2023 北京景山学校高三（上）期中

数　　学

注意事项

（1）请用蓝色或黑色圆珠笔、钢笔或签字笔答卷，不得用铅笔或红笔答卷.

（2）认真审题，字迹工整，卷面整洁.

（3）本试卷共 5 页，共三道大题，21 道小题.考试时间 120 分钟.

（4）请将选择题的答案填涂在机读卡上，其余试题答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x|x\le 1\}$，$B=\{-3,1,2,4\}$，则 $A\cap B$ 等于（　）

A. $\{-3,1\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{-3,1,2\}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=2-\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

3. 下列函数中，在定义域上为增函数且为奇函数的是（　）

A. $y=x+2$　　B. $y=x+x^3$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=2^x$

4. 已知向量 $\vec{a}=(-2,1)$，$\vec{b}=(m,3)$.若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$（　）

A. 6　　B. -6　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 经过原点和点 $(3,1)$ 且圆心在直线 $3x+y-5=0$ 上的圆的方程为（　）

A. $(x-5)^2+(y+10)^2=125$　　B. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

C. $(x-3)^2+y^2=9$　　D. $(x+1)^2+(y-2)^2=5$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\tan A>\sqrt{3}$”是“$A>\dfrac{\pi}{3}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，$b=\ln\dfrac{1}{2}$，$c=\sin\dfrac{1}{2}$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

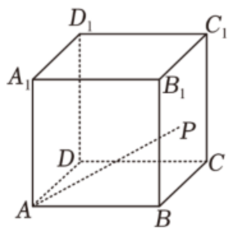
8. 已知直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2-4x+y^2=0$ 相交于 M，N 两点，且 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$，那么实数 k 的取值范围是（　）

A. $-4\leqslant k\leqslant -\dfrac{1}{3}$　　B. $0\leqslant k\leqslant \dfrac{4}{3}$　　C. $k\geqslant 0$ 或 $k\leqslant -\dfrac{4}{3}$　　D. $-\dfrac{4}{3}\leqslant k\leqslant 0$

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调，且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，则 ω 的取值不可能为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　　　B. $\frac{7}{5}$　　　　C. $\frac{9}{5}$　　　　D. $\frac{12}{7}$

10. 如图，点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上一个动点，则以下说法中不正确的是（　）



A. 当 P 在平面 BCC_1B_1 上运动时，四棱锥 $P-AA_1D_1D$ 的体积不变

B. 当 P 在线段 AC 上运动时，D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

C. 若 F 是 A_1B_1 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 上运动时，不存在点 P 满足 $PF//$ 平面 B_1CD_1

D. 若点 P 在底面 $ABCD$ 上运动，则使直线 A_1P 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$ 的点 P 的轨迹为圆上的一段弧

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是________.

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在 C 上，且 $|PF_1|+|PF_2|=3|F_1F_2|$，则椭圆 C 的离心率为_________.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+2}=2a_n$，$S_2=3a_1=3$，则 $a_5=$__________；若 $S_m>30$，则 m 的最小值为__________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a,x\le 1\\ -a(x-2)^2+1,x>1\end{cases}$，若 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，则 a 的取值范围是__________.

15. 已知直线 $l_1:x+y-2=0$ 与 $l_2:x-2y+1=0$ 相交于点 P，直线 l_1 与 x 轴交于点 P_1，过点 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1，过点 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的工线交直线 l_2 于点 Q_2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 P_1，Q_1，P_2，Q_2，…，记点 $P_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$，给出下列四个结论：

①点 $Q_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$；　　②数列 $\{x_{2n}\}$ 单调递减；

③ $|PP_n|^2=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$；　　④数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足：$2S_{n+1}+S_n=4n+3$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

（1）求 B 的大小；

（2）若 $c=\sqrt{3}+1$，再从下列三个条件中，选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件① $\sin A=\frac{1}{2}$；条件② $b=2$；条件③ $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

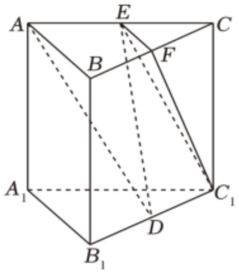
注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x+a$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$.

