2023～2024 学年高三核心模拟卷(中)

数学(一)参考答案

1. D　复数 $z=\frac{-1+3i}{1+i}=\frac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+2i$，$\therefore \bar{z}=1-2i$，$\therefore$ 在复平面内复数 $\bar{z}$ 所对应的点为 $(1,-2)$，位于第四象限. 故选 D.

2. C　由题意知 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x|x\geqslant 2\}\neq\varnothing$，故 A 错误；$A\cup B=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x>1\}\neq \mathbf{R}$，故 B 错误；$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|-3<x<2\}$，故 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(1,2)$，故 C 正确；$\complement_{\mathbf{R}}B\not\subset A$，故 D 错误. 故选 C.

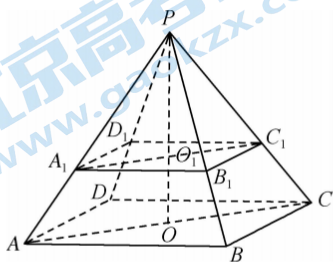
3. D　由题意知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-x+4=0$，解得 $x=4$，所以 $\boldsymbol{b}=(4,2)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{20}{2\sqrt{5}\times 5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

4. B　由 $\frac{|c|}{a}>\frac{|c|}{b}$，可得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，因为 a,b 的符号不确定，推不出 $a<b$，故 A 不满足题意；由 $ac^2<bc^2$，可得 $a<b$，反之不成立，故"$ac^2<bc^2$"是"$a<b$"的充分不必要条件，故 B 满足题意；因为 $a^3<b^3\Leftrightarrow a<b$，$3^a<3^b\Leftrightarrow a<b$，所以 C，D 不满足题意. 故选 B.

5. C　因为 $f(0)=9>7$，所以 0 不是不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解，当 $x>0$ 时，$f(x)=2^{x+1}-\frac{2}{x}$ 是单调递增函数，因为 $f(x)\leqslant 7$，即 $f(x)\leqslant f(2)$，所以 $0<x\leqslant 2$，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)\leqslant 7$ 的解集为 $-2\leqslant x<0$，所以原不等式的解集为 $[-2,0)\cup(0,2]$. 故选 C.

6. A　由题意知圆 C 的圆心坐标为 $C(2,-a)$，半径为 2. 因为圆 C 关于直线 l 对称，所以直线 l 过圆心 $C(2,-a)$，所以 $4+a-1=0$，解得 $a=-3$，故点 $C(2,3)$，所以 $|PC|=\sqrt{(2-5)^2+[3-(-1)]^2}=5$，所以 $|PA|=|PB|=\sqrt{21}$，所以 $S_{四边形APBC}=2\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}$，又 $S_{四边形APBC}=\frac{1}{2}\times 5\times|AB|=\frac{5}{2}|AB|$，所以 $\frac{5}{2}|AB|=2\sqrt{21}$，所以 $|AB|=\frac{4\sqrt{21}}{5}$. 故选 A.

7. A　由题意知多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台. 如图，O,O_1 分别为正方形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，连接 PO,AC,A_1C_1，则 O_1 在线段 PO 上，且 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，易证 $A_1O_1 /\!/ AO$，$A_1B_1 /\!/ AB$，所以 $\frac{PA_1}{PA}=\frac{PO_1}{PO}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{2}{3}$. 因为 $A_1B_1=2$，$AB=3$，$AA_1=\sqrt{2}$，所以 $PA=3\sqrt{2}$，又 $AO=\frac{AC}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $PO=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times(2^2+3^2+\sqrt{2^2\times 3^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{19\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.



8. B　设 $|F_1F_2|=2c$，连接 AB，与 x 轴交于点 M，由对称性可知 $|AF_1|=|BF_1|$，$AB\perp F_1F_2$，又 $\angle AF_1B=60°$，所以 $\triangle AF_1B$ 是正三角形，且 $\angle AF_1F_2=30°$. 因为 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，所以 $AF_1\perp AF_2$，所以 $|AF_2|=c$，$|AF_1|=\sqrt{3}c$，所以 $|AB|=|AF_1|=\sqrt{3}c$，$|AM|=\frac{1}{2}|AF_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，$|OM|=\frac{c}{2}$，所以 $A\left(\frac{1}{2}c,\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$，又点 A 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，故 $\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{b}{a}\times\frac{1}{2}c$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$. 故选 B.

