2020 北京西城高二（上）期末

数　　学

2020.1

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1(a>0)$的一个焦点为$(2,0)$，则 a 的值为（　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. 6　　D. 8

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+2(n\in N*,n\geq 2)$，则$a_3=$（　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3. 已知命题 $p\exists x<1$，$x^2\leq 1$，则$\neg p$ 为（　）

A. $\forall x\geq 1$，$x^2\leq 1$　　B. $\exists x<1$，$x^2>1$

C. $\forall x$ 和1，$x^2>1$　　D. $\exists x\geq 1$，$x^2>1$

4. 已知a，$b\in R$，若 $a<b$，则（　）

A. $a<2b$　　B. $ab<b^2$　　C. $a^2<b^2$　　D. $a^3<b^3$

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,x,y)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，那么$|\boldsymbol{b}|=$（　）

A. $3\sqrt{6}$　　B. 6　　C. 9　　D. 18

6. 已知直线 a，b 分别在两个不同的平面α，β内，则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,x,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,2)$，$\boldsymbol{c}=(1,0,0)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则 x 等于（　）

A. -1　　B. 1　　C. -1 或 1　　D. 1 或 0

8. 德国著名数学家高斯，享有“数学王子”之美誉，他在研究圆内整点问题时，定义了一个函数 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$表示不超过 x 的最大整数，比如$[\pi]=3$. 根据以上定义，当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，数列 $x-f(x)$，$f(x)$，x （　）

A. 是等差数列，也是等比数列　　B. 是等差数列，不是等比数列

C. 是等比数列。不是等差数列　　D. 不是等差数列，也不是等比数列

9. 设有四个数的数列$\{a_n\}$，该数列前 3 项成等比数列，其和为 m，后 3 项成等差数列，其和为 6. 则实数 m 的取值范围为（　）

A. $m\geq 6$　　B. $m\geq\frac{3}{2}$　　C. $m\leq 6$　　D. $m\geq 2$

10. 曲线 C:$x^3+y^2=1$，给出下列结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离不小于 1；

③曲线 C 只经过 2 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）.

其中，所有正确结论的序号是（　）

A. ①②　　B. ②　　C. ②③　　D. ③

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 设 P 是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点，P 到该椭圆左焦点的距离为 2，则 P 到右焦点的距离为______.

12. 不等式$\frac{x}{x-1}<0$ 的解集为______.

13. 能说明“若 $a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”为假命题的一组 a、b 值是 $a=$ ____，$b=$ ____.

14. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$的右焦点 $F(c，0)$到一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值是____.

15. 某渔业公司今年初用 100 万元购进一艘渔船用于捕捞，已知第一年需各种费用 4 万元，从第二年开始，每年所需费用用均比上一年增加 2 万元.

若该渔船预计使用 n 年，其总花费（含购买费用）为______万元；

当 $n=$ ______时，该渔船年平均花费最低（含购买费用）.

16. 若x_1，x_2，x_3，…，x_9表示从左到右依次排列的 9 盏灯，现制定开灯与关灯的规划如下：

（1）对一盏灯进行开灯或关灯一次叫做一次操作；

（2）灯x_1在任何情况下都可以进行一次操作；对任意的 $i\in\{x\in N|2\le x\le 9\}$，要求灯$x_i$的左边有且只有灯$x_{i-1}$是开灯状态时才可以对灯$x_i$进行一次操作.

如果所有灯都处于开灯状态，那么要把灯x_4关闭最少需要_____次操作；

如果除灯x_8外，其余 8 盏灯都处于开灯状态，那么要使所有灯都开着最少需要_____次操作.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 13 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，且a_3，a_4+4，a_5成等差数列.

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_n=62$，求 n 的值.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^2+ax$，$a\in R$.

（I）若 $f(a)>f(1)$，求 a 的取值范围；

（II）若 $f(x)\ge -4$ 对$\forall x\in R$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（III）求关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 的解集.

