2018 北京市昌平区高三（上）期末

数　　学(文)

2018. 1

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A=\{x|-2<x<1\}$， $B=\{x|x(x-3)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|x<1或x>3\}$　　　　B. $\{x|-2<x<1\}$

C. $\{x|-2<x<0或x>3\}$　　　　D. $\{x|-2<x<0\}$

2. $|\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}|=$

A. $-\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. -1　　　　D. 1

3. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y\le 1, \\ x-y\le 1, \\ x\ge 0, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为

A. 4　　　　B. 2　　　　C. 1　　　　D. -2

4. 已知 a,b 是实数，则“ $a<0$，且 $b<0$”是“ $ab(a-b)>0$”的

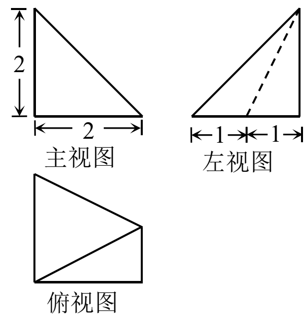
A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

5. 直线 $y=kx+2$ 被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长是

A. 2　　　　B. 4　　　　C. $2\sqrt{6}$　　　　D. 6

6. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积为



A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 6

7. 《九章算术》中有如下问题：“今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？”则可求得该女子第 2 天所织布的尺数为

A. $\dfrac{40}{31}$　　　　B. $\dfrac{20}{31}$　　　　C. $\dfrac{10}{31}$　　　　D. $\dfrac{5}{31}$

8. 已知点 $A(-2,0)$， $B(2,0)$，$P(x_0,y_0)$ 是直线 $y=x+4$ 上任意一点，以 A，B 为焦点的椭圆过点 P，记椭圆离心率 e 关于 x_0 的函数为 $e(x_0)$，那么下列结论正确的是

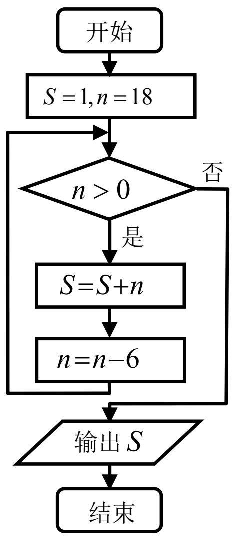
A. e 与 x_0 一一对应　　　　B. 函数 $e(x_0)$ 是增函数

C. 函数 $e(x_0)$ 无最小值，有最大值　　　　D. 函数 $e(x_0)$ 有最小值，无最大值

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 某校高一（1）班有学生 36 人，高一（2）班有学生 42 人，现在要用分层抽样的方法从两个班抽出 13 人参加军训表演，则高一（2）班被抽出的人数是__________.



10. 执行如图所示的程序框图，

输出的 S 值为__________.

11. 已知函数 $f(x)=\sin x\cos x$，那么 $f(x)$ 的最小正周期是__________.

12. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的左焦点为抛物线 $y^2=-12x$ 的焦点，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则实数 $a=$__________.

13. 已知 $\mathrm{Rt}\Delta ABC$，$AB=AC=1$，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为__________；$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最大值为__________.

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+4, x\le 3,\\ \log_a x, x>3\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\ne 1$），函数 $g(x)=f(x)-k$.

① 若 $a=\dfrac{1}{3}$，函数 $g(x)$ 无零点，则实数 k 的取值范围是__________；

② 若 $f(x)$ 有最小值，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. （本小题满分 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为 1，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $b_n=2^{a_n+5}+n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16. （本小题满分 13 分）

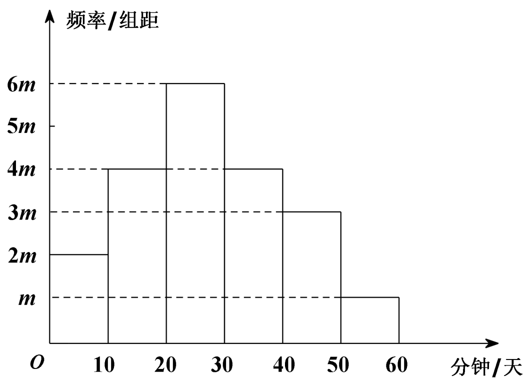
在 ΔABC 中，$\sqrt{3}a\sin C = c\cos A$．

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$，$b+c=2+2\sqrt{3}$，求 a 的值．

17. （本小题满分 13 分）

随着“中华好诗词”节目的播出，掀起了全民诵读传统诗词经典的热潮. 某大学社团为调查大学生对于“中华诗词”的喜好，在该校随机抽取了 40 名学生，记录他们每天学习“中华诗词”的时间，并整理得到如下频率分布直方图：



根据学生每天学习“中华诗词”的时间，可以将学生对于“中华诗词”的喜好程度分为三个等级 ：

学习时间 t（分钟/天）	$t<20$	$20\le t<50$	$t\ge 50$
等级	一般	爱好	痴迷

(Ⅰ) 求 m 的值；

(Ⅱ) 从该大学的学生中随机选出一人，试估计其“爱好”中华诗词的概率；

(Ⅲ) 假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，试估计样本中 40 名学生每人每天学习“中华诗词”的时间.