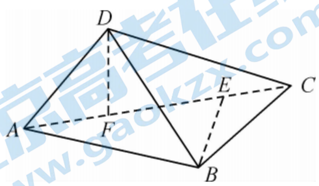
9. AD　将原数据按从小到大的顺序排列为 12，16，22，24，25，31，33，35，45，其中位数为 25，平均数是 $(12+16+22+24+25+31+33+35+45)\div 9=27$，方差是 $\frac{1}{9}\times[(-15)^2+(-11)^2+(-5)^2+(-3)^2+(-2)^2+4^2+6^2+8^2+18^2]=\frac{824}{9}$，由 $40\%\times 9=3.6$，得原数据的第 40 百分位数是第 4 个数 24. 将原数据去掉 12 和 45，得 16，22，24，25，31，33，35，其中位数为 25，平均数是 $(16+22+24+25+31+33+35)\div 7=\frac{186}{7}$，方差是 $\frac{1}{7}\times\left[\left(-\frac{74}{7}\right)^2+\left(-\frac{32}{7}\right)^2+\left(-\frac{18}{7}\right)^2+\left(-\frac{11}{7}\right)^2\right.$

$+\left(\frac{31}{7}\right)^2+\left(\frac{45}{7}\right)^2+\left(\frac{59}{7}\right)^2\Big]=\frac{1916}{49}$，由 $40\%\times7=2.8$，得新数据的第 40 百分位数是第 3 个数 24，故中位数和第 40 百分位数不变，平均数与方差改变，故 A，D 正确，B，C 错误．故选 AD．

10．BCD　由题意知 $\begin{cases}A+d=1,\\-A+d=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\d=-1,\end{cases}$ $f(x)$ 的最小正周期为 4π，即 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，所以 $\omega=\frac{1}{2}$，故 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)-1$．由 $x\in[0,5\pi]$，得 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{8\pi}{3}\right]$，所以当 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{13\pi}{6}$，即 $x=0,\frac{4\pi}{3},4\pi$ 时，$f(x)=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,5\pi]$ 内恰有 3 个零点，故 A 错误，B 正确；由 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，得 $g(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $g\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=2\sin\left[\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=0$，故 C 正确；由 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]$，得 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{11\pi}{24},\frac{\pi}{12}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故 D 正确．故选 BCD．

11．BC　由抛物线的定义知，$|QF|=\frac{p}{2}+1=2$，所以 $p=2$，故 C 的方程为 $y^2=4x$，所以 C 的准线方程为 $x=-1$，故 A 错误；设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，又 $F(1,0)$，$A(2,0)$，所以 $|MF|=1+x_1$，$|MA|^2=(x_1-2)^2+y_1^2=x_1^2-4x_1+4+4x_1=x_1^2+4$，所以 $\frac{|MA|^2}{|MF|-1}=\frac{x_1^2+4}{x_1}=x_1+\frac{4}{x_1}\geqslant2\sqrt{x_1\cdot\frac{4}{x_1}}=4$，当且仅当 $x_1=\frac{4}{x_1}$，即 $x_1=2$ 时，等号成立，故 $\frac{|MA|^2}{|MF|-1}$ 的最小值为 4，故 B 正确；设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $y^2-4my-4=0$，所以 $\Delta=16m^2+16>0$，$y_1y_2=-4$，因为 $M(2,2\sqrt{2})$，易求得 $N\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，所以$\triangle OMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times1\times3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；由以上可得 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$，又 $|MF|=1+x_1$，$|NF|=1+x_2$，所以 $\frac{1+x_2}{1+x_1}=\frac{1}{2}$，所以 $2x_2+2=x_1+1$，所以 $\frac{2}{x_1}+1=x_1$，即 $x_1^2-x_1-2=0$，解得 $x_1=2$ 或 $x_1=-1$（舍去），所以 $x_2=\frac{1}{2}$，所以 $x_1+x_2=4m^2+2=\frac{5}{2}$，解得 $m=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$，故直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}y+1$，即 $y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$ 或 $y=-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$，故 D 错误．故选 BC．