（1）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $x\in[0,m]$，且 $f(x)\geq 0$，求实数 m 的最大值.

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AA_1=AB=AC=2$，D，E，F 分别是棱 B_1C_1，AC，BC 的中点.



（1）证明：$AD//$ 平面 C_1EF；

（2）求平面 ADE 与平面 C_1EF 夹角的余弦值.

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，焦距为 $2\sqrt{5}$，点 $B(0,2)$ 在椭圆上.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $P(1,0)$ 的任意直线与椭圆 C 交于 M，N（不同于 A_1，A_2）两点，直线 A_1M 的斜率为 k_1，直线 A_2N 的斜率为 k_2.试问是否存在常数 λ，使得 $k_1=\lambda k_2$？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(ax)-\frac{1}{3}x^3(a\neq 0)$.

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）当 $a=1$ 时，设 $g(x)=f(x)+t$，若 $g(x)$ 有两个不同的零点，求参数 t 的取值范围.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列，$a_1=a$，$a_2=b$，且对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i，$a_j(i<j)$，在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 $a_k(j<k<2j)$，使得 $a_k=2a_j-a_i$.

（1）若 $a=3$，$b=5$，求 a_3；

（2）若 $a=b=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为 0；

（3）若 $a<b$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】A

【分析】应用集合的交运算求结果.

【详解】由题设 $A\bigcap B=\left\{x\middle|x\le 1\right\}\cap\{-3,1,2,4\}=\{-3,1\}$.

故选：A

2.【答案】D

【分析】根据复数除法的运算法则和复数模的计算公式进行求解即可.

【详解】$\mathrm{i}\cdot z=2-\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}+1}{-1}=-1-2\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，

故选：D

3.【答案】B

【分析】根据指数函数、正弦函数及简单幂函数的性质及奇偶性定义判断各项函数的单调性、奇偶性.

【详解】A：由 $y=f(x)=x+2$ 在定义域 R 上递增，但 $f(-x)=-x+2\ne -f(x)$，不满足；

B：由 $y=f(x)=x+x^3$ 在定义域 R 上递增，且 $f(-x)=-x-x^3=-f(x)$，满足；

C：由 $y=\sin x$ 在定义域 R 上不为增函数，不满足；

D：由 $y=f(x)=2^x$ 在定义域 R 上递增，但 $f(-x)=2^{-x}\ne -f(x)$，不满足.

故选：B

4.【答案】B

【分析】由向量平行的坐标表示列方程求参数即可.

【详解】由题设 $\dfrac{m}{-2}=\dfrac{3}{1}\Rightarrow m=-6$.

故选：B

5.【答案】A

【分析】直接验证圆心是否在已知直线上以及圆是否过原点与点 $(3,1)$.

【详解】由已知只有选项 A 中圆心 $(5,-10)$ 和 B 中圆心 $(1,2)$ 在已知直线上，CD 的圆心不在已知直线上，

代入原点和点 $(3,1)$ 的坐标得，只有 A 中圆过原点和点 $(3,1)$，

故选：A.

6.【答案】A

【分析】由三角形内角的性质，结合正切函数的性质及充分、必要性定义判断推出关系.

【详解】由题设 $A\in(0,\pi)$，若 $\tan A>\sqrt{3}$，则 $\dfrac{\pi}{3}<A<\dfrac{\pi}{2}$；若 $A>\dfrac{\pi}{3}$，则 $\tan A>\sqrt{3}$ 或 $\tan A<0$ 或正切

值不存在；

所以“$\tan A>\sqrt{3}$”是“$A>\frac{\pi}{3}$”的充分不必要条件.

故选：A

7.【答案】D

【分析】利用中间值$0,1$可以比较三者的大小关系.

【详解】因为$a=e^{\frac{1}{2}}>e^0=1$，$b=\ln\frac{1}{2}<\ln 1=0$，$c=\sin\frac{1}{2}\in(0,1)$，

所以$a>c>b$

故选：D.