18.（本小题满分 14 分）

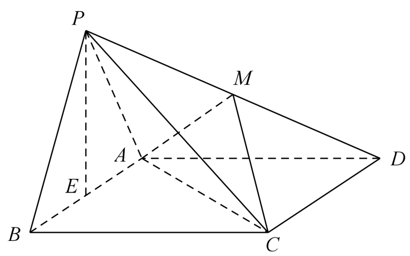
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，ΔPAB 为正三角形，且侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$． E，M 分别为线段 AB，PD 的中点．

（I）求证：$PE\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求证：$PB//$ 平面 ACM；

（III）在棱 CD 上是否存在点 G，

使平面 $GAM\perp$ 平面 $ABCD$，请说明理由．



19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$A(a,0), B(0,1)$，圆 O：$x^2+y^2=1$ 的圆心到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 与圆 O 相切，且与椭圆 C 相交于 P,Q 两点，求 $|PQ|$ 的最大值．

20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2)$， $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$．

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最大值和最小值.

数学试题答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	D	B	A	C	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．)

9. 7　　10. 37　　11. π

12. $\sqrt{3}$　　13. -1 ； 2　　14. $[-1,1)$ ； $(1,3]$

三、解答题(共 6 小题，共 80 分.)

15.（共 13 分）

解：（Ⅰ）在等差数列$\{a_n\}$中，因为a_1,a_3,a_4成等比数列，

所以 $a_3{}^2=a_1a_4$，

即 $(a_1+2d)^2=a_1{}^2+3a_1d$，

解得$a_1d+4d^2=0$.

因为$d=1$,

所以$a_1=-4$,

所以数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=n-5$.　　……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a_n=n-5$,

所以$b_n=2^{a_n+5}+n=2^n+n$. 得

$$\begin{aligned}S_n&=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\\&=(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)+(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(1+n)}{2}\\&=2^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}-2\end{aligned}$$

……………13 分

16. （共 13 分）

解：(I) 因为$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，所以$\cos A\neq 0$，

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\sqrt{3}\sin A\cdot\sin C=\sin C\cdot\cos A$．

又因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，

所以 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

又因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$． ……………6 分

（II）由 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{4}bc=\sqrt{3}$，得 $bc=4\sqrt{3}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{6}$，

即 $a^2=(b+c)^2-2bc-\sqrt{3}bc=(b+c)^2-8\sqrt{3}-12$，

因为 $b+c=2+2\sqrt{3}$，

解得 $a^2=4$．

因为 $a>0$，

所以 $a=2$． ……………13 分

17. （共 13 分）

解：(Ⅰ) 由图知，$(m+2m+3m+4m\times 2+6m)\times 10=1$，得 $m=0.005$． ……3 分

(Ⅱ) 由图知，该大学随机选取的 40 名学生中，“爱好”中华诗词的频率为 $(0.030+0.020+0.015)\times 10=65\%$，

所以从该大学中随机选出一人，“爱好”中华诗词的概率为 0.65． ……………6 分

(Ⅲ) 由该大学学习“中华诗词”时间的频率分布直方图及题意，得该大学选取的 40 名学生学习“中华诗词”时间的数据分组与频率分布表：

组号	1	2	3	4	5	6
分组	$[0,10]$	$(10,20]$	$(20,30]$	$(30,40]$	$(40,50]$	$(50,60]$
频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

由题意可得，

$10\times 0.1+20\times 0.2+30\times 0.3+40\times 0.2+50\times 0.15+60\times 0.05=32.5$（分钟）

故估计样本中 40 名学生每人每天学习“中华诗词”的时间为 32.5 分钟. ………13 分

18. （共 14 分）

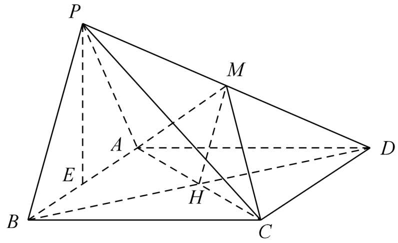
（I）证明：因为 ΔPAB 为正三角形，E 为 AB 的中点，

所以 $PE\perp AB$，

又因为面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$，面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$， $PE\subset$ 平面 PAB.

所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. ……………… 4 分

（II）证明：连接 BD 交 AC 于 H 点，连接 MH，



因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以点 H 为 BD 的中点.