12．ACD　对于 A，由题意得 $AB^2+BC^2=AC^2$，$AD^2+CD^2=AC^2$，所以$\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$，分别过 B，D 作 AC 的垂线，垂足分别为 E，F，则 $BE=FD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EF=1$，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$，因为平面 $DAC\perp$ 平面 ABC，易证 $BE\perp FD$，所以 $\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FD}+2\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}+1+\frac{3}{4}+0+0+0=\frac{5}{2}$，所以 $BD=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故 A 正确；对于 B，因为$\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$，故 AC 的中点到 A，B，C，D 的距离相等，故球心 O 为 AC 的中点，且球 O 的半径为 1，故球 O 的表面积为 4π，为定值，故 B 错误；对于 C，假设 $AB\perp CD$，又 $AB\perp BC$，$BC\cap CD=C$，BC，$CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp$ 平面 BCD，又 $BD\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp BD$，所以$\triangle ABD$ 是以 AD 为斜边的直角三角形，所以 $AD>AB$，与已知矛盾，所以异面直线 AB 与 CD 不可能垂直，故 C 正确；对于 D，设 AD 与平面 ABC 所成角为 θ，点 D 到平面 ABC 的距离为 d，则 $\sin\theta=\frac{d}{AD}=d$，所以当点 D 到平面 ABC 的距离最大时，AD 与平面 ABC 所成角最大，当平面 $DAC\perp$ 平面 ABC 时，点 D 到平面 ABC 的距离最大，此时 $d_{\max}=DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $(\sin\theta)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta_{\max}=60^\circ$，故 D 正确．故选 ACD．



13．18　因为 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_n^rx^{\frac{n-3r}{2}}$，且 $r=6$ 时为常数项，故 $n-3\times6=0$，所以 $n=18$．

14．$-\frac{23}{25}$　因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{5}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$，所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos2(\alpha-\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=-\frac{23}{25}$．

15. $\sqrt{n}$（2 分） $\frac{44}{45}$（3 分） 由题意知，$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，且$\triangle OA_1A_2$，$\triangle OA_2A_3$，…，$\triangle OA_7A_8$ 都是直角三角形，所以 $a_1=1$，且 $a_n^2=a_{n-1}^2+1$，所以数列$\{a_n^2\}$是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $a_n^2=1+(n-1)\times1=n$，又 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{n}$. 由 $b_n=\frac{1}{(n+1)a_n+na_{n+1}}$，得 $b_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，所以 $S_{2\,024}=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2\,024}}-\frac{1}{\sqrt{2\,025}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2\,025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$.

16. $(-\infty,2\sqrt{e}+\ln 2]$ 因为关于 x 的不等式 $2e^x-2x\ln x-m>0$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立，即 $\frac{m}{2}<e^x-x\ln x$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立. 令 $f(x)=e^x-x\ln x$，则 $f'(x)=e^x-\ln x-1$，令 $g(x)=e^x-\ln x-1$，则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，易得 $g'(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，又 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$g'(1)=e-1>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $x_0=-\ln x_0$，所以当 $x\in\left(\frac{1}{2},x_0\right)$时，$g'(x_0)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x_0)>0$，所以 $g(x)$在$\left(\frac{1}{2},x_0\right)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}+x_0-1>2-1=1>0$，所以 $f'(x)>0$ 在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立，所以 $f(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，所以$\frac{m}{2}\leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln 2$，所以 $m\leqslant 2\sqrt{e}+\ln 2$，即实数 m 的取值范围是$(-\infty,2\sqrt{e}+\ln 2]$.