8.【答案】D

【分析】

利用弦长公式，建立关于k的不等式，直接求解.

【详解】圆化简为标准方程为$(x-2)^2+y^2=4$，圆心$(2,0)$到直线$y=kx+1$的距离$d=\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$$|MN|=2\sqrt{4-\left(\frac{2k+1}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}\geq 2\sqrt{3},$$

解得：$-\frac{4}{3}\leq k\leq 0$.

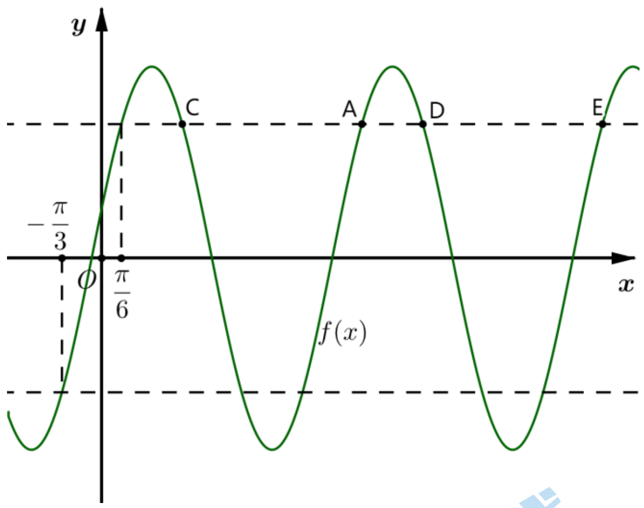
故选：D

9.【答案】B

【分析】由已知易得$T\geq\pi$、$f(-\frac{\pi}{12})=0$，结合$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$，利用正弦型函数的图象讨论$x=\frac{4\pi}{3}$不同对应点求$\omega$的取值，即可得答案.

【详解】由$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上单调，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，故$\frac{T}{2}\geq\frac{\pi}{6}-(-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T\geq\pi$，

而$\frac{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=-\frac{\pi}{12}$，则$f(-\frac{\pi}{12})=0$，又$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$，如下图依次讨论$x=\frac{4\pi}{3}$对应为点$C,A,D,E$四种情况，



若$\frac{4\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3})=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，则$\omega=\frac{3}{5}$，满足$T\geq\pi$；

若$\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=T=\frac{2\pi}{\omega}$，则$\omega=\frac{12}{7}$，满足$T\geq\pi$；

由$\frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{3\pi}{4}$，若$\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{3}{4}T=\frac{3\pi}{2\omega}$，则$\omega=\frac{9}{5}$，满足$T\geq\pi$；

若$\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=2T=\frac{4\pi}{\omega}$，则$\omega=\frac{24}{7}$，不满足$T\geq\pi$，其它情况均不符合；

综上，B 不可能，A、C、D 可能.

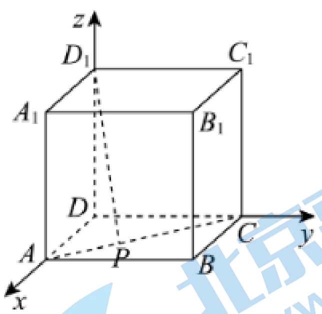
故选：B

10.【答案】C

【分析】根据棱锥体积公式即判断 A，建立空间直角坐标系，向量法求线线角、线面角，及利用法向量判断线面关系，即可判断 BCD.