又因为 M 为 PD 的中点，

所以 $MH\,//\,BP$.

又因为 $BP\not\subset$ 平面 ACM, $MH\subset$ 平面 ACM.

所以 $PB\ //$ 平面 ACM. ……………8 分

（III）在棱 CD 上存在点 G，G 为 CD 的中点时，平面 $GAM\perp$ 平面 $ABCD$. …… 9 分

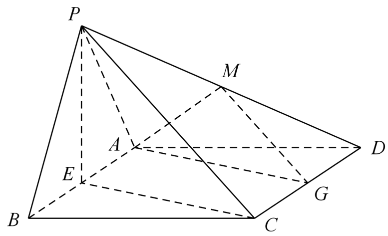
证明：（法一）连接 EC .

由（I）得，$PE\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PE\perp CD$，

因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，E 为 AB 的中点，

所以 ΔABC 是正三角形，$EC\perp AB$.



因为 $CD\,//\,AB$，

所以 $EC\perp CD$.

因为 $PE\cap EC=E$，

所以 $CD\perp$ 平面 PEC，

所以 $CD\perp PC$.

因为 M，G 分别为 PD，CD 的中点，

所以 $MG//PC$，

所以 $CD\perp MG$.

因为 $ABCD$ 是菱形，$\angle ADC=60°$，

所以 ΔADC 是正三角形.

又因为 G 为 CD 的中点，

所以 $CD\perp AG$，

因为 $MG\cap AG=G$，

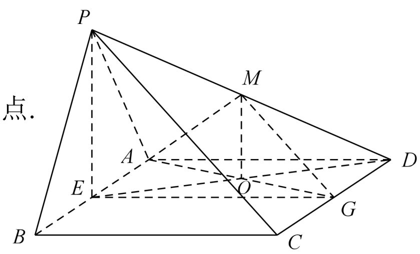
所以 $CD\perp$ 平面 MAG，

因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $MAG\perp$ 平面 $ABCD$. ……………14 分

（法二）：连接 ED，AG 交于点 O. 连接 EG, MO.

因为 E，G 分别为 AB，CD 边的中点.



所以 $AE\,//\,DG$ 且 $AE=DG$，

即四边形 $AEGD$ 为平行四边形，O 为 ED 的中点.

又因为 M 为 PD 的中点，

所以 $MO\,//\,PE$.

由（I）知 $PE\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $MO\perp$平面 $ABCD$.

又因为 $MO\subset$平面 GAM，

所以 平面 $GAM\perp$平面 $ABCD$ ……………14 分

19. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由已知得，直线 AB 的方程为: $\frac{x}{a}+y=1$,即：$x+ay-a=0$.

由 $a>1$，得点 O 到直线 AB 的距离为：$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=\sqrt{3}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……………5 分

（Ⅱ）①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=\pm 1$，

代入 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，此时 $|PQ|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

因为直线 l 与圆 O 相切，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 即 $m^2=1+k^2$

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，消去 y，整理得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3(m^2-1)=0$

所以 $\Delta=36k^2m^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(1+3k^2-m^2)=24k^2$,

由 $\Delta>0$, 得 $k\neq 0$，

设点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2},x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$，

所以 $|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\times\frac{\sqrt{24k^2}}{1+3k^2}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{(1+k^2)\cdot 2k^2}}{1+3k^2}$

$$\leq 2\sqrt{3}\times\frac{\frac{(1+k^2)+2k^2}{2}}{1+3k^2}=\sqrt{3},$$

当且仅当 $1+k^2=2k^2$, 即 $k=\pm 1$ 时，$|PQ|$ 有最大值为 $\sqrt{3}$.

综上所述，$|PQ|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$. …………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（I） $f'(x)=e^x(x^2+2x+2)$，$f'(0)=2$，

又 $f(0)=2$.

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x+2$. …………… 4 分

（II） $h(x)=f(x)-g(x)=e^x(x^2+2)-\frac{x}{e}$

设 $p(x)=h'(x)=e^x(x^2+2x+2)-\frac{1}{e}$，

则 $p'(x)=e^x(x^2+4x+4)=e^x(x+2)^2\geq 0$，

则 $p(x)$在区间 $[-2,0]$ 上单调递增，又 $p(-1)=0$，

当 $x\in[-2,-1]$ 时， $p(x)=h'(x)<0$；

当 $x\in[-1,0]$ 时， $p(x)=h'(x)>0$.

所以函数 $h(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递减，在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，

又因为 $h(-2)=\frac{6+2e}{e^2}<\frac{2e^2}{e^2}=2=h(0)$，

所以 $h(x)_{\min}=h(-1)=\frac{4}{e},h(x)_{\max}=h(0)=2$. ……………13 分

.