★启用前注意保密

2021年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上。将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid 2^x>4\}$，集合 $B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,4)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知复数 $z=\dfrac{i}{2+i}+i$（i为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\sqrt{10}$

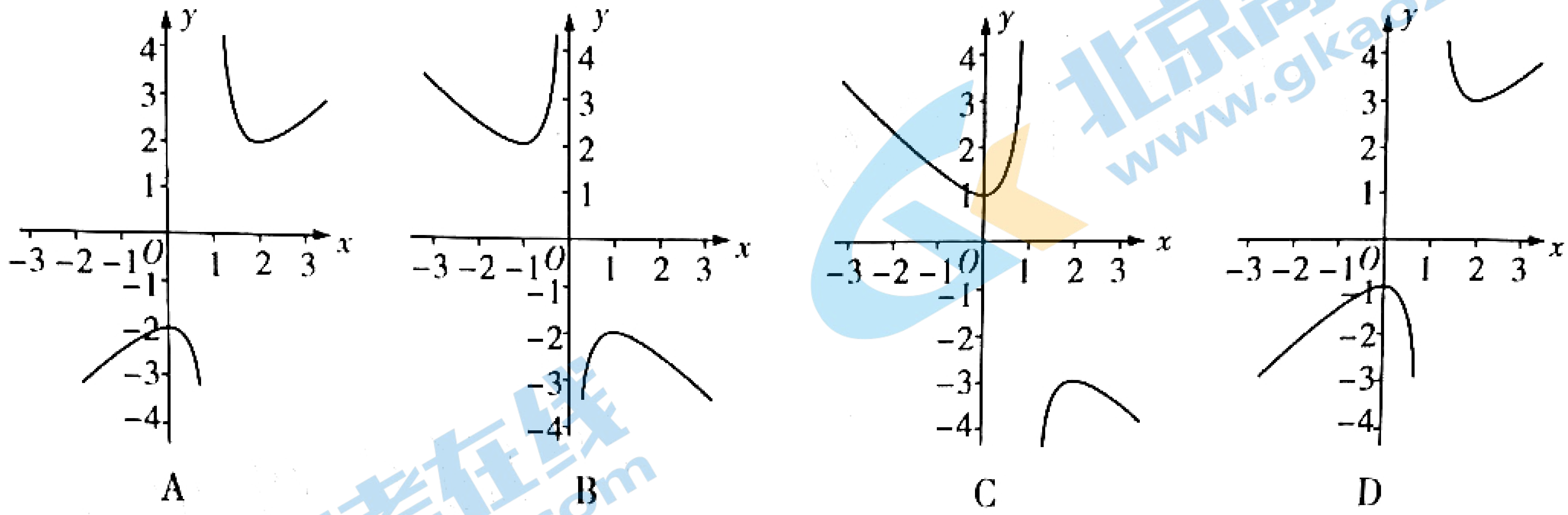
3. 2020年12月4日是第七个“国家宪法日”．某中学开展主题为“学习宪法知识，弘扬宪法精神”的知识竞赛活动，甲同学答对第一道题的概率为$\dfrac{2}{3}$，连续答对两道题的概率为$\dfrac{1}{2}$．用事件A表示“甲同学答对第一道题”，事件B表示“甲同学答对第二道题”，则 $P(B|A)=$

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

4. 某一次乒乓球赛的参赛队共有5小组，每小组3队．首先每小组中各队进行单循环比赛（即每两队比赛一次），然后各小组的第一名再进行单循环比赛，则先后比赛的总次数为

A. 15　　B. 20　　C. 25　　D. 30

5. 函数 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ 的大致图象为



6. 《九章算术》是我国古代的数学巨著，书中有这样一道题："今有垣厚五尺，两鼠对穿. 大鼠日一尺，小鼠亦日一尺. 大鼠日自倍，小鼠日自半. 问何日相逢?"题意为：有一堵墙厚五尺，有两只老鼠从墙的正对面打洞穿墙. 大老鼠第一天打进一尺，以后每天打进的长度是前一天的 2 倍；小老鼠第一天也打进一尺，以后每天打进的长度是前一天的一半. 若这一堵墙厚 16 尺，则几日后两鼠相逢

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 已知一个圆柱的两个底面的圆周在半径为 $2\sqrt{3}$ 的同一个球的球面上，则该圆柱体积的最大值为

A. 32π　　B. $\dfrac{32\pi}{3}$　　C. 10π　　D. 24π

8. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 4，焦距为 $2\sqrt{2}$. 过椭圆 C 的上端点 B 作圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，与椭圆 C 分别交于另外两点 M，N. 则 $\triangle BMN$ 的面积为