【详解】当P在平面BCC_1B_1上运动时，P到AA_1D_1D的距离恒为 2，故四棱锥$P-AA_1D_1D$的体积不变，A 对；

如下图示空间直角坐标系，$D_1(0,0,2),P(x,2-x,0),A_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$，



所以$\overrightarrow{D_1P}=(x,2-x,-2),\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$且$x\in[0,2]$，

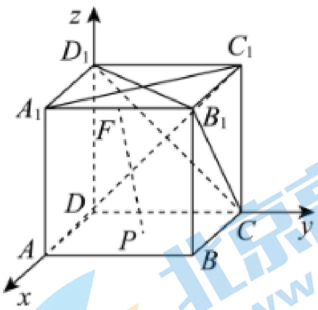
设D_1P与A_1C_1所成角为θ且$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则

$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1P},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle|=\dfrac{4|1-x|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{x^2+(2-x)^2+4}}=\dfrac{|1-x|}{\sqrt{(x-1)^2+3}}$，

当 $x\neq1$ 时，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{(x-1)^2}}}$ 且 $x\in[0,1)\cup(1,2]$，可得 $\cos\theta\in(0,\dfrac{1}{2}]$；当 $x=1$ 时，$\cos\theta=0$；

所以 $\cos\theta\in[0,\dfrac{1}{2}]$，故 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，B 对；

如下图示空间直角坐标系，$D_1(0,0,2),C(0,2,0),B_1(2,2,2),A(2,0,0),C_1(0,2,2)$，



所以 $\overrightarrow{D_1C}=(0,2,-2),\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2),\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$，则 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{D_1C}=\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{D_1C},\overrightarrow{AC_1}\perp\overrightarrow{CB_1}$，又 $D_1C\cap CB_1=C$ 且 $D_1C,CB_1\subset$ 面 CB_1D_1，

所以 $AC_1\perp$ 面 CB_1D_1，即 $\overrightarrow{AC_1}$ 是面 CB_1D_1 的一个法向量，

由 $F(2,1,2),P(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{FP}=(x-2,y-1,-2)$，

若 $PF//$ 平面 B_1CD_1，则 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-2(x-2)+2(y-1)-4=0$，即 $x-y+1=0$，

显然，直线 $x-y+1=0$ 与底面 $ABCD$ 有公共点，即存在点 P 满足 $PF//$ 平面 B_1CD_1，C 错；

若点 P 在底面 $ABCD$ 上运动，设 $P(x,y,0)$，$A_1(2,0,2)$，则 $\overrightarrow{A_1P}=(x-2,y,-2)$，

又面 $ABCD$ 的一个法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$，则直线 A_1P 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，

所以 $|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{A_1P}\rangle|=|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}}{|\vec{m}||\overrightarrow{A_1P}|}|=\dfrac{2}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，整理得 $(x-2)^2+y^2=4$，

所以 P 的轨迹是以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，其在底面 $ABCD$ 上轨迹为圆上的一段弧，D 对.

故选：C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$(1,3]$

【分析】根据偶次根式被开方数大于等于零，和对数的真数大于零即可求出答案.

【详解】解：由题意得 $\begin{cases}3-x\geq0,\\x-1>0,\end{cases}$，解得 $1<x\leq3$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,3]$，

故答案为：$(1,3]$.

12.【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】根据椭圆的定义及性质有$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，结合已知条件即可求离心率.

【详解】由$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，又$|PF_1|+|PF_2|=3|F_1F_2|$，

所以$2a=6c\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$

13.【答案】 ①. 4 ②. 8

【分析】求出a_1,a_2，再由递推关系得出数列$\{a_n\}$的奇数与偶数项分别成等比数列，从而可得数列的前几项，利用$\{S_n\}$是递增数列，求出和在30左右的S_n后可得m的最小值.

【详解】$\because S_2=3a_1=3$，$\therefore a_1=1$，$a_2=2$，

$\because a_{n+2}=2a_n$，$\therefore \{a_n\}$的奇数与偶数项分别成等比数列，$a_5=a_1\cdot 2^2=4$，$\{a_n\}$各项均为正，

因此$\{S_n\}$是递增数列，数列$\{a_n\}$的前几项依次为：$1,2,2,4,4,8,8,16,16$,

$S_7=1+2+2+4+4+8+8=29$，$S_8=S_7+a_8=29+16=45>30$，

$\therefore m$的最小值是8，

故答案为：4；8

14.【答案】$0<a\le 2$

【分析】由分段函数解析式，结合一次函数、二次函数性质分别求出对应区间的值域，结合已知列不等式求参数范围.

