

2019 北京市西城区高一（下）期末

数 学

2019.7

试卷满分：150 分 考试时间：120 分钟

A 卷[立体几何初步与解析几何初步]

本卷满分：100 分

题号	一	二	三			本卷总分
			17	18	19	
分数						

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 已知点 $P(1,2)$ ， $Q(3,0)$ ，则线段 PQ 的中点为 ()

- (A) (4,2) (B) (2,1) (C) (2,4) (D) (1,2)

2. 直线 l 经过点 $A(0,-1)$ ， $B(1,1)$ ，则直线 l 的斜率是 ()

- (A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

3. 下列直线中，与直线 $3x + y - 2 = 0$ 平行的是 ()

- (A) $3x - y = 0$ (B) $x - 3y = 0$
(C) $3x + y = 0$ (D) $x + 3y = 0$

4. 在空间中，给出下列四个命题：

- ①平行于同一个平面的两条直线互相平行；②垂直于同一个平面的两个平面互相平行；
③平行于同一条直线的两条直线互相平行；④垂直于同一个平面的两条直线互相平行。

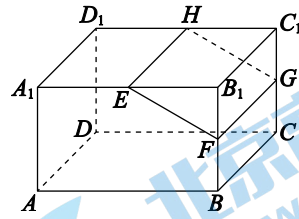
其中正确命题的序号是 ()

- (A) ①② (B) ①③
(C) ②④ (D) ③④

5. 圆 $x^2 - 6x + y^2 - 16 = 0$ 的周长是 ()

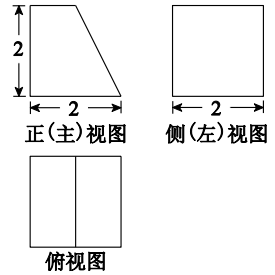
- (A) 25π (B) 10π (C) 8π (D) 5π

6. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 若 E, F, G, H 分别是棱 $A_1B_1, BB_1, CC_1, C_1D_1$ 的中点, 则必有 ()



- (A) $BD_1 \parallel GH$ (B) $BD \parallel EF$
 (C) 平面 $EFGH \parallel$ 平面 $ABCD$ (D) 平面 $EFGH \parallel$ 平面 A_1BCD_1

7. 棱长为 2 的正方体被一个平面截去一部分后, 剩余几何体的三视图如图所示, 则截去的几何体是 ()



- (A) 三棱锥 (B) 三棱柱
 (C) 四棱锥 (D) 四棱柱

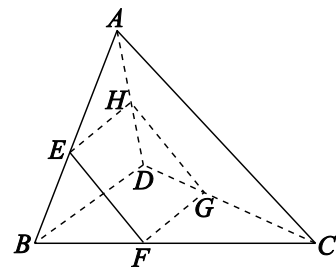
8. 已知点 $A(0,1)$, 点 B 在直线 $x+y+1=0$ 上运动. 当 $|AB|$ 最小时, 点 B 的坐标是 ()

- (A) $(-1,1)$ (B) $(-1,0)$
 (C) $(0,-1)$ (D) $(-2,1)$

9. 已知圆 O_1 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 圆 O_2 的方程为 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, 那么这两个圆的位置关系不可能是 ()

- (A) 外离 (B) 外切
 (C) 内含 (D) 内切

10. 如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, 两条对角线 AC, BD 互相垂直, 且长度分别为 4 和 6, 平行于这两条对角线的平面与边 AB, BC, CD, DA 分别相交于点 E, F, G, H . 记四边形 $EFGH$ 的面积为 y , 设 $\frac{BE}{AB} = x$, 则 ()



- (A) 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $(0,4]$
 (B) 函数 $y = f(x)$ 为偶函数
 (C) 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{2}{3})$ 上单调递减
 (D) 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x) = f(1-x)$