17. 解：(1)在$\triangle ABC$ 中，因为 $c=2b$，由正弦定理得 $\sin C=2\sin B$， …… 1 分

又 $\sin 2C=2\sin B$，所以 $\sin C=\sin 2C$， …… 2 分

所以 $\sin C=2\sin C\cos C$， …… 3 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，

解得 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 5 分

(2)在$\triangle ABC$ 中，$b=4$，$c=8$， …… 6 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $64=a^2+16-4a$， …… 7 分

即 $a^2-4a-48=0$，解得 $a=2+2\sqrt{13}$或 $a=2-2\sqrt{13}$(舍去)， …… 9 分

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times(2+2\sqrt{13})\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}+2\sqrt{39}$. …… 10 分

18. 解：(1)由频率分布直方图可知，样本中成绩不低于 110 分的学生占 $20\times(0.005+0.012\,5)\times100\%=35\%$， …… 2 分

所以若参与测试的学生共 12 000 人，估计成绩不低于 110 分的学生有 $12\,000\times35\%=4\,200$ 人. …… 4 分

(2)由频率分布直方图可知，$20\times(0.005+0.007\,5+0.010+0.012\,5+m)=1$，

解得 $m=0.015\,0$， …… 5 分

若用分层随机抽样的方法从样本中的[90，110)和[130，150]两组抽取 8 人，则来自[90，110)组的有 6 人，来自[130，150]组的有 2 人，

所以 X 的所有可能取值为 1，2，3， …… 6 分

则 $P(X=1)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=3)=\frac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$， …… 8 分

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

…… 10 分

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$. …… 12 分

19. (1)证明：取 AB 的中点 O，连接 OC,OP,OB_1，则 $OC\perp AB,OP\perp AB$.

因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AB$，

且 $OC\subset$ 平面 ABC，所以 $OC\perp$ 平面 ABB_1A_1， ………………………………………… 2 分

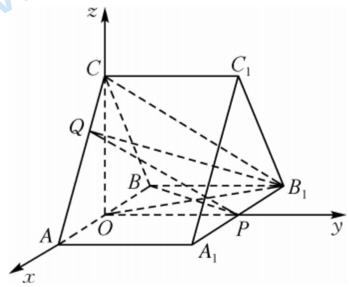
又 $BP\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $OC\perp BP$. ………………………………………… 3 分

因为 $BB_1=PB_1=OB=1,BB_1\perp AB,BB_1\perp PB_1$，

所以四边形 OBB_1P 为正方形，所以 $BP\perp OB_1$. ………………………………………… 4 分

又 $OB_1\cap OC=O,OB_1,OC\subset$ 平面 OB_1C，所以 $BP\perp$ 平面 OB_1C.

又 $B_1C\subset$ 平面 OB_1C，所以 $BP\perp B_1C$. ………………………………………… 5 分



(2)解：由(1)知 OA,OP,OC 两两垂直，故以 O 为坐标原点，以 OA,OP,OC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$B(-1,0,0)$，$P(0,1,0)$，$B_1(-1,1,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AC}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B_1P}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$. ………………………… 6 分

由 $\frac{AQ}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\overrightarrow{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0,1\right)$，所以 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},0,1\right)$，

所以 $Q\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},0,1\right)$，所以 $\overrightarrow{PQ}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},-1,1\right)$. ………………………… 8 分

设平面 PQB_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1P}\cdot\boldsymbol{n}=x=0,\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x-y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，得 $x=0,z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ………………………………………… 10 分

易知平面 BPB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

设平面 PQB_1 与平面 BPB_1 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以平面 PQB_1 与平面 BPB_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由 $S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$，得 $2S_n=a_n^2+a_n$，

当 $n=1$ 时，$2S_1=a_1^2+a_1$，即 $2a_1=a_1^2+a_1$，又 $a_1>0$，所以 $a_1=1$. ………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，

所以 $2S_n-2S_{n-1}=a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}$，即 $2a_n=a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}$，

整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0$，

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=1$， ………………………………………… 3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $a_n=1+n-1=n$. ………………… 4 分

(2)由(1)得 $b_n=\begin{cases}n,n\text{ 为奇数},\\ n\cdot 2^n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………………………… 5 分

当 n 为偶数时，$T_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$=1+2\times2^2+3+4\times2^4+\cdots+(n-1)+n\cdot2^n$

$=\underbrace{[1+3+\cdots+(n-1)]}_{\frac{n}{2}\text{项}}+\underbrace{(2\times2^2+4\times2^4+\cdots+n\cdot2^n)}_{\frac{n}{2}\text{项}}$， ………………………… 6 分