【详解】由$y=-x+a$在$(-\infty,1]$上递减，且值域为$[a-1,+\infty)$，又$f(x)$的值域为$(-\infty,+\infty)$，

对于$y=-a(x-2)^2+1$开口向下，即$a>0$，在$(1,+\infty)$上值域为$(-\infty,1]$，

所以$a-1\le 1$，即$a\le 2$，故$0<a\le 2$.

故答案为：$0<a\le 2$

15.【答案】①③

【分析】由题设$P_1,\cdots,P_n$在直线l_1上，$Q_1,\cdots,Q_n$在直线l_2上，设$P_n(x_n,y_n)$，依据题设各点的关系推得$x_{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_n$，并构造等比数列，进而求得$x_n=1+(-\frac{1}{2})^{n-1}$，最后依次判断各项正误.

【详解】由题设，$P_1(2,0),Q_1(2,\frac{3}{2}),P_2(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),Q_2(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$，故①对；

设$P_n(x_n,y_n)$，则$Q_n(x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$，进而有$P_{n+1}(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$，即$x_{n+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_n$，

所以 $x_{n+1}-1=-\frac{1}{2}(x_n-1)$，故 $\{x_n-1\}$ 是以 1 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，则 $x_n=1+(-\frac{1}{2})^{n-1}$，

对于 $\{x_{2n}\}$，$x_{2n}=1+(-\frac{1}{2})^{2n-1}=1-2\cdot\frac{1}{4^n}$，易知数列 $\{x_{2n}\}$ 单调递增，②错；

由两直线交点 $P(1,1)$ 和 $P_n(x_n,2-x_n)$，则 $|PP_n|^2=(x_n-1)^2+(1-x_n)^2=2(x_n-1)^2=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，③对；

由 $S_n=n+\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=n+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^n$，故 $2S_{n+1}=2n+\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^n$，所以 $2S_{n+1}+S_n=3n+4$，④错；

故答案为：①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16.【答案】(1) $B=\frac{\pi}{4}$；

(2) 选①或③，三角形面积为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

【分析】(1) 由余弦定理求得得 B；

(2) 选①，由 $\sin B>\sin A$ 得三角形只有一解，然后求得 $\sin C$，由正弦定理求得 a，从而可得三角形面积；选②，分析得三角形有两解；选③，求出 $\sin A$ 后，同选①计算.

【小问 1 详解】

$\because a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$，$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$；

【小问 2 详解】

选①，$\sin A=\frac{1}{2}$，因为 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$，由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $b>a$，所以 $B>A$，因此 $A=\frac{\pi}{6}$，

$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$ 得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=2$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$；

选②，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}>b$，$\therefore C>B$，

又 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\therefore C$ 角可能为锐角也可能为钝角，三角形是两解，不合题意；

选③，$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，而 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$，$\sin A=\dfrac{1}{2}$，以下同选①.

17.【答案】（1）$a=0$，最小正周期为 $T=\pi$；

（2）$\dfrac{2\pi}{3}$.

【分析】（1）由倍角正余弦公式、辅助角公式有 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1+a$，结合已知求参数，进而求正弦型函数的最小正周期；

（2）根据正弦型函数的性质有 $-\dfrac{\pi}{6}<2m-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$ 求参数范围，即可得最大值.

【小问 1 详解】

由 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1+a=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1+a$，且 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}+1+a=3$，

所以 $a=0$，故 $f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+1$，其最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问 2 详解】

由 $x\in[0,m]$，显然 $f(0)=0$，结合正弦函数的性质，只需 $2\sin(2m-\dfrac{\pi}{6})+1\ge 0$，即

$\sin(2m-\dfrac{\pi}{6})\ge-\dfrac{1}{2}$，

所以 $-\dfrac{\pi}{6}<2m-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{6}$，可得 $0<m\le\dfrac{2\pi}{3}$，即 m 的最大值为 $\dfrac{2\pi}{3}$.

18.【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{1}{5}$.

