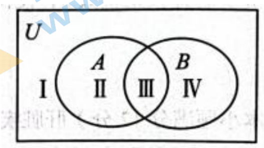
北师大实验中学 2023 届高三数学热身练习

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。

1.如图，集合 A、B 均为 U 的子集，$(\complement_U A)\cap B$ 表示的区域



A. I　　B. II　　C. III　　D. IV

2.在下列四个函数中，在定义域内单调递增的有

A. $f(x)=\tan x$　　B. $f(x)=|x|$　　C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=x^2$

3.设 $a=3^{0.7}$，$b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$，$c=\log_{0.7}0.8$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

4.已知 $\tan x=2$，则 $\tan(x+\frac{\pi}{4})$ 的值为

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

5. 某辆汽车每次加油都把油箱加满，下表记录了该车相邻两次加油时的情况．

加油时间	加油量（升）	加油时的累计里程（千米）
2023年5月1日	12	35000
2023年5月15日	60	35500

注：“累计里程”指汽车从出厂开始累计行驶的路程

在这段时间内，该车每 100 千米平均耗油量为

A. 6升　　B. 8升　　C. 10升　　D. 12升

6.已知 $|\overrightarrow{OA}|=1,|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3},\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在 $\angle AOB$ 内，且 $\angle AOC$=30°，设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m、n∈R)，则 $\frac{m}{n}$ 等于

A. $\frac{1}{3}$　　B.3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

7.设 $m\in R$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是

A. $[\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　B. $[\sqrt{10},2\sqrt{5}]$　　C. $[\sqrt{10},4\sqrt{5}]$　　D. $[2\sqrt{5},4\sqrt{5}]$

8.已知 $\{a_n\}$ 为无穷等差数列，则“存在 $i,j\in\mathbf{N}^*$ 且 $i\neq j$，使得 $a_i+a_j=0$”是“存在 $k\geq 2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

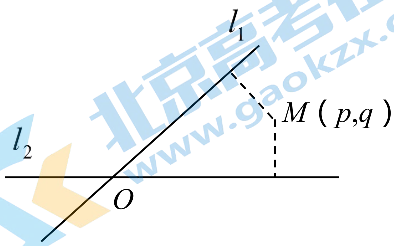
9. 十八世纪，瑞士数学家欧拉研究调和级数时，得到了以下结果：当 n 很大时，

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma$（其中 γ 为常数，其近似值为 0.577）据此，可以估计

$\frac{1}{20001}+\frac{1}{20002}+\cdots+\frac{1}{30000}$ 的值为

A. $\ln 10^4$　　B. $\ln 6$　　C. $\ln 2$　　D. $\ln\frac{3}{2}$

10.如图，平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若 p,q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离，则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的“距离坐标”. 已知常数 $p\geq 0,q\geq 0$，给出下列命题：



①若 $p=q=0$，则“距离坐标”为 $(0,0)$ 的点有且仅有 1 个；

②若 $pq=0$，且 $p+q\neq 0$，则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 2 个；

③若 $pq\neq 0$，则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 4 个.

上述命题中，正确命题的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分

11. 若 $(1+\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$（$a$、$b$ 为有理数），则 $a+b=$______.

12. 银行储蓄卡的密码由 6 位数字组成，某人在银行自助取款机上取钱时，忘记了密码的最后 1 位数字，但记得密码的最后 1 位是偶数，则在第一次没有按对的条件下第 2 次按对的概率是______.

13.在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c.已知 $b-c=\dfrac{1}{4}a$，

$2\sin B=3\sin C$，则 $\dfrac{b}{c}=$______， $\cos A$ 的值为______.

14.已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且对任意的正整数 n，都满足：$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2n+2$，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_3=$________， $S_{2023}=$_______.

15. 已知曲线 $C:x|x|-4y|y|=4$.