A. 6　　B. $\dfrac{144}{25}$　　C. $\dfrac{12}{5}$　　D. $\dfrac{15}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F，G 分别为 BC，CC_1，BB_1 的中点，则

A. 直线 B_1C 与直线 AF 垂直

B. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\dfrac{9}{2}$

C. 三棱锥 $F-AGE$ 的体积为 2

D. 点 A_1 与点 G 到平面 AEF 的距离相等

10. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将曲线上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ $(\omega>0)$，得到函数 $g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$，则

A. $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点

B. $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个极值点

C. $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. ω 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$

11. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+2b=1$，则

A. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$

C. $2^{a+b}>2$

D. $\log_2 a+\log_2 b\leqslant -3$

12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x-1)$ 与 $f(x+1)$ 都为奇函数，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数

B. $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数

C. $f(x+2)$ 为奇函数

D. $f(x+3)$ 为奇函数

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=\frac{1}{x}-\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线在 x 轴上的截距为________.

14. 已知 θ 为第二象限角，且 $\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则 $\tan\theta=$______.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$AC=3$，$\cos A=\frac{1}{4}$，点 E 在直线 BC 上，且满足：$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ $(l\in\mathbf{R})$，则 $|\overrightarrow{AE}|=$________.

16. 已知抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F，直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点作抛物线 C 的切线 l_1，l_2，设直线 l_1 与 l_2 交于点 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0=$________，$\triangle PAB$ 面积的最小值为________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $3\sin C+2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{C}{2}=\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{3}$，________，求△$ABC$ 的周长.

从下列三个条件中任选一个，补充在上面问题的横线中，然后对题目进行求解.

条件①：$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc$；条件②：$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}a$；条件③：$a(a\cos C+c\cos A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

（1）证明：$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 为等比数列；

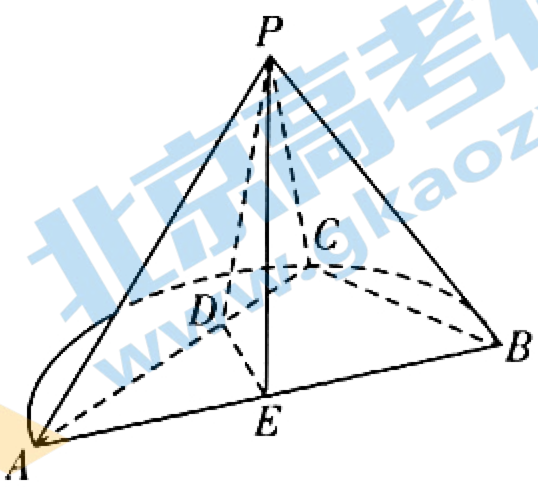
（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19. （12 分）

如图，AB 是半圆 E 的直径，C 是半圆 E 上异于 A，B 的一点，点 D 在线段 AC 上，满足 $DE\perp AB$，且 $PA\perp PC$，$\angle BAC=\angle PAC=30°$，$AB=4$，$PB=\sqrt{7}$.

（1）证明：$BC\perp PA$；

（2）求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.



20. （12 分）

已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率为$\dfrac{3}{2}$，过双曲线 C 的右焦点 F 作渐近线的垂线，垂足为 N，且△FON（O 为坐标原点）的面积为$\sqrt{5}$.

（1）求双曲线 C 的标准方程；

（2）若 P，Q 是双曲线 C 上的两点，且 P，Q 关于原点对称，M 是双曲线上异于 P，Q 的点. 若直线 MP 和直线 MQ 的斜率均存在，则 $k_{MP}\cdot k_{MQ}$是否为定值？若是，请求出该定值；若不是，请说明理由.

21. （12 分）

城市大气中总悬浮颗粒物（简称 TSP）是影响城市空气质量的首要污染物，我国的《环境空气质量标准》规定，TSP 日平均浓度（单位：$\mu g/m^3$）在$[0，120]$时为一级水平，在$(120，300]$时为二级水平．为打赢蓝天保卫战，有效管控和治理那些会加重 TSP 日平均浓度的扬尘污染刻不容缓．扬尘监测仪与智能雾化喷淋降尘系统为城市建筑工地的有效抑尘提供了技术支持．

某建筑工地现新配置了智能雾化喷淋降尘系统，实现了依据扬尘监测仪的 TSP 日平均浓度进行自动雾化喷淋，其喷雾头的智能启用对应如下表：

TSP 日平均浓度 $X/(\mu g/m^3)$	$X\leqslant 80$	$80<X\leqslant 120$	$120<X\leqslant 200$	$200<X\leqslant 300$	$X>300$
喷雾头个数 Y/个	20	50	80	110	150

根据以往扬尘监测数据可知，该工地施工期间 TSP 日平均浓度 X 不高于 $80\ \mu g/m^3$，$120\ \mu g/m^3$，$200\ \mu g/m^3$，$300\ \mu g/m^3$ 的概率分别为 0.15，0.35，0.7，0.95.