【分析】（1）连接 FD,CD，且 CD,FC_1 交于 G 点，易得四边形 FDC_1C 为矩形，即 G 是 CD 中点，连接 EG，中位线性质有 $EG//AD$，再由线面平行的判定证结论；

（2）构建空间直角坐标系，向量法求面面角的余弦值.

【小问 1 详解】

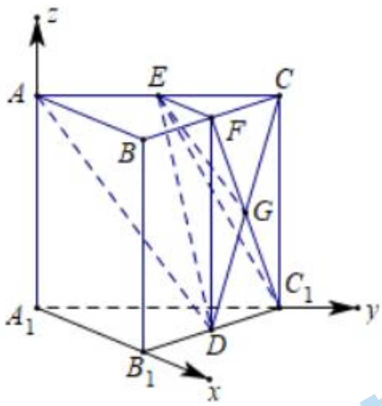
连接 FD,CD，且 CD,FC_1 交于 G 点，又 $AA_1\perp$ 面 ABC，D、F 分别是棱 B_1C_1，BC 的中点，

所以 $DF//CC_1//AA_1, DF=CC_1$，即 DF,CC_1 都与面 ABC 垂直，$B_1C_1\subset$ 面 ABC，

所以 $DF \perp B_1C_1, CC_1 \perp B_1C_1$，故四边形 FDC_1C 为矩形，即 G 是 CD 中点，连接 EG，

又 E 是棱 AC 的中点，在 $\triangle ADC$ 中 $EG // AD$， $EG \subset$ 面 C_1EF， $AD \not\subset$ 面 C_1EF，

所以 $AD //$ 平面 C_1EF；



【小问 2 详解】

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形且 $AB = AC$，故 $\triangle A_1B_1C_1$ 也为等腰直角三角形且 $\angle B_1A_1C_1 = 90°$，

又 $AA_1 \perp$ 面 ABC，构建如图空间直角坐标系 $A_1 - xyz$，

则 $A(0,0,2), D(1,1,0), E(0,1,2), F(1,1,2), C_1(0,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AD} = (1,1,-2), \overrightarrow{AE} = (0,1,0), \overrightarrow{EF} = (1,0,0), \overrightarrow{EC_1} = (0,1,-2)$，

若 $\vec{m} = (x,y,z)$ 是面 ADE 的一个法向量，则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = x + y - 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AE} = y = 0 \end{cases}$，取 $z = 1$，则 $\vec{m} = (2,0,1)$，

若 $\vec{n} = (a,b,c)$ 是面 C_1EF 的一个法向量，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = a = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = b - 2c = 0 \end{cases}$，取 $c = 1$，则 $\vec{n} = (0,2,1)$，

所以 $|\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = |\dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}| = \dfrac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$，平面 ADE 与平面 C_1EF 夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{5}$.

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(2) 存在，$\lambda = \dfrac{1}{2}$.

【分析】(1) 根据题设及椭圆参数关系列方程求椭圆参数，即可得椭圆方程；

(2) 令 $MN: x = ty + 1$，联立椭圆并应用韦达定理求得 $y_M + y_N = -\dfrac{8t}{9 + 4t^2}$、$y_My_N = -\dfrac{32}{9 + 4t^2}$，进而表示出 $x_M + x_N$、x_Mx_N，令 A_1N 的斜率为 k，结合椭圆性质易得 $k = -\dfrac{4}{9k_2}$，且 $k \cdot k_1 = -\dfrac{2}{9}$，即可判断存在性.