19.（本小题满分 13 分）

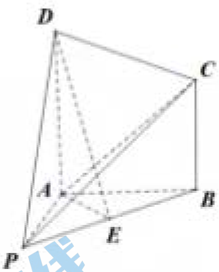
已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的右焦点为 $F(1,\ 0)$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）设点 A 为椭圆 C 的上顶点，点 B 在椭圆上且位于第一象限，且$\angle AFB=90°$，求ΔAFB 的面积.

20.（本小题满分 14 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\perp$平面 ABP，$BC//AD$，$\angle PAB=90°$，$PA=AB=2$，$AD=3$，$BC=m$，



E 为 PB 的中点.

（I）证明：$AE\perp$平面 PBC；

（II）若二面角 $C-AE-D$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 m 的值；

（III）若 $m=2$，在线段 AD 上是否存在一点 F，使得 $PF\perp CE$. 若存在，确定 F 点的位置；若不存在，说明理由.

21.（本小题满分 14 分）

已知抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$，抛物线 C 上横坐标为 1 的点到焦点 F 的距离为 3.

（I）求抛物线 C 的方程及其准线方程；

（II）过$(-1,\ 0)$的直线 l 交抛物线 C 于不同的两点 A，B，交直线 $x=-4$ 于点 E，直线 BF 交直线 $x=-1$ 于点 D. 是

否存在这样的直线 l，使得 $DE//AF$？若不存在，请说明理由；若存在，求出直线 l 的方程.

22.（本小题满分 13 分）

若无穷数列a_1，a_2，a_3，…满足：对任意两个正整数 i，$j(j-i\geq 3)$，$a_{i-1}+a_{j+1}=a_i+a_j$与$a_{i+1}+a_{j-1}=a_i+a_j$至少有一个成立，则称这个数列为“和谐数列”.

（I）求证：若数列$\{a_n\}$为等差数列，则$\{a_n\}$为“和谐数列”；

（II）求证：若数列$\{a_n\}$为“和谐数列”，则$\{a_n\}$从第 3 项起为等差数列；

（III）若$\{a_n\}$是各项均为整数为“和谐数列”，满足$a_1=0$，且存在$p\in N*$使得

$a_p=p$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p=-p$，求 p 的所有可能值.

北京市西城区 2019 — 2020 学年度第一学期期末试卷

高二数学参考答案

2020.1

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. A　2. B　3. C　4. D　5. A　6. A　7. B　8. D　9. B　10. C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 8　　12. $\{x \mid 0<x<1\}$　　13. 1，−1（答案不唯一）　　14. 2

15. $n^2+3n+100$；10　　16. 3；21

注：13、15、16 题第一个空 2 分，第二个空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 为公比为 2 的等比数列，

所以 $a_3=a_1q^2=4a_1$， $a_4=8a_1$， $a_5=16a_1$， ………………3 分

依题意得 $2(a_4+4)=a_3+a_5$， ………………5 分

即 $2(8a_1+4)=4a_1+16a_1$， ………………6 分

整理得 $4a_1=8$， 解得 $a_1=2$. ………………7 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$. ………………8 分

（Ⅱ）依题意 $S_n=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$， ………………10 分

$$=2\cdot\frac{1-2^n}{1-2}=2^{n+1}-2.$$ ………………11 分

所以 $2^{n+1}-2=62$， 整理得 $2^{n+1}=64$， ………………12 分

解得 $n=5$.