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

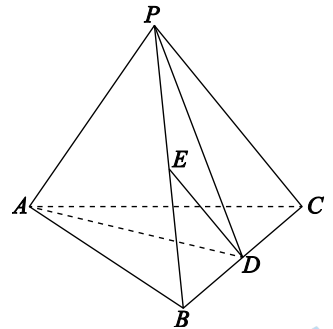
11. 直线 $y = \sqrt{3}x + 1$ 的倾斜角的大小是_____.
12. 对于任意实数 k , 直线 $y = kx + 1$ 经过的定点坐标为_____.
13. 圆柱的高是 2, 底面圆的半径是 1, 则圆柱的侧面积是_____.
14. 圆心为 $(1, 0)$, 且与直线 $x - y = 0$ 相切的圆的方程是_____.
15. 设三棱锥 $P - ABC$ 的三条侧棱两两垂直, 且 $PA = PB = PC = 1$, 则三棱锥 $P - ABC$ 的体积是_____.
16. 已知点 $M(-1, 0)$, $N(1, 0)$. 若直线 $l: x + y - m = 0$ 上存在点 P 使得 $PM \perp PN$, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 3 小题, 共 36 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PB = PC$, $AB = AC$. D , E 分别是 BC , PB 的中点.

- (I) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAC ;
- (II) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 PAD ;
- (III) 在图中作出点 P 在底面 ABC 的正投影, 并说明理由.



18. (本小题满分 12 分)

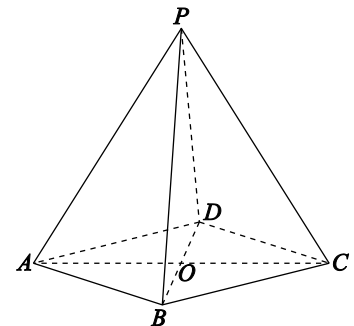
已知圆心为 $C(4, 3)$ 的圆经过原点 O .

- (I) 求圆 C 的方程;
- (II) 设直线 $3x - 4y + 15 = 0$ 与圆 C 交于 A , B 两点, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC , BD 交于点 O .

- (I) 若 $AC \perp PD$, 求证: $AC \perp$ 平面 PBD ;
- (II) 若平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, 求证: $PB = PD$;
- (III) 在棱 PC 上是否存在点 M (异于点 C), 使得



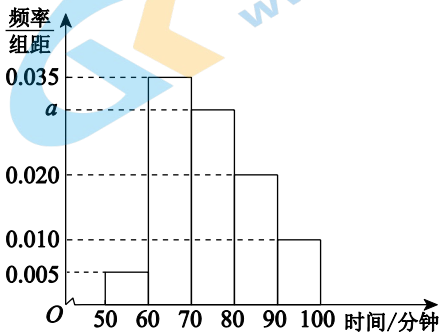
$BM \parallel$ 平面 PAD ? 说明理由.

题号	一	二			本卷总分
		6	7	8	
分数					

一、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。把答案填在题中横线上。

1. 某公司有大量客户，且不同年龄段客户对其服务的评价有较大差异。为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是_____。

2. 从某校 3000 名学生中随机抽取若干学生，获得了他们一天课外阅读时间（单位：分钟）的数据，整理得到频率分布直方图如下。则估计该校学生中每天阅读时间在 [70,80) 的学生人数为_____。



3. 设正方形 $ABCD$ 的边长是 2，在该正方形区域内随机取一个点，则此点到点 A 的距离大于 2 的概率是_____。

4. 从分别写有 1, 2, 3, 4 的 4 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为_____。

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 2$ ， $c = \sqrt{2}$ ， $\sin A + \cos A = 0$ ，则角 B 的大小为_____。

二、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

6. (本小题满分 10 分)

为缓解交通运行压力，某市公交系统实施疏堵工程。现调取某路公交车早高峰时段全程运输时间（单位：分钟）的数据，从疏堵工程完成前的数据中随机抽取 5 个数据，记为 A 组；从疏堵工程完成后的数据中随机抽取 5 个数据，记为 B 组。

A 组：128 100 151 125 120

B 组：100 102 97 101 100

(I) 该路公交车全程运输时间不超过100分钟，称为“正点运行”。从A，B两组数据中各随机抽取一个数据，求这两个数据对应的两次运行中至少有一次“正点运行”的概率；

(II) 试比较A，B两组数据方差的大小（不要求计算），并说明其实际意义。

7. (本小题满分10分)