①若 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 C 上一点，则 $x_0-2y_0>0$；

② 曲线 C 在 $(0,-1)$ 处的切线斜率为 0；

③ $\exists m\in R,x-2y+m=0$ 与曲线 C 有四个交点；

④ 直线 $x-2y+m=0$ 与曲线 C 无公共点当且仅当 $m\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,+\infty)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

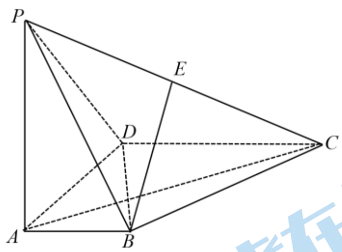
16. 在$\triangle ABC$中，$7a=6b\cos B$．

（Ⅰ）若$\sin A=\dfrac{3}{7}$，求$\angle B$的值；

（Ⅱ）若$c=8$，从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在.求$\triangle ABC$的面积..

条件①：$\sin A=\dfrac{4}{7}$；　　　　条件②：$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

17.如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AD\perp AB$，$AB//DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点E为棱PC的中点.



（Ⅰ）证明 $BE\perp DC$；

（Ⅱ）求直线BE与平面PBD所成角的正弦值；

（Ⅲ）若F为棱PC上一点，满足$BF\perp AC$，求二面角$F-AB-P$的余弦值.

18. 诚信是立身之本，道德之基. 某校学生会创设了“诚信水站”，既便于学生用水，又推进诚信教育，并用“$\dfrac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$”表示每周“水站诚信度”. 为了便于数据分析，以四周为一周期，下表为该水站连续十二周（共三个周期）的诚信度数据统计：

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%
第三个周期	85%	92%	95%	96%

（Ⅰ）计算表中十二周“水站诚信度”的平均数 $\bar{x}$；

（Ⅱ）分别从上表每个周期的 4 个数据中随机抽取 1 个数据，设随机变量 X 表示取出的 3 个数据中“水站诚信度”超过 91% 的数据的个数，求随机变量 X 的分布列和期望；

（Ⅲ）已知学生会分别在第一个周期的第四周末和第二个周期的第四周末各举行了一次“以诚信为本”的主题教育活动. 根据已有数据，说明两次主题教育活动的宣传效果，并根据已有数据陈述理由.

19. 已知函数 $f(x)=ax-x\ln x$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最大值；

（Ⅲ）是否存在实数 a，使得对任意 $x>0$，都有 $f(x)\le a$？若存在，求 a 的取值范围； 若不存在，说明理由.

20.已知椭圆$C: x^2+3y^2=3$，过点$D\left(1,0\right)$且不过点$E(2,1)$的直线与椭圆C交于A,B两点，直线AE与直线$x=3$交于点M.

（Ⅰ）求椭圆C的离心率；

（Ⅱ）若AB垂直于x轴，求直线BM的斜率；

（Ⅲ）试判断直线BM与直线DE的位置关系，并说明理由.

21．若项数为N $(N\geqslant 3)$的数列$A_N: a_1,a_2,\cdots,a_N$满足：$a_1=1$，$a_i\in\mathbf{N}^*$（$i=2,3,\cdots,N$），且存在$M\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，使得$a_{n+1}-a_n\in\begin{cases}\{1,2\}, & 1\leqslant n\leqslant M-1,\\ \{-1,-2\}, & M\leqslant n\leqslant N-1,\end{cases}$则称数列$A_N$具有性质P.

（Ⅰ） ① 若$N=3$，写出所有具有性质P的数列A_3；

② 若$N=4$，$a_4=3$，写出一个具有性质P的数列A_4；

（Ⅱ）若$N=2024$，数列A_{2024}具有性质P，求A_{2024}的最大项的最小值；

（Ⅲ）已知数列$A_N: a_1,a_2,\cdots,a_N$，$B_N: b_1,b_2,\cdots,b_N$均具有性质P，且对任意$i,j\in\{1,2,\cdots,N\}$，当$i\neq j$时，都有$a_i\neq a_j$，$b_i\neq b_j$．记集合$T_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$，$T_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_N\}$，求$T_1\cap T_2$中元素个数的最小值.