所以 n 的值是 5. ………………13 分

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(a)>f(1)$ 得 $a^2+a^2>1+a$，

整理得 $2a^2-a-1>0$， ………………2 分

解得 $\{a \mid a<-\dfrac{1}{2}$ 或 $a>1\}$. ………………4 分

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6$ 分

（Ⅱ）$f(x)\ge -4$ 对 $\forall x\in \mathbf{R}$ 恒成立，则 $f(x)_{\min}\ge -4$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$ 分

所以 $\dfrac{-a^2}{4}\ge -4$，

整理得 $a^2-16\le 0$，

解得 $\{a\,|\,-4\le a\le 4\}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$ 分

（Ⅲ）解 $x^2+ax=0$，得 $x_1=0, x_2=-a$，

①当 $-a>0$ 时，即 $a<0$ 时，$x<0$ 或 $x>-a$；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

②当 $-a<0$ 时，即 $a>0$ 时，$x<-a$ 或 $x>0$；$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12$ 分

③当 $-a=0$ 时，即 $a=0$ 时，$x\ne 0$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 13$ 分

综上，当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x<0$ 或 $x>-a\}$；当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x<-a$ 或 $x>0\}$；当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\ne 0\}$.

19. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）依题意 $c=1$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

解得 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4$ 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5$ 分

（Ⅱ）设点 $B(x_0,y_0)$，因为点 B 在椭圆上，所以 $\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1\cdots$①，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7$ 分

因为 $\angle AFB=90^\circ$，所以 $k_{FA}\cdot k_{FB}=-1$，得 $\dfrac{y_0}{x_0-1}=1\cdots$②，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8$ 分

由①②消去 y_0 得，$3x_0^2-4x_0=0$，

解得 $x_0=0$（舍），$x_0=\dfrac{4}{3}$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

代入方程②得 $y_0=\dfrac{1}{3}$，所以 $B(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 11$ 分

所以 $|BF|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，又 $|AF|=\sqrt{2}$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12$ 分

所以 ΔAFB 的面积 $S_{\Delta AFB}=\dfrac{1}{2}\times|AF|\times|BF|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 13$ 分

20. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）证明：因为 $AD\perp$ 平面 PAB，$BC\,/\!/\,AD$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB . $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1$ 分

又因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp BC$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

