2024届高三数学试题(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x+1>0\}$，$B=\{x|x^2<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{x|-2<x<2\}$

C. $\{x|-2<x<1\}$　　D. $\{x|1<x<2\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{-1+ai}{1+i}(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $a=$

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{6}$

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

4. 已知 l,m,n 是三条不重合的直线，α,β,γ 是三个不重合的平面，则下列结论正确的是

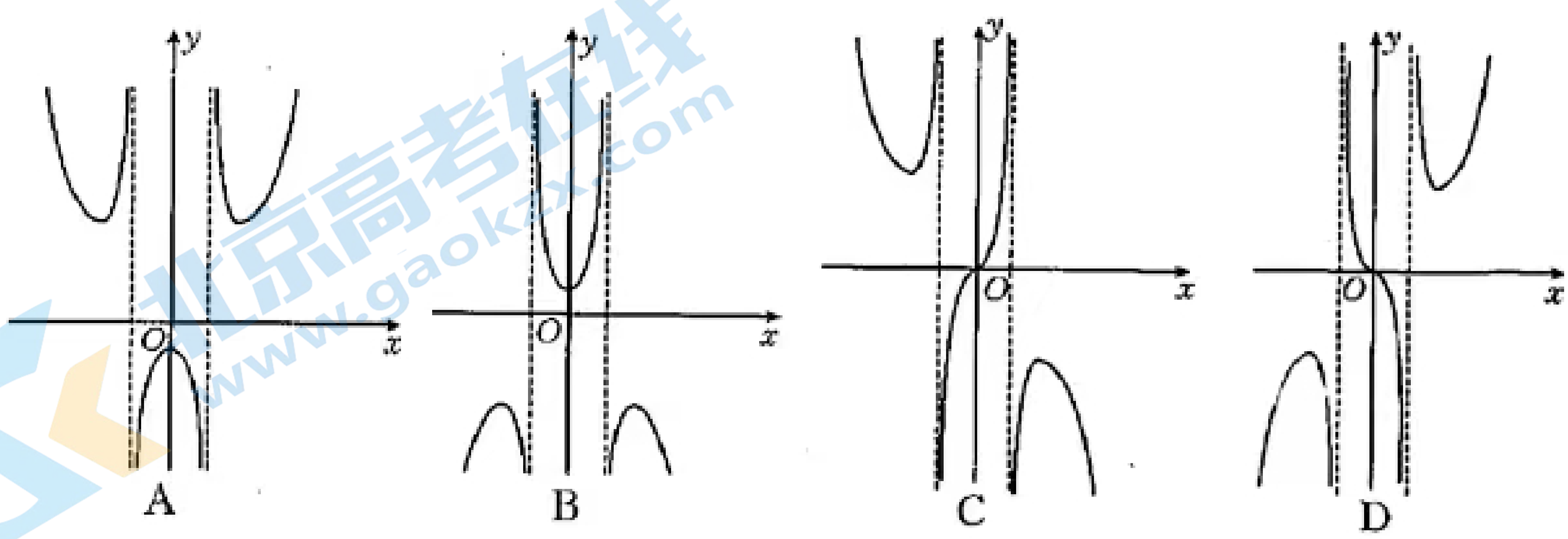
A. 若 $l/\!/\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，则 $l/\!/\beta$

B. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m/\!/l$，则 $m/\!/\alpha$ 且 $m/\!/\beta$

C. 若 $l\perp m$，$l\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $l\perp\alpha$

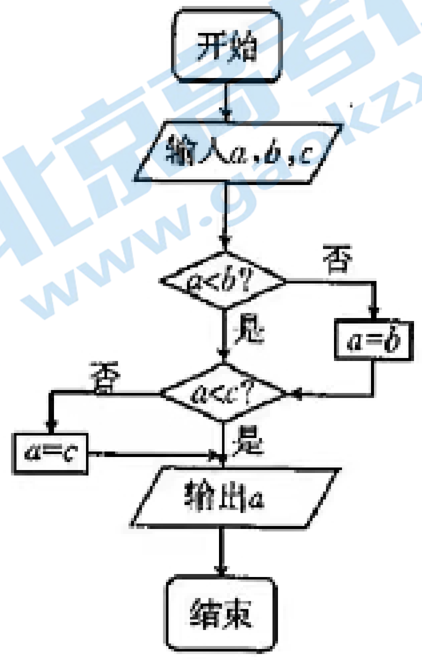
D. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $l\perp\gamma$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{x^2-1}$ 的图象大致为



