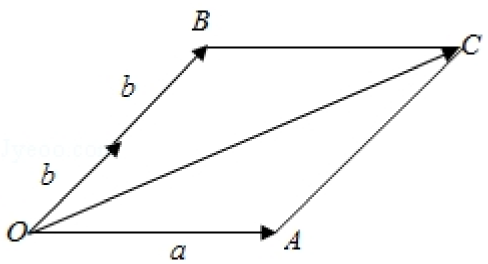
结合图形$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b}$；

在△OAC中，由余弦定理得

$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°}=2\sqrt{3}$，

即$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.



【点评】本题考查了平面向量的数量积的应用问题，解题时应利用数量积求出模长，是基础题.

14．若函数$f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，则$a=$__1__.

【分析】由题意可得，$f(-x)=f(x)$，代入根据对数的运算性质即可求解.

【解答】解：∵$f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$为偶函数，

$\therefore f(-x)=f(x)$，

$\therefore (-x)\ln(-x+\sqrt{a+x^2})=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$，

$\therefore -\ln(-x+\sqrt{a+x^2})=\ln(x+\sqrt{a+x^2})$，

$\therefore \ln(-x+\sqrt{a+x^2})+\ln(x+\sqrt{a+x^2})=0$，

$\therefore ln(\sqrt{a+x^2}+x)(\sqrt{a+x^2}-x)=0$，

$\therefore lna=0$，

$\therefore a=1$.

故答案为：1.

【点评】本题主要考查了偶函数的定义及对数的运算性质的简单应用，属于基础试题.

15．对任意的 $x>0$，函数 $y=\frac{2x}{x^2+3x+1}$的最大值是__$\frac{2}{5}$__.

【分析】根据题意，原函数的解析式可变形为 $y=\frac{2}{x+\frac{1}{x}+3}$，令 $t=x+\frac{1}{x}+3$，（$x>0$），则 $y=\frac{2}{t}$，对于 $t=x+\frac{1}{x}+3$，（$x>0$），由基本不等式分析可得其最小值，进而由反比例函数的性质分析可得 $y=\frac{2}{t}$的最大值，即可得答案.

【解答】解：$y=\frac{2x}{x^2+3x+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}+3}$，

令 $t=x+\frac{1}{x}+3$，（$x>0$），则 $y=\frac{2}{t}$，

则 $t\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3=5$，即 t 有最小值 5，

对于 $y=\frac{2}{t}$，

由 $t\geqslant 5$，可得 $y\leqslant\frac{2}{5}$，即 y 的最大值为$\frac{2}{5}$，

故答案为$\frac{2}{5}$.

【点评】本题考查基本不等式的运用，在解题中，可以用配凑法使其满足基本不等式成立的条件.

16．已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，对任意 x 都满足 $f(x+2)=f(4-x)$，且当 $x\in[0,3]$，$f(x)=\log_2(x+1)$，则 $f(2019)=$__2__

【分析】由已知求得函数的周期，再由 $x\in[0,3]$时，$f(x)=\log_2(x+1)$ 求解.

【解答】解：由 $f(x)$ 为奇函数且 $f(x+2)=f(4-x)$，得 $f(6+x)=f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(12+x)=-f(6+x)=-[-f(x)]=f(x)$，

则 $f(x)$ 是以 12 为周期的周期函数，

$\therefore f(2019)=f(12\times168+3)=f(3)$.

$\because$ 当 $x\in[0, 3]$，$f(x)=\log_2(x+1)$，

$\therefore f(2019)=f(3)=\log_2 4=2$.

故答案为：2.

【点评】本题考查函数的奇偶性、周期性与对称性的应用，是中档题.

三．解答题（共 7 小题）

17. 在△ABC中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 b，c 的值；

（Ⅱ）求 $\sin(B+C)$ 的值.

【分析】（1）利用余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，代入已知条件即可得到关于 b 的方程，解方程即可；

（2）$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，根据正弦定理可求出 $\sin A$.

【解答】解：（1）$\because a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=9+(b-2)^2-2\times3\times(b-2)\times(-\frac{1}{2})$，

$\therefore b=7$，$\therefore c=b-2=5$；

（2）在△ABC中，$\because \cos B=-\frac{1}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由正弦定理有：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\therefore \sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

$\therefore \sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

【点评】本题考查了正弦定理余弦定理，属基础题.