【小问 1 详解】

由题设$\begin{cases}2c=2\sqrt{5}\\ \dfrac{4}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=9\\ b^2=4\end{cases}$，故$C$的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

【小问 2 详解】

由题意，直线MN不与x轴重合，令$MN:x=ty+1$，联立椭圆方程得$4(ty+1)^2+9y^2=36$，

所以$(9+4t^2)y^2+8ty-32=0$，显然$\Delta>0$，则$y_M+y_N=-\dfrac{8t}{9+4t^2}$，$y_My_N=-\dfrac{32}{9+4t^2}$，

所以$x_M+x_N=t(y_M+y_N)+2=\dfrac{18}{9+4t^2}$，$x_Mx_N=t^2y_My_N+t(y_M+y_N)+1=\dfrac{9(1-4t^2)}{9+4t^2}$，

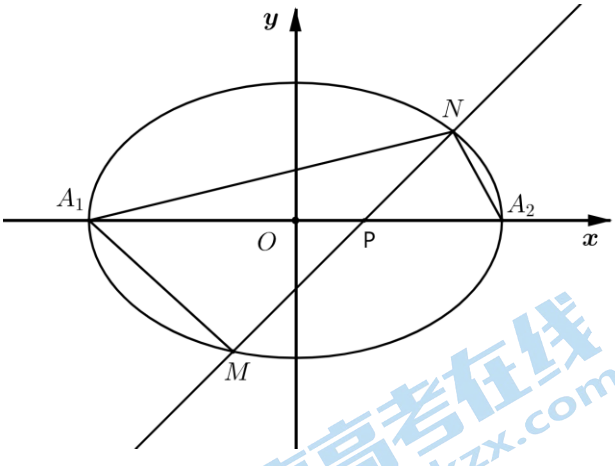
令A_1N的斜率为k，则$k\cdot k_2=\dfrac{y_N}{x_N+3}\cdot\dfrac{y_N}{x_N-3}=\dfrac{y_N^2}{x_N^2-9}$，而$\dfrac{x_N^2}{9}+\dfrac{y_N^2}{4}=1$，即$\dfrac{y_N^2}{x_N^2-9}=-\dfrac{4}{9}$，所以

$k=-\dfrac{4}{9k_2}$，

又$k\cdot k_1=\dfrac{y_M}{x_M+3}\cdot\dfrac{y_N}{x_N+3}=\dfrac{y_My_N}{x_Mx_N+3(x_M+x_N)+9}=\dfrac{-\dfrac{32}{9+4t^2}}{\dfrac{9(1-4t^2)}{9+4t^2}+\dfrac{54}{9+4t^2}+9}$

$=\dfrac{-32}{9(1-4t^2)+54+81+36t^2}=-\dfrac{2}{9}$，

所以$-\dfrac{4k_1}{9k_2}=-\dfrac{2}{9}\Rightarrow\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{2}k_2$，即存在$\lambda=\dfrac{1}{2}$.



20.【答案】(1) $21x-12y-11=0$；

(2) 答案见解析；　(3) $t>\dfrac{1}{3}$.

【分析】(1) 利用导数的几何意义求切线方程；

（2）由题设 $f'(x)=\frac{1-x^3}{x}$，讨论 $a<0$、$a>0$，结合对应的定义域及其导数符号判断单调性；

（3）问题化为 $t=\frac{1}{3}x^3-\ln x$ 在在 $x\in(0,+\infty)$ 有两个不同根，利用导数研究右侧的值域范围，即可得参数范围.

【小问 1 详解】

由题设 $f(x)=\ln(2x)-\frac{1}{3}x^3$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-x^2$，故 $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{24}$，$f'(\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$，

所以在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y+\frac{1}{24}=\frac{7}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $21x-12y-11=0$.

【小问 2 详解】

由 $f'(x)=\frac{1}{x}-x^2=\frac{1-x^3}{x}$，

当 $a<0$，定义域为 $x\in(-\infty,0)$，此时 $1-x^3>0$，故 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减；

当 $a>0$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$，

若 $x\in(0,1)$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增；

若 $x\in(1,+\infty)$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减；

【小问 3 详解】

由题设，$f(x)=\ln x-\frac{1}{3}x^3$，故 $g(x)=\ln x-\frac{1}{3}x^3+t$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 有两个不同零点，

所以 $t=\frac{1}{3}x^3-\ln x$ 在在 $x\in(0,+\infty)$ 有两个不同根，

令 $h(x)=\frac{1}{3}x^3-\ln x$，则 $h'(x)=\frac{x^3-1}{x}$，

在 $x\in(0,1)$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，

在 $x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，且 $h(1)=\frac{1}{3}$，

x 趋向于 0 或 $+\infty$ 时 $h(x)$ 都趋向于 $+\infty$，故只需 $t>\frac{1}{3}$，满足题设.