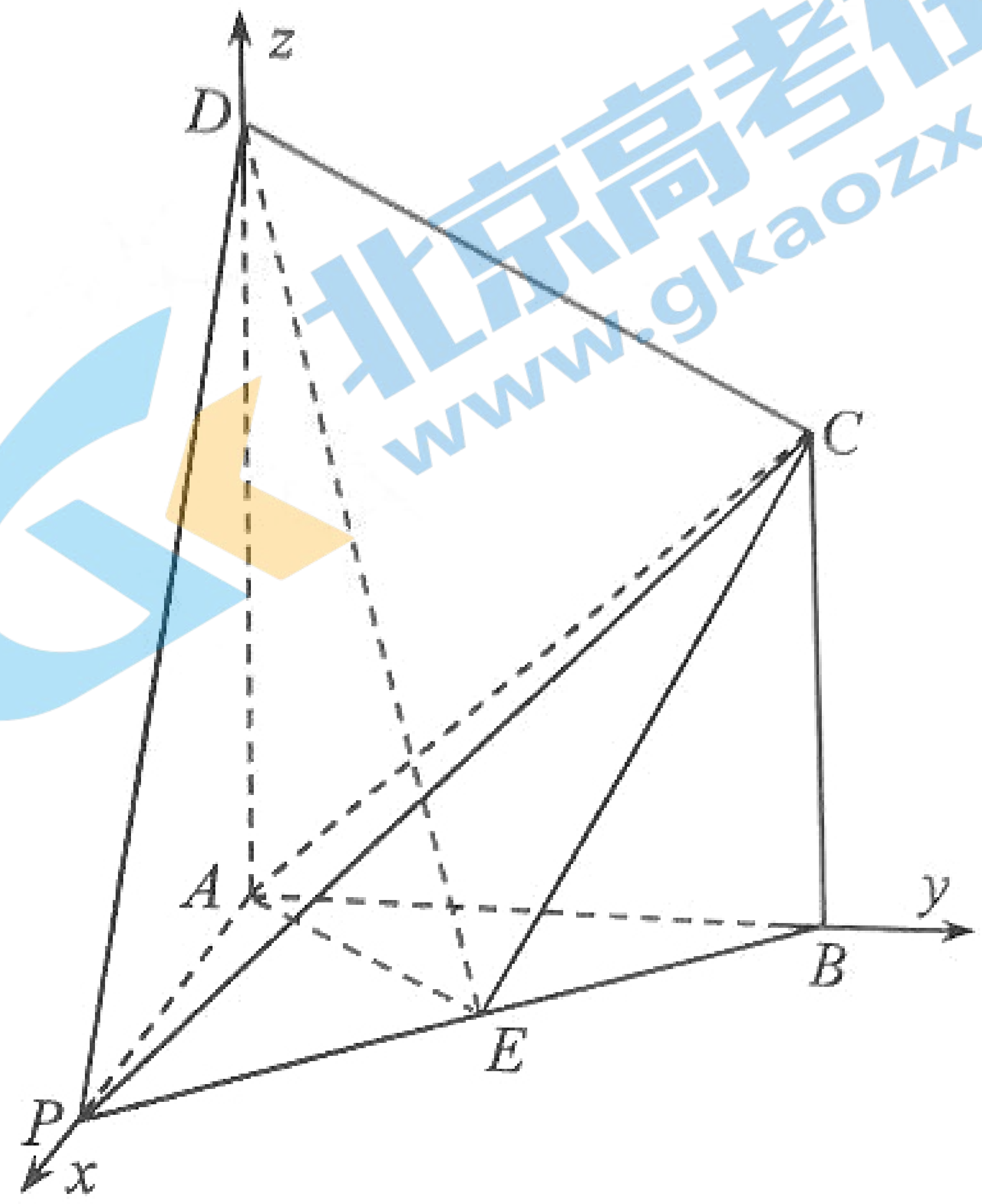
在ΔPAB中，$PA=AB$，E是PB的中点，

所以 $AE\perp PB$.

又因为 $BC\cap PB=B$，所以 $AE\perp$平面PBC. ……………………3 分

（Ⅱ）解：因为 $AD\perp$平面PAB， ……………………4 分

所以$AD\perp AB$，$AD\perp PA$. ……………………5 分



又因为 $PA\perp AB$，

所以 如图建立空间直角坐标系$A-xyz$.

则$A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,2,m)$，$E(1,1,0)$，

$P(2,0,0)$，$D(0,0,3)$，

$\overrightarrow{AC}=(0,2,m)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$. ……………………6 分

设平面AEC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ ……………………7 分

即 $\begin{cases}2y+mz=0,\\ x+y=0.\end{cases}$ 令$x=1$，则$y=-1$，$z=\dfrac{2}{m}$，

于是$\boldsymbol{n}=(1,-1,\dfrac{2}{m})$. ……………………8 分

因为$AD\perp$平面PAB，所以$AD\perp PB$. 又$PB\perp AE$，

所以$PB\perp$平面AED.

又因为$\overrightarrow{PB}=(-2,2,0)$，

所以 取平面AED的法向量为$\boldsymbol{m}=(-1,1,0)$. ……………………9 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， ……………………10 分

即 $\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\dfrac{4}{m^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得$m^2=1$.

又因为$m>0$，所以$m=1$. ……………………11 分

（Ⅲ）结论：不存在. 理由如下：

证明：设$F(0,0,t)$ $(0\le t\le 3)$.

当$m=2$时，$C(0,2,2)$.