已知 $\triangle ABC$ 同时满足下列四个条件中的三个：

① $A = \frac{\pi}{3}$ ； ② $\cos B = -\frac{2}{3}$ ； ③ $a = 7$ ； ④ $b = 3$ 。

(I) 请指出这三个条件，并说明理由；

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积。

8. (本小题满分10分)

在直角坐标系 xOy 中，已知圆 $M: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 及其上一点A。

(I) 求 $|OA|$ 的最大值；

(II) 设 $A(3,2)$ ，点 T 在 x 轴上。若圆 M 上存在两点 P 和 Q ，使得 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$ ，求点 T 的横坐标的取值范围。

2019 北京市西城区高一（下）期末数学参考答案

A 卷[立体几何初步与解析几何初步] 满分 100 分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. B 2. A 3. C 4. D 5. B 6. D 7. B 8. B 9. C 10. D.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 60° 12. (0,1) 13. 4π 14. $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 15. $\frac{1}{6}$ 16. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.

17. (本小题满分 12 分)

(I) 证明：因为 D, E 分别是 BC, PB 的中点，

所以 $DE \parallel PC$3 分

因为 $DE \not\subset$ 平面 PAC ,4 分

所以 $DE \parallel$ 平面 PAC5 分

(II) 证明：因为 $PB = PC, AB = AC, D$ 是 BC 的中点，

所以 $PD \perp BC, AD \perp BC$8 分

所以 $BC \perp$ 平面 PAD9 分

所以平面 $ABC \perp$ 平面 PAD10 分

(III) 解：在 $\triangle PAD$ 中，过 P 作 $PO \perp AD$ 于 O ，则点 O 为点 P 在底面 ABC 的正投影.

理由如下：

由 (II) 知平面 $ABC \perp$ 平面 PAD ，且平面 $ABC \cap$ 平面 $PAD = AD$ ，

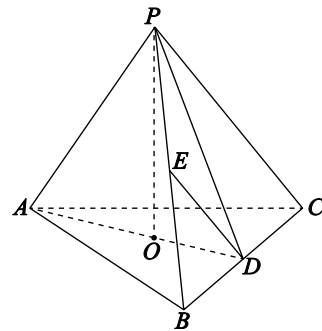
又 $PO \subset$ 平面 $PAD, PO \perp AD$ ，

所以 $PO \perp$ 平面 ABC ，

即点 O 为点 P 在底面 ABC 的正投影.12 分

18. (本小题满分 12 分)

(I) 解：圆 C 的半径为 $|OC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,2 分



从而圆 C 的方程为 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. ……………4 分

(II) 解: 作 $CD \perp AB$ 于 D , 则 CD 平分线段 AB . ……………5 分

在直角三角形 ADC 中, 由点到直线的距离公式, 得

$$|CD| = \frac{|3 \times 4 - 4 \times 3 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3, \text{ ……………7 分}$$

$$\text{所以 } |AD| = \sqrt{|AC|^2 - |CD|^2} = 4. \text{ ……………9 分}$$

$$\text{所以 } |AB| = 2|AD| = 8. \text{ ……………10 分}$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}|AB||CD| = 12. \text{ ……………12 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 因为 底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $AC \perp BD$. ……………2 分

因为 $AC \perp PD$, ……………3 分

所以 $AC \perp$ 平面 PBD . ……………4 分

(II) 证明: 连接 PO .

由 (I) 可知 $AC \perp BD$.

因为平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $BD \perp$ 平面 PAC . ……………5 分

因为 $PO \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BD \perp PO$. ……………6 分

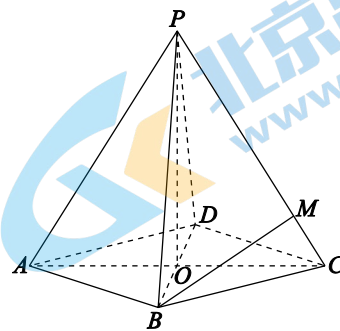
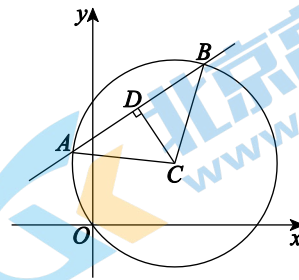
因为 底面 $ABCD$ 是菱形,

所以 $BO = DO$. ……………7 分

所以 $PB = PD$. ……………8 分

(III) 解: 不存在, 证明如下.