21.【答案】（1）$a_3=7$；

（2）证明见解析；（3）$a_n=a+(n-1)(b-a),n=1,2,3,\cdots$

【分析】（1）由题设取 $i=1,j=2$，代入计算可得；

（2）利用反证法证明即可；

（3）利用反证法，先证 $\{a_n\}$ 是递增数列，即 $\forall n\in\mathrm{N}^*,a_n<a_{n+1}$ 恒成立，再证 $a_n=a+(n-1)(b-a),n=1,2,3,\cdots$，即可得通项公式.

【小问 1 详解】

取 $i=1, j=2$，则存在 $a_k(2<k<4)$ 使 $a_3=2a_2-a_1=2\times5-3=7$.

【小问 2 详解】

假设 $\{a_n\}$ 中仅有有限项为 0，不妨设 $a_m=0$，当 $n>m$ 时 a_n 均不为 0，则 $m\geq2$，

取 $i=1, j=m$，则存在 $a_k(m<k<2m)$，使 $a_k=2a_m-a_1=0$，与 $a_k\neq0$ 矛盾，

所以数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为 0；

【小问 3 详解】

由 $a<b$，先证 $\{a_n\}$ 是递增数列，即 $\forall n\in\mathrm{N}^*, a_n<a_{n+1}$ 恒成立，

否则，存在最小正整数 n_0，使 $a_{n_0}\geq a_{n_0+1}$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{n_0}$，显然 $n_0\geq2$，

取 $i=1,2,\cdots,n_0-1$， $j=n_0$，则存在 $a_k(n_0<k<2n_0)$ 使 $a_k=2a_{n_0}-a_i$，

因为 $2a_{n_0}-a_1>2a_{n_0}-a_2>\cdots>2a_{n_0}-a_{n_0-1}>a_{n_0}$，所以 $2a_{n_0}-a_1, 2a_{n_0}-a_2,\cdots,2a_{n_0}-a_{n_0-1}$ 恰对应为

$a_{n_0+1}, a_{n_0+2},\cdots,a_{2n_0-1}$，

所以 $a_{n_0+1}>a_{n_0}$，与 $a_{n_0+1}\leq a_{n_0}$ 矛盾，故 $\{a_n\}$ 是递增数列；

再证 $a_n=a+(n-1)(b-a), n=1,2,3,\cdots$，记 $d=b-a$，即证 $a_n=a+(n-1)d, n=1,2,3,\cdots$，

当 $n=1,2$ 时，易知结论成立，

假设存在最小正整数 m_0，使得 $a_n=a+(n-1)d$ 对任意 $1\leq n\leq m_0$ 恒成立，

但 $a_{m_0+1}\neq a+m_0d$，则 $m_0\geq2$，

取 $i=1,2,\cdots,m_0-1$， $j=m_0$，存在 $a_k(m_0<k<2m_0)$ 使 $a_k=2a_{m_0}-a_i$，

因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_1<a_2<\cdots<a_{m_0}<a_{m_0+1}<\cdots<a_{2m_0-1}$，

则 $2a_{m_0}-a_{m_0-1},\cdots,2a_{m_0}-a_2, 2a_{m_0}-a_1$ 恰对应为 $a_{m_0+1}, a_{m_0+2},\cdots,a_{2m_0-1}$，

所以 $a_{m_0+1}=2a_{m_0}-a_{m_0-1}=2[a+(m_0-1)d]-[a+(m_0-2)d]=a+m_0d$，与 $a_{m_0+1}\neq a+m_0d$ 矛盾，

所以 $a_n=a+(n-1)(b-a), n=1,2,3,\cdots$.

【点睛】思路点睛：第二、三问，利用反证思想及数学归纳证数列单调性.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！