2023 届高三数学热身练习答案

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题

目要求的一项

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	D	B	D	B	B	B	D	D

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分

11	12	13	14	15
120	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$、$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$，$\frac{2023}{2024}$	①　②

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

16. 解：（Ⅰ）由正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $7a=6b\cos B$，

得 $7\sin A=6\sin B\cos B=3\sin 2B$．

因为 $\sin A=\frac{3}{7}$，所以 $\sin 2B=1$．

又因为 $0<\angle B<\pi$，

所以 $\angle B=\frac{\pi}{4}$．　　　　　　　　　　【 5分 】

（Ⅱ）法1：选条件②：$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

由 $7a=6b\cos B$ 可知 $\cos B>0$，所以 $0<\angle B<\frac{\pi}{2}$．

所以由 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\angle B=\frac{\pi}{3}$.

所以 $7a=6b\cos B=3b$，即 $b=\frac{7a}{3}$

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 及 $c=8$，

得 $(\frac{7a}{3})^2=a^2+8^2-2\times a\times 8\times\frac{1}{2}$，

所以 $5a^2+9a-72=0$，

所以 $a=3$（$a=-\frac{24}{5}$ 舍去），

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

法 2：选条件②：$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由 $7a=6b\cos B$ 可知 $\cos B>0$,所以 $0<\angle B<\frac{\pi}{2}$.

所以由 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\angle B=\frac{\pi}{3}$.

所以 $7a=6b\cos B=3b$，

所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

因为 $a=\frac{3}{7}b<b$，所以 $A<B=\frac{\pi}{3}$，

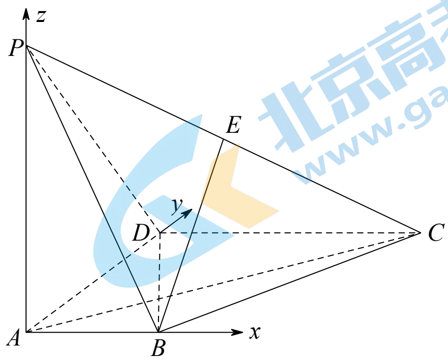
所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{13}{14}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{8\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理可得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=3$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 3\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.　【13 分】

17.解：依题意，以点 A 为原点建立空间直角坐标系（如图），可得 B $1,0,0$ ，C $2,2,0$ ，D $0,2,0$ ，P $0,0,2$.由 E 为棱 PC 的中点，得 E $1,1,1$.



（Ⅰ）证明：向量 $\overrightarrow{BE}=$ $0,1,$ $\overrightarrow{DC}=$ $2,0,0$ ，故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DC}=0$. 所以，$BE\perp DC$.　【4 分】

（Ⅱ）解：向量 $\overrightarrow{BD}=$ $-1,2,$ $\overrightarrow{PB}=$ $1,0,-2$.

设 $\vec{n}=$ x,y,z 为平面 PBD 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ x-2z=0.\end{cases}$

不妨令 $y=1$，可得 $\vec{n}=$ $2,1,1$ 为平面 PBD 的一个法向量.于是有

$$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以，直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　【9 分】

（Ⅲ）解：向量 $\overrightarrow{BC}=$ $1,2,0$ ，$\overrightarrow{CP}=$ $-2,-2,2$ ，$\overrightarrow{AC}=$ $2,2,0$ ，$\overrightarrow{AB}=$ $1,0,0$.

由点 F 在棱 PC 上，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}$，$0\le\lambda\le1$.

故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CP}=$ $1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda$.

由 $BF\perp AC$，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

因此，2 $1-2\lambda$ $+2$ $2-2\lambda$ $=0$，解得 $\lambda=\frac{3}{4}$.即 $\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设 $\overrightarrow{n_1}=\ x,y,z\ $ 为平面 FAB 的法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0.\end{cases}$

不妨令 $z=1$，可得 $\overrightarrow{n_1}=\ 0,-3,1\ $ 为平面 FAB 的一个法向量.