（1）若单个喷雾头能实现有效降尘 8 m^3，求施工期间工地能平均有效降尘的立方米数.

（2）若实现智能雾化喷淋降尘之后，该工地施工期间 TSP 日平均浓度 X 不高于 $80\ \mu g/m^3$，$120\ \mu g/m^3$，$200\ \mu g/m^3$，$300\ \mu g/m^3$ 的概率均相应提升了 5%，求：

①该工地在未来 10 天中至少有 2 天 TSP 日平均浓度能达到一级水平的概率；（$0.6^{10}\approx 0.006$，结果精确到 0.001）

②设单个喷雾头出水量一样，如果 TSP 日平均浓度达到一级水平时，无需实施雾化喷淋，二级及以上水平时启用所有喷雾头 150 个，这样设置能否实现节水节能的目的？说明理由.

22. （12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+(a-1)x-a\ln x(a\neq 0)$.

（1）当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，证明：$f(x)\geqslant 0$；

（2）若$f(x)$有两个零点，求实数 a 的取值范围.

★启用前注意保密

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	D	C	D	B	A	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	CD	ABD	BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。（第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分）

13. $\frac{3}{2}$　14. $-\frac{4}{3}$　15. $\sqrt{10}$　16. -1；4

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17.（10 分）

解：由 $3\sin C+2\sqrt{3}\sin^2\frac{C}{2}=\sqrt{3}$，得 $3\sin C+\sqrt{3}(1-\cos C)=\sqrt{3}$，　……………… 1 分

即 $3\sin C-\sqrt{3}\cos C=0$，所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=0$.　……………… 2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$.　……………… 4 分

选择条件①：由 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc$，得 $2bc\cdot\cos A=bc$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.　……………… 6 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.　……………… 7 分

所以 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{2}$. 所以 $b=2c=4\sqrt{3}$, $a=\sqrt{b^2-c^2}=6$. ………… 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………… 10 分

选择条件②：由 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}a$，得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}a$，所以 $b=4\sqrt{3}$. ………… 6 分

由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

所以 $12=48+a^2-12a$，即 $a^2-12a+36=0$. ………… 8 分

解得 $a=6$. ………… 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………… 10 分

选择条件③：由 $a(a\cos C+c\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2$ 及正弦定理得，

$a(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$. ………… 5 分

所以 $a\sin(A+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$. ………… 6 分

所以 $a\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}b\sin B$，即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$. ………… 7 分

由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

所以 $12=\frac{3}{4}b^2+b^2-\frac{3}{2}b^2$. 所以 $b=4\sqrt{3}$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b=6$. ………… 9 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3}+6$. ………… 10 分

18. (12 分)

(1) 证明：因为 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，

所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-4a_n=2(a_{n+1}-2a_n)$.

注意到 $a_2-2a_1=2\neq 0$, ………… 2 分

所以 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ………… 4 分

(2) 解：由 (1) 知 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $a_{n+1}-2a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$. ………… 5 分

所以 $\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=1$. ………… 6 分

又 $\frac{a_1}{2^0}=1$，所以 $\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $\frac{a_n}{2^{n-1}}=1+(n-1)\times 1=n$，即 $a_n=n\times 2^{n-1}$. ………… 8 分

所以 $S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$, ①

所以 $2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n$, ② ………… 9 分

所以① − ②，得 $-S_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$ ………… 10 分

$=\frac{2^0\times(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^n$ ………… 11 分

所以 $S_n=(n-1)2^n+1$. ………… 12 分

19. (12 分)

(1) 证明：因为 AB 是半圆 E 的直径，C 是半圆 E 上异于 A，B 的一点，

所以 $AC \perp BC$. …………………………………………………………………… 1 分

因为 $\angle BAC = 30°$，$AB = 4$，所以 $BC = 2$，$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}$.