假设存在点 M (异于点 C), 使得 $BM \parallel$ 平面 PAD .



因为菱形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, 且 $BC \not\subset$ 平面 PAD ,

所以 $BC \parallel$ 平面 PAD .

又因为 $BM \subset$ 平面 PBC , 所以 平面 $PBC \parallel$ 平面 PAD11 分

这显然矛盾!

从而, 棱 PC 上不存在点 M , 使得 $BM \parallel$ 平面 PAD12 分

B 卷 [学期综合] 满分 50 分

一、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

1. 分层抽样 2. 9003. $\frac{4-\pi}{4}$ 4. $\frac{3}{8}$ 5. $\frac{\pi}{12}$

二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 30 分.

6. (本小题满分 10 分)

(I) 解: 从 A, B 两组数据中各随机抽取一个数据, 所有不同的取法共有 $5 \times 5 = 25$ 种.

.....2 分

从 A 组中取到 128, 151, 125, 120 时, B 组中符合题意的取法为 100, 97, 100,

共 $4 \times 3 = 12$ 种;3 分

从 A 组中取到 100 时, B 组中符合题意的取法为 100, 102, 97, 101, 100,

共 $1 \times 5 = 5$ 种;4 分

因此符合题意的取法共有 $12 + 5 = 17$ 种,5 分

所以该路公交车至少有一次“正点运行”的概率 $P = \frac{17}{25}$7 分

(II) 解: B 组数据的方差小于 A 组数据的方差. 说明疏堵工程完成后, 该路公交车全程

运输时间更加稳定, 而且“正点运行”率高, 运行更加有保障.10 分

7. (本小题满分 10 分)

(I) 解: $\triangle ABC$ 同时满足①, ③, ④. 理由如下:1 分

若 $\triangle ABC$ 同时满足①, ②.

因为 $\cos B = -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$, 且 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B > \frac{2}{3}\pi$.

所以 $A + B > \pi$, 矛盾. ……………3分

所以 $\triangle ABC$ 只能同时满足③, ④.

所以 $a > b$, 所以 $A > B$, 故 $\triangle ABC$ 不满足②. ……………5分

故 $\triangle ABC$ 满足①, ③, ④.

(II) 解: 因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, ……………6分

所以 $7^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \frac{1}{2}$.

解得 $c = 8$, 或 $c = -5$ (舍). ……………8分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = 6\sqrt{3}$. ……………10分

8. (本小题满分 10 分)

(I) 解: 圆 $M: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 的圆心为 $M(3, 4)$, 半径 $r = 2$.

根据平面几何知识得 $|OA|$ 的最大值为 $|OM| + r = \sqrt{3^2 + 4^2} + 2 = 7$. ……………3分

(II) 解: 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), T(t, 0)$.

因为 $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TQ}$,

所以 $(3-t, 2) + (x_1-t, y_1) = (x_2-t, y_2)$,

$$\text{即 } \begin{cases} x_2 = x_1 + 3 - t, \\ y_2 = y_1 + 2. \end{cases} \text{①}$$

因为点 Q 在圆 M 上,

$$\text{所以 } (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 4)^2 = 4. \text{②}$$

将①代入②, 得 $(x_1 - t)^2 + (y_1 + 2)^2 = 4$. ……………6分

于是点 $P(x_1, y_1)$ 既在圆 M 上, 又在圆 $(x-t)^2 + (y-2)^2 = 4$ 上,

从而圆 $M: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 与圆 $(x-t)^2 + (y-2)^2 = 4$ 有公共点. ……………8分

所以 $2-2 \leq \sqrt{(t-3)^2 + (4-2)^2} \leq 2+2$, ……………9分

解得 $3-2\sqrt{3} \leq t \leq 3+2\sqrt{3}$. ……………10分