令 $A=\underbrace{1+3+\cdots+(n-1)}_{\frac{n}{2}\text{项}}$，则 $A=\frac{\frac{n}{2}(1+n-1)}{2}=\frac{n^2}{4}$， ………………………… 7 分

令 $B=\underbrace{2\times2^2+4\times2^4+\cdots+n\cdot2^n}_{\frac{n}{2}\text{项}}$，所以 $4B=\underbrace{2\times2^4+4\times2^6+\cdots+n\cdot2^{n+2}}_{\frac{n}{2}\text{项}}$，

两式相减，得 $-3B=\underbrace{8+2\times2^4+2\times2^6+\cdots+2\times2^n-n\cdot2^{n+2}}_{\frac{n}{2}+1\text{项}}$

$=8+\frac{2^5(1-2^{n-2})}{1-4}-n\times 2^{n+2}=8+\frac{2^{n+3}-32}{3}-n\times 2^{n+2}=-\frac{8}{3}-\frac{3n-2}{3}\times 2^{n+2}$,

所以 $B=\frac{8}{9}+\frac{3n-2}{9}\times 2^{n+2}$, …………………………………………………………………………… 9 分

所以 $T_n=\frac{n^2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{3n-2}{9}\times 2^{n+2}$;

当 n 为奇数时,$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{3n+1}{9}\times 2^{n+3}-(n+1)\times 2^{n+1}$

$=\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{8}{9}+\left[\frac{4(3n+1)}{9}-n-1\right]\times 2^{n+1}=\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{3n-5}{9}\times 2^{n+1}$, ……………………… 11 分

所以 $T_n=\begin{cases}\frac{n^2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{3n-2}{9}\times 2^{n+2}, n\text{ 为偶数},\\ \frac{(n+1)^2}{4}+\frac{8}{9}+\frac{3n-5}{9}\times 2^{n+1}, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ ……………………………………………… 12 分

21. 解:(1)设 C 的焦距为 $2c(c>0)$,则 $l_1:x=-c$,代入椭圆 C 的方程,

得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,所以 $P\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,$Q\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$. …………………………………… 1 分

由 $S_{四边形PA_1QA_2}=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{2b^2}{a}=2b^2=10$,得 $b^2=5$, ………………………………………… 2 分

由 $S_{\triangle PQF_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{2b^2}{a}=\frac{10c}{a}=\frac{20}{3}$,得$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$, …………………………………………………… 3 分

又 $a^2-c^2=b^2=5$,所以 $a=3,c=2$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知,$P\left(-2,\frac{5}{3}\right)$,$A_2(3,0)$,假设存在直线 l_2,使得$\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle AMA_2}}=\frac{1}{2}$.

若 l_2 不存在斜率,则 $M(0,-\sqrt{5})$,$N(0,\sqrt{5})$,故 $S_{\triangle ANP}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}-1)\times 2=\sqrt{5}-1$,

$S_{\triangle AMA_2}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}+1)\times 3=\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}$,$\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle AMA_2}}\neq\frac{1}{2}$,不合题意; ……………………………………… 5 分

若 l_2 存在斜率,设 l_2 的方程为 $y=kx+1$,

直线 PA_2 的方程为 $y=-\frac{1}{3}(x-3)=-\frac{1}{3}x+1$,所以直线 PA_2 过点 $A(0,1)$,

所以$\frac{|AP|}{|AA_2|}=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$, ………………………………………………………………………………… 6 分

所以$\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle AMA_2}}=\frac{\frac{1}{2}|AP|\cdot|AN|\cdot\sin\angle PAN}{\frac{1}{2}|AA_2|\cdot|AM|\cdot\sin\angle A_2AM}=\frac{2|AN|}{3|AM|}=\frac{1}{2}$,所以 $3|AM|=4|AN|$,

所以$\overrightarrow{AM}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}$, ………………………………………………………………………………… 7 分

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$\overrightarrow{AM}=(x_1,y_1-1)$,$\overrightarrow{AN}=(x_2,y_2-1)$,

所以 $x_1=-\frac{4}{3}x_2$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$消去 y 并整理得$(9k^2+5)x^2+18kx-36=0$,