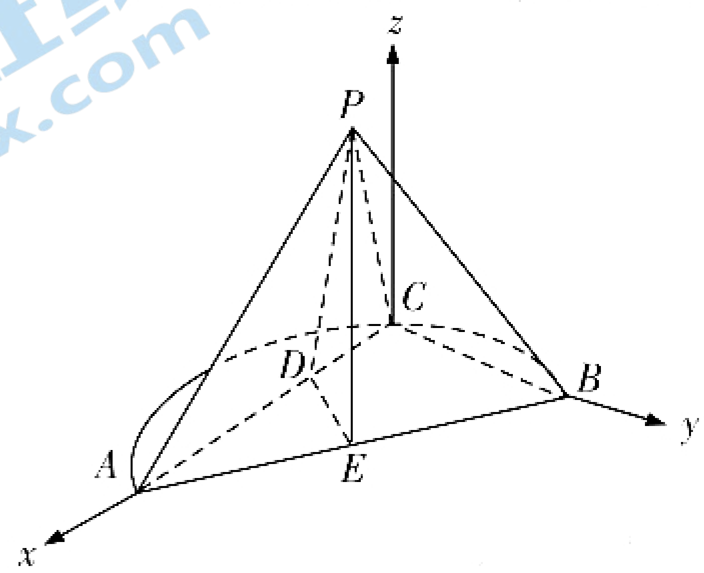
因为 $PA \perp PC$，$\angle PAC = 30°$，所以 $PC = \sqrt{3}$.

因为 $PB = \sqrt{7}$，所以 $PC^2 + BC^2 = PB^2$. 所以 $PC \perp BC$. ……………………… 3 分

因为 $PC \cap AC = C$， ………………………………………………………………… 4 分

所以 $BC \perp$ 平面 PAC. 因为 $PA \subset$ 平面 PAC，所以 $BC \perp PA$. ……………………… 5 分

(2) 解：以 C 为原点，CA，CB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，过点 C 且垂直于平面 ABC的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 如图所示，则



$C(0,\ 0,\ 0)$，$A(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2,\ 0)$，$E(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，$D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$，

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$， …………………………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{PE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{DE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1,\ 0\right)$，$\overrightarrow{BE} = (\sqrt{3},\ -1,\ 0)$， ……………… 8 分

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{PE} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + y_1 - \frac{3}{2}z_1 = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 + y_1 = 0. \end{cases}$

令 $y_1 = 1$，得 $x_1 = -\sqrt{3}$，$z_1 = -\frac{1}{3}$，所以 $\boldsymbol{m} = \left(-\sqrt{3},\ 1,\ -\frac{1}{3}\right)$. …………… 9 分

设平面 PBE 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PE} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + y_2 - \frac{3}{2}z_2 = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BE} = \sqrt{3}x_2 - y_2 = 0. \end{cases}$

令 $x_2 = 1$，得 $y_2 = \sqrt{3}$，$z_2 = \sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n} = (1,\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$. ………………………… 10 分

因为 $\cos < \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n} > = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{37}{9}} \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{777}}{259}$. ……………… 11 分

所以结合图可知，二面角 $D-PE-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{777}}{259}$. ………………… 12 分

20. (12 分)

解：(Ⅰ) 双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$，…………………… 1 分

所以点 $F(c,0)$ 到渐近线的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{bc}{c}=b$. ………………………………… 2 分

所以 $\triangle FON$ 的面积为 $\frac{1}{2}|NF|\cdot|ON|=\frac{1}{2}\cdot b\sqrt{c^2-b^2}=\frac{1}{2}\cdot ba=\sqrt{5}$,

即 $ab=2\sqrt{5}$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

因为双曲线 C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{3}{2}$,

所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，即 $b=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

代入 $ab=2\sqrt{5}$，解得 $a=2$.

所以 $b=\sqrt{5}$.

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. ……………………………………………… 6 分

(Ⅱ) $k_{MP}\cdot k_{MQ}$ 是定值，理由如下：……………………………………………………… 7 分

设 $P(x_1,y_1)$，$M(x_0,y_0)$，则 $Q(-x_1,-y_1)$，$x_0^2\neq x_1^2$.

所以 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{5}=1,\\ \frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{5}=1,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 9 分

两式相减并整理得 $\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{5}{4}$. ……………………………………………………… 10 分

所以 $k_{MP}\cdot k_{MQ}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{5}{4}$.

所以 $k_{MP}\cdot k_{MQ}$ 是定值，且该定值为 $\frac{5}{4}$. ……………………………………………… 12 分

21. (12 分)

解：(Ⅰ) 由已知条件和互斥事件的概率加法公式有

$P(X\leqslant 80)=0.15$，$P(80<X\leqslant 120)=P(X\leqslant 120)-P(X\leqslant 80)=0.35-0.15=0.2$,

$P(120<X\leqslant 200)=P(X\leqslant 200)-P(X\leqslant 120)=0.7-0.35=0.35$,

$P(200<X\leqslant 300)=P(X\leqslant 300)-P(X\leqslant 200)=0.95-0.7=0.25$,

$P(X>300)=1-P(X\leqslant 300)=1-0.95=0.05$. ……………………………………… 2 分

则智能设置喷雾头个数 Y 的分布列为：

Y	20	50	80	110	150
P	0.15	0.2	0.35	0.25	0.05

则 $E(Y)=20\times 0.15+50\times 0.2+80\times 0.35+110\times 0.25+150\times 0.05=76$（个）.