关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

6. 执行如图所示的程序框图，若输入的值为 $a=0.3^{0.2}$，$b=0.2^{0.3}$，$c=-\log_{0.2}0.3$，则输出的值为



A. $\log_{0.2}0.3$

B. $0.3^{0.2}$

C. $0.2^{0.3}$

D. $-\log_{0.2}0.3$

7. 已知集合 $U=\{x\in \mathbf{Z}|1\leqslant x\leqslant 5\}$，非空集合 $A\subseteq U$，且 A 中所有元素之和为奇数，则满足条件的集合 A 共有

A. 12 个　　B. 14 个

C. 16 个　　D. 18 个

8. 已知函数 $f(x)=2^x+\sqrt{x}-4$，若存在 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，则下列结论不正确的是

A. $x_1<1$

B. $x_2>1$

C. $f(x)$在(x_1,x_2)内有零点

D. 若 $f(x)$在$(x_1,\frac{x_1+x_2}{2})$内有零点，则 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>0$

9. 当两个变量呈非线性相关时，有些可以通过适当的转换进行线性相关化，比如反比例关系 $y=\frac{k}{x}$，可以设一个新的变量 $z=\frac{1}{x}$，这样 y 与 z 之间就是线性关系. 下列表格中的数据可以用非线性方程 $y=0.14x^2+\hat{b}$ 进行拟合，

x	1	2	3	4	5	6
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

用线性回归的相关知识，可求得 $\hat{b}$ 的值约为

A. 2.98　　B. 2.88　　C. 2.78　　D. 2.68

10. 若函数 $f(x)=2\sin^2(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})-2(\omega>0)$在$[0,\pi]$上恰有两个零点，则 ω 的取值范围为

A. $[\frac{5}{3},\frac{8}{3})$　　B. $(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$　　C. $[\frac{13}{6},\frac{25}{6})$　　D. $(\frac{13}{6},\frac{25}{6}]$

11. 我们把形如 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和 $C_2:\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$的两个双曲线叫做共轭双曲线. 设共轭双曲线 C_1，C_2 的离心率分别为 e_1，e_2，则当$\frac{2}{e_1}+\frac{3}{e_2}$取得最大值时，$e_1=$

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{13}$

12. 当 $x>0$ 时，$ae^{2x}\geqslant\ln\frac{x}{ae^x}$恒成立，则 a 的取值范围为

A. $(0,\frac{1}{2e}]$　　B. $(0,\frac{1}{e}]$　　C. $[\frac{1}{e},+\infty)$　　D. $[\frac{1}{2e},+\infty)$

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4\leqslant 0, \\ x-1\geqslant 0, \\ y-1\geqslant 0, \end{cases}$ 则其表示的封闭区域的面积为____▲____．

14．已知抛物线 $E:y^2=8x$ 的焦点为 F，$M(x_0,y_0)$是 E 上一点，且 $|MF|=\frac{4x_0}{3}$，则 $x_0=$____▲____．

15．一个封闭的玻璃圆锥容器 AO 内装有部分水（如图 1），此时水面与线段 AO 交于点 B，将其倒置后（如图 2），水面与线段 AO 还是交于点 B，则$(\frac{AB}{AO})^3=$____▲____．

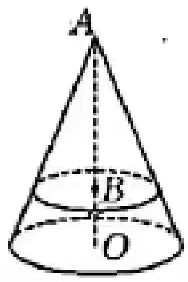


图 1

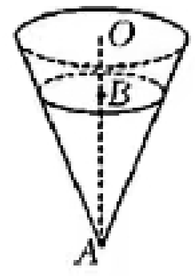


图 2

16．在$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，延长 CB 至点 E，使得$\angle ACB=2\angle CEA$，若 $AB>AC$，则$\frac{AE}{BE}$的取值范围为____▲____．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n\cdot 2^{n+1}$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n}{2n+2}\}$的前 n 项和 T_n．