18．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2+a_8=82$，$S_{41}=S_9$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求S_n的最大值．

【分析】（1）根据公式$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$，列方程求解即可．

（2）由S_n的表达式，根据二次函数的性质处理．

【解答】解：（1）$a_2+a_8=82=2a_5$，$\therefore a_5=41$

由$S_{41}=S_9$得$41a_{21}=9a_5 \Rightarrow a_2=9$，得：$d=\frac{a_{21}-a_5}{21-5}$，解得$d=-2$（4分）

故$a_n=a_5+(n-5)d=41+2(n-5)=51-2n$，

由（1），得$S_n=-n^2+50n=-(n-25)^2+625$．（10分）

由二次函数的性质，当$n=25$时S_n有最大值625．（12分）

【点评】本题考查等差数列的通项公式，等差数列的前n项和公式，属基础题．

19．S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$

（*I*）求$\{a_n\}$的通项公式：

（II）设$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和．

【分析】（*I*）根据数列的递推关系，利用作差法即可求$\{a_n\}$的通项公式：

（II）求出$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$，利用裂项法即可求数列$\{b_n\}$的前$n$项和．

【解答】解：（*I*）由$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，可知$a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}+3$

两式相减得$a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)=4a_{n+1}$，

即$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$，

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=2$，

$\because$当$n=1$时，$a_1^2+2a_1=4a_1+3$，

$\therefore a_1=-1$（舍）或$a_1=3$，

则$\{a_n\}$是首项为3，公差$d=2$的等差数列，

∴$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$；

（Ⅱ）∵$a_n=2n+1$，

∴$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

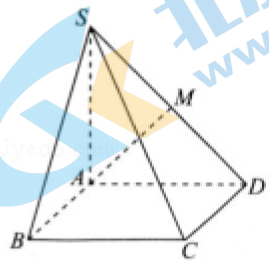
∴数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$.

【点评】本题主要考查数列的通项公式以及数列求和的计算，利用裂项法是解决本题的关键.

20．如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$底面 $ABCD$，$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $SA=1$，点 M 是 SD 的中点.

（1）求证：$SC\perp AM$；

（2）求平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小.



【分析】（1）以 A 为原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AS 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能证明 $SC\perp AM$.

（2）求出平面 SAB 的法向量和平面 SCD 的法向量，利用向量法能求出平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小.

【解答】解：（1）证明：在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$底面 $ABCD$，

$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，且 $SA=1$，点 M 是 SD 的中点.

以 A 为原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，AS 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $S(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$A(0,0,0)$，$M(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{SC}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{AM}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，

∴$SC\perp AM$.

解：（2）平面 SAB 的法向量 $\overrightarrow{n}$=（0，1，0），

D（0，1，0），$\overrightarrow{SC}$=（1，1，﹣1），$\overrightarrow{SD}$=（0，1，﹣1），

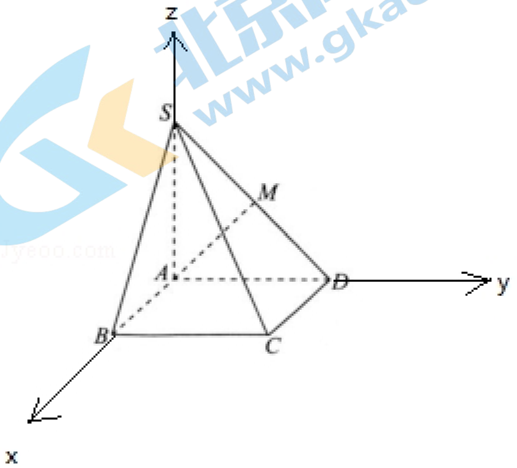
设平面 SCD 的法向量 $\overrightarrow{m}$=（x，y，z），

则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{SC}=x+y-z=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{SD}=y-z=0\end{cases}$，取 $y=1$，得 $\overrightarrow{m}$=（0，1，1），

设平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\theta=45°$．

∴平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小为 45°．



【点评】本题考查线线垂直的证明，考查二面角的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

21．已知函数 $f(x)=2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$x\in R$，其中 $\overrightarrow{a}$=（$2\cos x$，$-\sqrt{3}\sin 2x$），$\overrightarrow{b}$=（$\cos x$，1），

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间；

（2）在△ABC 中，$f(A)=-2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求△$ABC$ 中的面积．

【分析】（1）平面向量的数量积、三角函数图象的性质可得：$f(x)=4\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+2$，由 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，则易得：$f(x)$ 的最小正周期为 π，单调减区间为：$[k\pi-\dfrac{\pi}{6}，k\pi+\dfrac{\pi}{3}]$，$k\in Z$；

（2）由三角函数求值及三角形的面积公式可得：$A=\dfrac{\pi}{3}$，又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，所以 $\dfrac{1}{2}|AB||AC|=3$，即 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB||AC|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，得解．

【解答】解：（1）因为$\vec{a}$=（$2\cos x$，$-\sqrt{3}\sin 2x$），$\vec{b}$=（$\cos x$，1），

所以 $f(x)=2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4\cos^2x-2\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x+2$

$=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$，

由 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi$，

解得：$k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 π，单调减区间为：$[k\pi-\frac{\pi}{6}，k\pi+\frac{\pi}{3}]$，$k\in Z$；

（2）因为在△ABC中，$f(A)=-2$，

所以 $\cos\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，

所以 $2A+\frac{\pi}{3}=\pi$，

即 $A=\frac{\pi}{3}$，

又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，

所以$\frac{1}{2}|AB||AC|=3$，

即$|AB||AC|=6$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故△ABC中的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【点评】本题考查了平面向量的数量积、三角函数图象的性质及三角形的面积公式，属中档题.