…… 4 分

所以施工期间工地能平均有效降尘的立方米数为

$E(8Y)=8\times E(Y)=8\times 76=608(m^3)$. ………………………………………… 5 分

(2) ①由已知，该工地智能雾化喷淋降尘之后，TSP 日平均浓度 X 达到一级水平的概率为

$P(X\leqslant 120)=0.35+0.05=0.4$, ………………………………………… 6 分

设未来 10 天中 TSP 日平均浓度能达到一级水平的天数为 ξ，则 $\xi\sim B(10, 0.4)$，

所以 $P(\xi\geqslant 2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)=1-0.6^{10}-C_{10}^{1}\times 0.4\times 0.6^{9}\approx 1-0.006-4\times 0.01=0.954$.

故该工地在未来 10 天中至少有 2 天 TSP 日平均浓度能达到一级水平的概率约为 0.954. ………………………………………… 8 分

②该工地智能雾化喷淋降尘之后，TSP 日平均浓度 X 对应喷雾头个数 Y 的分布列为：

TSP 日平均浓度 $X/(\mu g/m^3)$	$X\leqslant 80$	$80<X\leqslant 120$	$120<X\leqslant 200$	$200<X\leqslant 300$	$X>300$
喷雾头个数 Y/个	20	50	80	110	150
P	0.2	0.2	0.35	0.25	0

则 $E(Y)=20\times 0.2+50\times 0.2+80\times 0.35+110\times 0.25+150\times 0=69.5$（个），……………………………………………… 10 分

若只有当 TSP 日平均浓度在二级及以上水平时启用 150 个喷雾头，则启用喷雾头个数的期望值为 $(0.2+0.2)\times 0+(0.35+0.25)\times 150=90$(个)，大于之前智能启用喷雾头个数的期望值 69.5，由于单个喷雾头出水量一样，所以无法达到节水节能的目的. ………………………………………… 12 分

22. (12 分)

(1) 证明：$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，

又 $f'(x)=x+(a-1)-\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x+a)(x-1)}{x}$, ………………………………………… 1 分

因为 $a\geqslant\dfrac{1}{2}>0$，所以令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. ………………………………………… 2 分

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也是最小值， ………………………………………… 3 分

即 $f(x)_{\min}=f(1)=a-\dfrac{1}{2}\geqslant 0$.

所以当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$. ………………………………………… 4 分

(2) 解：①当 $a>0$ 时，由（1）可知，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=a-\frac{1}{2}$.

又由（1）知，当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时 $f(x)\geqslant0$,

要使得 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(1)=a-\frac{1}{2}<0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$.

此时 $f(2)=a(2-\ln 2)>0$，$f(e^{1-\frac{1}{a}})=\frac{1}{2}e^{2-\frac{2}{a}}+(a-1)e^{1-\frac{1}{a}}-a\left(1-\frac{1}{a}\right)>(a-1)$

$(e^{1-\frac{1}{a}}-1)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(e^{1-\frac{1}{a}},1)$ 和 $(1,2)$ 上各有一个零点，满足题意. ………………… 5 分

②当 $-1<a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-a$ 或 $x_2=1$.

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,-a)$	$-a$	$(-a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 $x=-a$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(-a)=-\frac{1}{2}a^2+a-a\ln(-a)=a\left[-\frac{1}{2}a+1-\right.$

$\left.\ln(-a)\right]$， ……………………………………………………………………………… 6 分

令 $u(a)=-\frac{1}{2}a+1-\ln(-a)\ (-1<a<0)$，则 $u'(a)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=-\frac{a+2}{2a}>0$,

所以在 $(-1,0)$ 上，$u(a)$ 单调递增，

因为 $u(a)>u(-1)=\frac{3}{2}>0$，所以 $f(-a)=au(a)<0$,

所以 $f(x)$ 不可能有两个零点. …………………………………………………………… 8 分

③当 $a=-1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$,

在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 不可能有两个零点. ………………… 9 分

④当 $a<-1$ 时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1)=a-\frac{1}{2}<0$,

所以 $f(x)$ 不可能有两个零点. ……………………………………………………… 11 分

综上所述，若 $f(x)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ………… 12 分