18．（12 分）

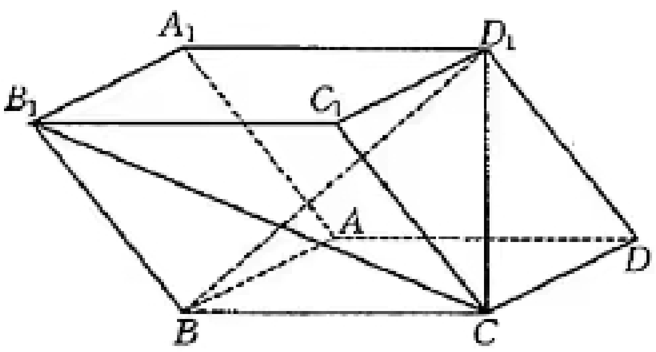
为了防止注册账号被他人非法登录，某系统在账号登录前，要先输入一个验证码．当连续 3 次输入错误验证码时，该用户账号将被冻结，需本人持有效证件进行解冻．已知该系统登入设置的每个验证码由有序数字串 $abcd$ 组成，其中 $a,b,c,d\in\{0,1,2,3\}$，某人非法登录一个账号，任选一组验证码输入，直到输入正确的验证码或账号被冻结．

（1）求这个人第一次输入的验证码恰有两位正确的概率；

（2）设这个人输入验证码的次数为 X，求 X 的分布列和期望．

19．（12 分）

如图，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均是边长为 2 的正方形．



（1）证明：$BD_1\perp B_1C$．

（2）若$\angle B_1BC=120^\circ$，求二面角 $A\text{-}BC\text{-}D_1$ 的余弦值．

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信

20.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，且椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{6}$.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)设 P 是椭圆 C 上第一象限内的一点，A 是椭圆 C 的左顶点，B 是椭圆 C 的上顶点，直线 PA 与 y 轴相交于点 M，直线 PB 与 x 轴相交于点 N. 记 $\triangle ABN$ 的面积为 S_1，$\triangle AMN$ 的面积为 S_2. 证明：$|S_1-S_2|$ 为定值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=2e^x+ax$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的根 x_1,x_2，且 $0<x_1<x_2$，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，证明：$f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.

(二)选考题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta,\\ y=\cos\theta-\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha,\\ y=\frac{1}{2}+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数)，l 与 C 相交于 A,B 两点.

(1)求曲线 C 的普通方程；

(2)设 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，证明：$|MA|\cdot|MB|$ 为定值.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知正实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=3$.

(1)若 $a=1$，证明：$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 2$.

(2)求 $ab+bc+ca$ 的最大值.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

2024 届高三数学试题参考答案(理科)

1. A　因为 $A=\{x|x>-1\}$,$B=\{x|-2<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{x|-1<x<2\}$.

2. C　$z=\dfrac{-1+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+a\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{a-1+(a+1)\mathrm{i}}{2}=\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{a+1}{2}\mathrm{i}$,则$\dfrac{a-1}{2}=0$,解得 $a=1$.

3. B　因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})$,所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{3\boldsymbol{b}^2}=\dfrac{1}{6}$.

4. D　若 $l/\!/\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,则可能 $l\subset\beta$,A 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l$,$m/\!/l$,则可能有 $m\subset\alpha$ 或 $m\subset\beta$,B 不正确. 若 $m/\!/n$,则 l 与 α 的位置关系不确定,C 不正确. 若 $\alpha\cap\beta=l$,$\alpha\perp\gamma$,$\beta\perp\gamma$,则 $l\perp\gamma$,D 正确.

5. A　$f(-x)=\dfrac{3^{-x}+3^x}{x^2-1}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,图象关于 y 轴对称,排除 C,D. 当 $0<x<1$时,$f(x)<0$,排除 B. 故选 A.

6. D　执行程序框图可知,输出的值为最小值,因为 $a=0.3^{0.2}>0$,$b=0.2^{0.3}>0$,$c=-\log_{0.2}0.3=\log_5 0.3<\log_5 1=0$,所以输出的值为$-\log_{0.2}0.3$.

7. C　若 A 只有 1 个元素,则满足条件的集合有 $C_3^1=3$ 个,若 A 只有 2 个元素,则满足条件的集合有 $C_3^1\times C_2^1=6$ 个,若 A 只有 3 个元素,则满足条件的集合有 $C_3^1\times C_2^2+C_3^3=4$ 个,若 A 只有 4 个元素,则满足条件的集合有 $C_3^3\times C_2^1=2$ 个,若 A 有 5 个元素,则 $A=U$,满足条件,故满足条件的集合 A 共有 16 个.