$\overrightarrow{PF}=(-2,0,t)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-1,-2)$. ……………………12 分

若$PF\perp CE$，则$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$-2-2t=0$，$t=-1$. 这与$0\le t\le 3$矛盾. ………13 分

所以，在线段AD上不存在点F，使得$PF\perp CE$. ……………………14 分

21. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为横坐标为1的点到焦点的距离为3，所以$1+\frac{p}{2}=3$，解得$p=4$， ………2 分

………………3 分

所以$y^2=8x$，

………………4 分

所以准线方程为$x=-2$．

（Ⅱ）显然直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=k(x+1)\ (k\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

联立得$\begin{cases}y^2=8x,\\ y=k(x+1),\end{cases}$ 消去y得$k^2x^2+(2k^2-8)x+k^2=0$． ………………5 分

由$\Delta=(2k^2-8)^2-4k^4>0$，解得$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$．所以$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$且$k\neq 0$．

………………7 分

由韦达定理得$x_1+x_2=\dfrac{8-2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$．

方法一：

直线BF的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

又$x_D=-1$，所以$y_D=\dfrac{-3y_2}{x_2-2}$，所以$D(-1,\dfrac{-3y_2}{x_2-2})$， ………………8 分

因为$DE\,//\,AF$，所以直线DE与直线AF的斜率相等． ………………9 分

又$E(-4,-3k)$，所以$\dfrac{-3k+3\dfrac{y_2}{x_2-2}}{-3}=\dfrac{y_1}{x_1-2}$． ………………10 分

整理得$k=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}$，即$k=\dfrac{k(x_1+1)}{x_1-2}+\dfrac{k(x_2+1)}{x_2-2}$， ………………11 分

化简得$1=\dfrac{x_1+1}{x_1-2}+\dfrac{x_2+1}{x_2-2}$，$1=\dfrac{2x_1x_2-(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$，即$x_1+x_2=7$． ………………12 分

所以$\dfrac{8-2k^2}{k^2}=7$，整理得$k^2=\dfrac{8}{9}$， ………………13 分

解得$k=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．经检验，$k=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$符合题意．

所以存在满足条件的直线l，其方程为$y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$或$y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$． ………14 分

方法二：

因为$DE\,//\,AF$，所以$\dfrac{|BA|}{|BE|}=\dfrac{|BF|}{|BD|}$，所以$\dfrac{x_2-x_1}{x_2+4}=\dfrac{x_2-2}{x_2+1}$． ………………10 分

整理得$x_1x_2+(x_1+x_2)=8$，即$\dfrac{8-2k^2}{k^2}=7$，

………………12 分

整理得$k^2=\dfrac{8}{9}$．

………………13 分

解得$k=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，经检验，$k=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$符合题意．

所以存在满足条件的直线l，其方程为$y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$或$y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$． ………14 分

21. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为横坐标为1的点到焦点的距离为3，所以$1+\frac{p}{2}=3$，解得$p=4$， ………2 分

………3 分

所以$y^2=8x$，

………4 分

所以准线方程为$x=-2$．

（Ⅱ）显然直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=k(x+1)\ (k\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

联立得$\begin{cases}y^2=8x,\\ y=k(x+1),\end{cases}$　　消去y得$k^2x^2+(2k^2-8)x+k^2=0$． ………5 分

由$\Delta=(2k^2-8)^2-4k^4>0$，解得$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$．所以$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$且$k\neq 0$．

………7 分

由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{8-2k^2}{k^2}$，$x_1x_2=1$．

方法一：

直线BF的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

又$x_D=-1$，所以$y_D=\frac{-3y_2}{x_2-2}$，所以$D(-1,\frac{-3y_2}{x_2-2})$， ………8 分

因为$DE\,//\,AF$，所以直线DE与直线AF的斜率相等. ………9 分

又$E(-4,-3k)$，所以$\dfrac{-3k+3\frac{y_2}{x_2-2}}{-3}=\frac{y_1}{x_1-2}$． ………10 分

整理得$k=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$，即$k=\frac{k(x_1+1)}{x_1-2}+\frac{k(x_2+1)}{x_2-2}$， ………11 分

化简得$1=\frac{x_1+1}{x_1-2}+\frac{x_2+1}{x_2-2}$，$1=\frac{2x_1x_2-(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$，即$x_1+x_2=7$． ………12 分

所以$\frac{8-2k^2}{k^2}=7$，整理得$k^2=\frac{8}{9}$， ………13 分

解得$k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$．经检验，$k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$符合题意.