22．设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若对于所有的自然数 n，都有 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，证明$\{a_n\}$是等差数列．

【分析】本小题考查等差数列的证明方法，数学归纳法及推理论证能力．

等差数列的证明是数列的常见题型，本题可用两种方法：

一是用数学归纳法，适用于理科，因为只要能证明$\{a_n\}$的通项公式满足等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$（$n\in N$），问题就可得证，这显然是与自然序号 n 有关的命题，故可以选择数学归纳法；

二是数列用定义证明，即证明 $a_n-a_{n-1}=m$（常数），利用已知前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，首先利用 $a_n=s_n-s_{n-1}$表示出 a_n，然后可以计算 $a_n-a_{n-1}=m$ 证明之，

【解答】证明：法一：

令 $d=a_2-a_1$．

下面用数学归纳法证明 $a_n=a_1+(n-1)d$（$n\in N$）．

（1）当 $n=1$ 时上述等式为恒等式 $a_1=a_1$．

当 $n=2$ 时，$a_1+(2-1)d=a_1+(a_2-a_1)=a_2$，等式成立．

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant 2$）时命题成立，$a_k=a_1+(k-1)d$．由题设，有

$S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}$，$S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}$，又 $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$

$\therefore (k+1)\dfrac{(a_1+a_{k+1})}{2}=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}+a_{k+1}$

把 $a_k=a_1+(k-1)d$ 代入上式，得

$(k+1)(a_1+a_{k+1})=2ka_1+k(k-1)d+2a_{k+1}$．

整理得 $(k-1)a_{k+1}=(k-1)a_1+k(k-1)d$．

$\because k\geqslant 2$，$\therefore a_{k+1}=a_1+kd$．即当 $n=k+1$ 时等式成立．

由（1）和（2），等式对所有的自然数 n 成立，从而$\{a_n\}$是等差数列

法二：

当 $n\geqslant 2$ 时，由题设，$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$．

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$

同理有

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

从而

$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-n(a_1+a_n)+\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$,

整理得 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}=a_2-a_1$

从而 $\{a_n\}$ 是等差数列.

【点评】 等差数列的证明在高考中常见，是高考的重要题型，本题就是全国高考题.

等差数列的证明最常用的有两种方法：1．用定义证明，即证明 $a_n-a_{n-1}=m$（常数），有时题目很简单，很快可求证，但有时则需要一定的变形技巧，这需要多做题，慢慢就会有感觉的，本题就有些复杂． 2．用等差数列的性质证明，即证明 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$，此法不适用于本题，对于给出数列通项公式的证明，此法比较方便.

另外本题因为是与自然序号相关的命题，所以法一运用了数学归纳法，尽管繁琐，但思路清晰.

23．已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.

（1）求 $f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线方程；

（2）求证：$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上仅有 2 个零点.

【分析】（1）$f(0)=0$．切点为（0，0）．$f'(x)=e^x+\sin x$．可得 $f'(0)=1$，利用点斜式即可得出切线方程.

（2）$f'(x)=e^x+\sin x$．分类讨论：$x\geqslant 0$ 时，利用导数研究其单调性可得 $f'(x)\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有一个零点 0．$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f''(x)=e^x+\cos x>0$．可得函数 $f'(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递增，进而得出 $f(x)$ 零点的个数.

【解答】 解：（1）$f(0)=0$．∴切点为（0，0）．

$f'(x)=e^x+\sin x$.

∴$f'(0)=1$，

∴$f(x)$ 在点（0，$f(0)$）处的切线方程为：$y-0=x-0$，化为：$x-y=0$.

证明：（2）$f'(x)=e^x+\sin x$.

$x\geq 0$ 时，$e^x\geq 1$，∴$f'(x)\geq 0$，

∴函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，而 $f(0)=0$，

∴函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上只有一个零点 0.

$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$f''(x)=e^x+\cos x>0$.

∴函数 $f'(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递增，

而$f'(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}-1<0$，$f'(0)=1>0$，

∴存在唯一实数 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$，使得 $f'(x_0)=e^{x_0}+\sin x_0=0$，

且函数 $f(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},x_0)$上单调递减，$x\in(x_0,0)$上单调递增.

又$f(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}>0$，$f(x_0)=e^{x_0}-\cos x_0=-\sin x_0-\cos x_0<0$，$f(0)=0$.

∴函数 $f(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},x_0)$上存在唯一零点，而在 $x\in[x_0,0)$上无零点.

综上可得：$f(x)$ 在$(-\frac{\pi}{2},+\infty)$上仅有 2 个零点.

【点评】本题考查了利用导数研究函数的单调性极值与最值、方程与不等式的解法、分类讨论方法，考查了推理能力与计算能力，属于难题.