取平面 ABP 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=\ 0,1,0\ $，则

$$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{-3}{\sqrt{10}\times 1}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

易知，二面角 $F-AB-P$ 是锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.　　【14 分】

18. 解：（Ⅰ）十二周“水站诚信度”的平均数为 $\bar{x}=\dfrac{95+98+92+88+94+94+83+80+85+92+95+96}{12\times 100}=91\%$　　【3 分】

（Ⅱ）随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3

三个周期“水站诚信度”超过 91% 分别有 3 次，2 次，3 次

$$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{64}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{14}{64}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{30}{64}$$

$$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{32}$

$EX=0\times\dfrac{1}{32}+1\times\dfrac{7}{32}+2\times\dfrac{15}{32}+3\times\dfrac{9}{32}=2$.　　【10 分】

（III）本题为开放问题，答案不唯一，在此给出评价标准，并给出可能出现的答案情况，阅卷时按照标准酌情给分.

给出明确结论，1 分，结合已有数据，能够运用以下三个标准中的任何一个陈述得出该结论的理由，2 分.

标准 1:　会用主题活动前后的百分比变化进行阐述

标准 2：会用三个周期的诚信度平均数变化进行阐述

标准 3：会用主题活动前后诚信度变化趋势进行阐述

可能出现的作答情况举例，及对应评分标准如下：

情况一：

结论：两次主题活动效果均好.（1 分）

理由：活动举办后，“水站诚信度”由 88%→94%和 80%→85%看出，后继一周都有提升.（2 分）

情况二：

结论：两次主题活动效果都不好.（1 分）

理由：三个周期的“水站诚信度”平均数分别为 93.25%，87.75%，92%(平均数的计算近似即可)，活动进行后，后继计算周期的“水站诚信度”平均数和第一周期比较均有下降.（2 分）

情况三：

结论：第一次主题活动效果好于第二次主题活动.（1 分）

理由：第一次主题活动举办的后继一周“水站诚信度”提升百分点（94%-88%=6%）高于第二次主题活动举办的后继一周“水站诚信度”提升百分点（85%-80%=5%）.（2 分）

19. 解：$f(x)=ax-x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.　　　　【1 分】

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-x\ln x$，零点为 $x=\mathrm{e}$；　　　　【3 分】

（Ⅱ）$f'(x)=a-1-\ln x$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=e^{a-1}$.

在区间 $(0,+\infty)$ 内，

x	$(0,e^{a-1})$	e^{a-1}	$(e^{a-1},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

当 $e^{a-1}\le 1$（即 $a\le 1$）时，在 $[1,e]$ 上 $f(x)$ 单调递减，$f(x)_{\max}=f(1)=a$. 当 $e^{a-1}\ge e$（即 $a\ge 2$）时，在 $[1,e]$ 上，$f(x)$ 单调递增，$f(x)_{\max}=f(e)=ae-e$.

当 $1<e^{a-1}<e$（即 $1<a<2$）时，在 $[e^{a-1},e]$ 上 $f(x)$ 单调递增，在 $[1,e^{a-1}]$ 上 $f(x)$ 单调递减，$f(x)_{\max}=f(e^{a-1})=ae^{a-1}-e^{a-1}(a-1)=e^{a-1}$. 【10 分】

（Ⅲ）由（Ⅱ）知在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)_{\max}=f(e^{a-1})=e^{a-1}$.

构造函数 $g(a)=f(e^{a-1})-a=e^{a-1}-a$，由题意，应使 $g(a)\le 0$. 【11 分】

$g'(a)=e^{a-1}-1$.

令 $g'(a)=0$，得 $a=1$.

a	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(a)$	−	0	+
$g(a)$	↘	极小值	↗

所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$.

所以使 $g(a)\le 0$ 的实数 a 只有 $a=1$，即 a 的取值范围是 $a=1$.　　　　【15 分】

20.解:（Ⅰ）椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.所以 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.　【3 分】

（Ⅱ）因为 AB 过点 $D(1,0)$ 且垂直于 x 轴，所以可设 $A(1,y_1)$，$B(1,-y_1)$.