则 $\Delta>0$,$x_1+x_2=-\frac{18k}{9k^2+5}$,$x_1x_2=-\frac{36}{9k^2+5}$, ……………………………………………… 9 分

又 $x_1=-\frac{4}{3}x_2$,所以 $x_2=\frac{54k}{9k^2+5}$,$x_2^2=\frac{27}{9k^2+5}$,

所以$\left(\frac{54k}{9k^2+5}\right)^2=\frac{27}{9k^2+5}$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{55}}{33}$, ……………………………………………… 11 分

所以 l_2 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{55}}{33}x+1$,

故存在直线 l_2，使得 $\frac{S_{\triangle ANP}}{S_{\triangle AMA_2}}=\frac{1}{2}$，且直线 l_2 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{55}}{33}x+1$. …………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，………………………………………… 1 分

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$. ………………………………………………………………………………………………… 3 分

(2) $g(x)=x^2[f(x)+1-a]-x+a=x^2\left(\ln x+\frac{a}{x^2}-a\right)$，

令 $\varphi(x)=\ln x+\frac{a}{x^2}-a$，则 $g(x)=x^2\varphi(x)$.

因为 $g(x)=x^2\varphi(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，故 $y=g(x)$ 的零点与 $y=\varphi(x)$ 的零点相同，

所以下面研究函数 $y=\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点个数.

由 $\varphi(x)=\ln x+\frac{a}{x^2}-a$，得 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^3}=\frac{x^2-2a}{x^3}$. ……………………………………………………… 5 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1)=0$，故此时 $\varphi(x)$ 有唯一零点，…………………………………………………………………………… 6 分

当 $a>0$ 时，$\varphi'(x)=\frac{x^2-2a}{x^3}=\frac{(x-\sqrt{2a})(x+\sqrt{2a})}{x^3}\ (x>0)$，

令 $\varphi'(x)<0\ (x>0)$，得 $0<x<\sqrt{2a}$，令 $\varphi'(x)>0\ (x>0)$，得 $x>\sqrt{2a}$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\sqrt{2a})=\ln\sqrt{2a}-a+\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 7 分

令 $m(t)=\ln t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$，则 $m'(t)=\frac{1}{t}-t=\frac{(1+t)(1-t)}{t}\ (t>0)$，

易得 $m(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $m(1)=0$，所以当 $t\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时，$m(t)<0$，……………………………………………………………… 8 分

①当 $\sqrt{2a}=1$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$，此时 $\varphi(x)$ 有唯一零点 $x=\sqrt{2a}=1$； ………………………… 9 分

②当 $0<\sqrt{2a}<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，且 $\varphi(\sqrt{2a})<0$.

因为 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(\sqrt{2a},+\infty)$ 上有唯一的零点 $x=1$.

$\varphi\left(\frac{a}{1-a}\right)=\ln\frac{a}{1-a}+a\left[\frac{(1-a)^2}{a^2}-1\right]=\ln\frac{a}{1-a}+\frac{1}{a}-2$，

令 $\frac{a}{1-a}=k\ (k<1)$，则 $a=\frac{k}{1+k}$，

所以 $\varphi(k)=\ln k+\frac{1}{k}-1=f(k)$，由(1)知，$\varphi(k)>0$，又 $\varphi(\sqrt{2a})<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left[\frac{a}{1-a},\sqrt{2a}\right)$ 上存在唯一零点，不妨设 $x=x_1$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$ 上有唯一的零点 $x=x_1$，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点；…………………………………………………………………………………… 10 分

③当 $\sqrt{2a}>1$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，且 $\varphi(\sqrt{2a})<0$，$\varphi(1)=0$，$e^a>e^{\frac{1}{2}}>1$，$\varphi(e^a)=\frac{a}{e^{2a}}>0$，

由函数零点存在定理可得 $y=\varphi(x)$ 在 $(\sqrt{2a},e^a)$ 上有唯一零点，

故 $\varphi(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$，$(\sqrt{2a},+\infty)$ 上各有一个唯一零点. ……………………………………………………… 11 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 有唯一零点；当 $a>0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 有两个零点. ………………… 12 分