8. A　因为 $f(x)=2^x+\sqrt{x}-4$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,且 $x_1<x_2$,$f(x_1)f(x_2)<0$,
所以 $f(x_1)<0$,$f(x_2)>0$,则函数 $f(x)$在(x_1,x_2)内有零点,
又因为 $f(1)=-1<0$,所以 $x_2>1$,
若函数 $f(x)$在$(x_1,\dfrac{x_1+x_2}{2})$内有零点,则 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$.

9. B　设 $z=x^2$,则 $y=0.14\hat{z}+\hat{b}$,则

z	1	4	9	16	25	36
y	2.5	3.6	4.4	5.4	6.6	7.5

则 $\bar{z}=\dfrac{1+4+9+16+25+36}{6}=\dfrac{91}{6}$,$\bar{y}=\dfrac{2.5+3.6+4.4+5.4+6.6+7.5}{6}=5$,

则 $\hat{b}=\bar{y}-0.14\bar{z}=5-0.14\times\dfrac{91}{6}\approx2.88$.

10. C　$f(x)=2\sin^2(\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})-2=\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x-1=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})-1$,令 $f(x)=0$,得 $\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})=1$,由 $0\leqslant x\leqslant\pi$,得$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}$. 因为 $\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})=1$ 恰有两解,所以$\dfrac{5\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{9\pi}{2}$,解得$\dfrac{13}{6}\leqslant\omega<\dfrac{25}{6}$.

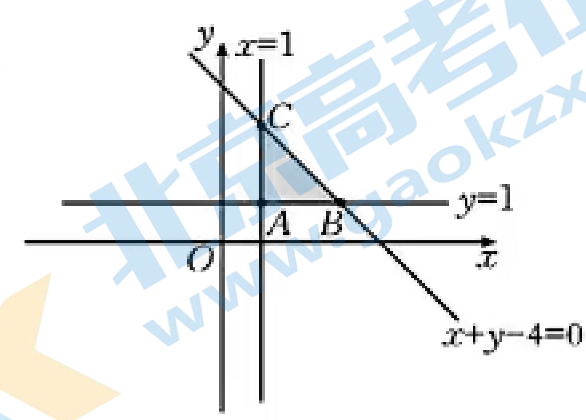
11. A　由题意可知$\begin{cases}e_1=\dfrac{c}{a},\\ e_2=\dfrac{c}{b},\end{cases}$则$\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}=\dfrac{2a}{c}+\dfrac{3b}{c}=\dfrac{2a+3b}{c}$. 由 $c^2=a^2+b^2$, 可设$\begin{cases}a=c\cos\theta,\\ b=c\sin\theta\end{cases}$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$, 则$\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}=\dfrac{2c\cos\theta+3c\sin\theta}{c}=3\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\varphi)$,

其中$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{13}},\\ \sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}$ $(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$. 当 $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 时, $\dfrac{2}{e_1}+\dfrac{3}{e_2}$取得最大值$\sqrt{13}$,

此时 $e_1=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{c\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos(\dfrac{\pi}{2}-\varphi)}=\dfrac{1}{\sin\varphi}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

12. D　因为当 $x>0$ 时, $ae^{2x}\geqslant\ln\dfrac{x}{ae^{x}}$恒成立, 所以 $ae^{2x}\geqslant\ln x-\ln a-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 即 $e^{\ln a+2x}+\ln a+2x\geqslant e^{\ln x}+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $f(x)=e^x+x$, 易得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $\ln a+2x\geqslant\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立, 即 $\ln a\geqslant\ln x-2x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x)=\ln x-2x$, 则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}$. 当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减. 故 $g(x)\leqslant g(\dfrac{1}{2})=\ln\dfrac{1}{2}-1=\ln\dfrac{1}{2e}$, 则 $\ln a\geqslant\ln\dfrac{1}{2e}$, 即 $a\geqslant\dfrac{1}{2e}$.

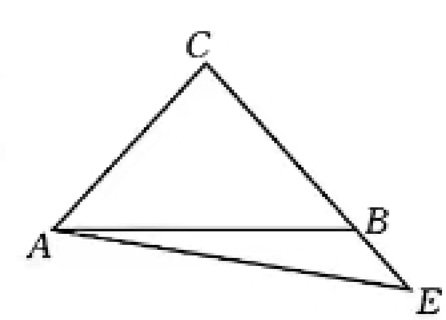
13. 2　根据约束条件作出的平面区域图如图所示, 其中 $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,3)$, 则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$, 故封闭区域的面积为 2.