直线 AE 的方程为 $y-1=(1-y_1)(x-2)$.

令 $x=3$，得 $M(3,2-y_1)$. 所以直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{2-y_1+y_1}{3-1}=1$.　【7 分】

（Ⅲ）直线 BM 与直线 DE 平行.证明如下：

当直线 AB 的斜率不存在时，由（Ⅱ）可知 $k_{BM}=1$.

又因为直线 DE 的斜率 $k_{DE}=\frac{1-0}{2-1}=1$，所以 $BM//DE$.

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 1)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线 AE 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=3$，得点 $M(3,\frac{y_1+x_1-3}{x_1-2})$.

由 $\begin{cases}x^2+3y^2=3\\ y=k(x-1)\end{cases}$，得 $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{6k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-3}{1+3k^2}$.

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{\dfrac{y_1+x_1-3}{x_1-2}-y_2}{3-x_2}$.

因为 $k_{BM}-1=\dfrac{k(x_1-1)+x_1-3-k(x_1-1)(x_1-2)-(3-x_2)(x_1-2)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=\dfrac{(k-1)[-x_1x_2+2(x_1+x_2)-3)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=\dfrac{(k-1)[\dfrac{-3k^2+3}{1+3k^2}+\dfrac{12k^2}{1+3k^2}-3)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=0$,

所以 $k_{BM}=1=k_{DE}$.

所以 $BM//DE$.

综上可知，直线 BM 与直线 DE 平行　【15 分】

21．解：（Ⅰ）① $A_3:1,2,1$ 或 $1,3,1$ 或 $1,3,2$；

② $A_4:1,2,4,3$；（或 $A_4:1,3,4,3$，$A_4:1,3,5,3$）　【4 分】

（Ⅱ）当 $N=2024$ 时，$M\in\{2,3,\cdots,2023\}$.

由 $a_1=1, a_2-a_1\ge 1,\cdots,a_M-a_{M-1}\ge 1$，累加得 $a_M\ge M$；①　【5 分】

由 $a_{2024}\ge 1, a_{2023}-a_{2024}\ge 1,\cdots,a_M-a_{M+1}\ge 1$，累加得 $a_M\ge 2025-M$.②　【7 分】

①+②得 $2a_M\ge 2025$.又 $a_M\in\mathbf{N}^*$，所以 $a_M\ge 1013$.　【9 分】

所以数列 A_{2024} 的最大项 a_M 的最小值为 1013，一个满足条件的数列为

$$a_n=\begin{cases} n & (n=1,2,\cdots,1013) \\ 2026-n & (n=1014,1015,\cdots,2024) \end{cases}$$　【10 分】

（Ⅲ）由 $a_1=1, a_2-a_1\le 2,\cdots,a_M-a_{M-1}\le 2$，累加得 $a_M\le 2M-1$.

又 $M \le N-1$，所以 $a_M \le 2N-3$.　　【11 分】

同理，$b_M \le 2N-3$.

所以 $T_1 \cup T_2 \subseteq \{1,2,\cdots,2N-3\}$，$card(T_1 \cup T_2) \le 2N-3$.　　【12 分】

因为 $card(T_1)=card(T_2)=N$，

所以 $card(T_1 \cap T_2)=card(T_1)+card(T_2)-card(T_1 \cup T_2) \ge 3$.　　【14 分】

所以 $T_1 \cap T_2$ 中元素个数的最小值为 3，一组满足条件的数列为

$$a_n=\begin{cases}2n-1 & (n=1,2,\cdots,N-1)\\ 2N-4 & (n=N)\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-2 & (n=2,3,\cdots,N-1)\\ 2N-5 & (n=N)\end{cases}$$

此时 $T_1 \cap T_2=\{1,2N-4,2N-5\}$.　　【15 分】

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。