所以存在满足条件的直线l，其方程为$y=\frac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$或$y=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$． ………14 分

方法二：

因为$DE\,//\,AF$，所以$\frac{|BA|}{|BE|}=\frac{|BF|}{|BD|}$，所以$\frac{x_2-x_1}{x_2+4}=\frac{x_2-2}{x_2+1}$． ………10 分

整理得$x_1x_2+(x_1+x_2)=8$，即$\frac{8-2k^2}{k^2}=7$， ………12 分

整理得$k^2=\frac{8}{9}$．

………13 分

解得$k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，经检验，$k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$符合题意.

所以存在满足条件的直线l，其方程为$y=\frac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$或$y=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(x+1)$． ………14 分

22.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）证明：因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

所以 对任意两个正整数 $i,j\ (j-i\geq 3)$，有 $a_{i+1}-a_i=a_j-a_{j-1}=d$， ………………2 分

所以 $a_{i+1}+a_{j-1}=a_i+a_j$ ．

所以 数列 $\{a_n\}$ 为“和谐数列”． ………………4 分

（Ⅱ）证明：因为数列 $\{a_n\}$ 为“和谐数列”，

所以 当 $i=1$，$j=4$ 时，只能 $a_{i+1}+a_{j-1}=a_i+a_j$ 成立，$a_{i-1}+a_{j+1}=a_i+a_j$ 不成立．

所以 $a_2+a_3=a_1+a_4$，即 $a_2-a_1=a_4-a_3$． ………………6 分

当 $i=1$，$j=5,6,7,8,9\cdots$ 时，也只能 $a_{i+1}+a_{j-1}=a_i+a_j$ 成立，$a_{i-1}+a_{j+1}=a_i+a_j$ 不成立．

所以 $a_2+a_4=a_1+a_5$，$a_2+a_5=a_1+a_6$，$a_2+a_6=a_1+a_7$，$\cdots$

即 $a_2-a_1=a_5-a_4=a_6-a_5=a_7-a_6=\cdots$，

所以 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_5-a_4=a_6-a_5=\cdots$． ………………7 分

令 $a_2-a_1=d$，则数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n-a_{n-1}=d(n\geq 4)$．

所以，数列 $\{a_n\}$ 从第 3 项起为等差数列． ………………8 分

（Ⅲ）解：①若 $p=1$，则 $a_p=a_1=1$，与 $a_1=0$ 矛盾，不合题意．

②若 $p=2$，则 $a_1=0$，$a_2=2$，但 $a_1+a_2=2\neq -2$，不合题意． ………………9 分

③若 $p=3$，则 $a_1=0$，$a_3=3$，由 $a_1+a_2+a_3=-3$，得 $a_2=-6$，

此时数列 $\{a_n\}$ 为：$0,-6,3,-3,-9,\cdots$，符合题意． ………………10 分

④若 $p\geq 4$，$p\in\mathbf{N}^*$，设 $a_2-a_1=d$，

则 $a_1+a_2+\cdots+a_p=0+d+\underbrace{[p-(p-3)d]+[p-(p-4)d]+\cdots+[p-d]+p}_{(p-2)}=-p$．

所以，$\underbrace{[p-(p-3)d]+[p-(p-4)d]+\cdots+(p-d)+p+(p+d)}_{(p-1)}=0$

即 $\dfrac{[(p+d)+p-(p-3)d](p-1)}{2}=0$．

因为 $p-1\neq 0$，所以 $p+d+p-(p-3)d=0$． ………………11 分

所以 $p=4$ 不合题意．

所以 $d=\dfrac{2p}{p-4}=\dfrac{2p-8+8}{p-4}=2+\dfrac{8}{p-4}$． ………………12 分

因为 p 为整数，所以 $\dfrac{8}{p-4}$ 为整数，所以 $p=5,6,8,12$．

综上所述，p 的所有可能值为 $3,5,6,8,12$． ………………13 分