14. 6　由题可知, $|MF|=x_0+\dfrac{p}{2}=x_0+2=\dfrac{4x_0}{3}$, 解得 $x_0=6$.

15. $\dfrac{1}{2}$　由题意知, 在图 1 中, 圆锥 AB 的体积是圆锥 AO 体积的一半, 分别设圆 B, 圆 O 的半径为 r_1, r_2, 则$\dfrac{V_{AB}}{V_{AO}}=\dfrac{\dfrac{1}{3}\pi r_1^2\cdot AB}{\dfrac{1}{3}\pi r_2^2\cdot AO}=(\dfrac{AB}{AO})^3=\dfrac{1}{2}$.

16. $(\sqrt{3},+\infty)$　如图, 由题意知$\angle ACB<\dfrac{\pi}{2}$, 因为 $AC=BC$, $AB>AC$, 所以$\angle ACB>\dfrac{\pi}{3}$. 设$\angle ACB=2\alpha$, 则$\angle CEA=\alpha$, 则 $AB=2BC\sin\alpha$. 在$\triangle ABE$ 中, $\angle ABE=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$, 所以由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle CEA}=\dfrac{AE}{\sin\angle ABE}=$



关注北京高考在线官方微信：高考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

$\frac{BE}{\sin\angle BAE}$，即$\frac{2BC\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{AE}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}=\frac{BE}{\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)}$，解得 $AE=2BC\cos\alpha$，$BE=2BC\cos 2\alpha$，

则$\frac{AE}{BE}=\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}}$. 因为$\frac{\pi}{3}<2\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$\frac{AE}{BE}$的取值范围为$(\sqrt{3},+\infty)$.

17. 解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=4$. …………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n\cdot 2^{n+1}$，得 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=(n-1)\cdot 2^n$，

……………………………………………………………………………………… 2 分

则$\frac{a_n}{n}=n\cdot 2^{n+1}-(n-1)\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^n$，则 $a_n=n(n+1)\cdot 2^n$， ………………………… 5 分

因为 a_1 也符合上式，所以 $a_n=n(n+1)\cdot 2^n$. ……………………………………… 6 分

(2)由(1)可知，$\frac{a_n}{2n+2}=n\cdot 2^{n-1}$， ………………………………………………… 7 分

则 $T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$， …………………………………… 8 分

则 $2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$， ……………………………………… 9 分

两式相减得$-T_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\frac{2^0-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=-1+(1-n)\cdot 2^n$，…

……………………………………………………………………………………… 11 分

则 $T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$. …………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)由题可知，每位验证码输入正确的概率为$\frac{1}{4}$， ………………………………… 2 分

故这个人第一次输入的验证码恰有两位正确的概率为 $C_4^2\times(\frac{1}{4})^2\times(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{128}$. …… 5 分

(2)由题意可知 X 的所有可能取值为 1，2，3， ……………………………………… 6 分

$P(X=1)=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}$， …………………………………………………………… 7 分

$P(X=2)=\frac{255}{256}\times\frac{1}{255}=\frac{1}{256}$， ……………………………………………………… 8 分

$P(X=3)=\frac{255}{256}\times\frac{254}{255}=\frac{127}{128}$， ……………………………………………………… 9 分

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{127}{128}$

……………………………………………………………………………………… 10 分

$E(X)=1\times\frac{1}{256}+2\times\frac{1}{256}+3\times\frac{127}{128}=\frac{765}{256}$. ………………………………… 12 分

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

19. (1)证明：连接 BC_1，因为底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均为正方形，所以四边形 BCC_1B_1 为菱形，则 $BC_1\perp B_1C$. ………………………………………………………………………… 1 分

由底面 $ABCD$ 和侧面 CDD_1C_1 均为正方形，得 $C_1D_1\perp B_1C_1$，$C_1D_1\perp CC_1$. ……………… 2 分

因为 $B_1C_1\cap CC_1=C_1$，所以 $C_1D_1\perp$ 平面 BCC_1B_1. ………………………………………… 3 分

又 $B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $C_1D_1\perp B_1C$. …………………………………………………… 4 分

因为 $BC_1\cap C_1D_1=C_1$，所以 $B_1C\perp$ 平面 BC_1D_1. ……………………………………………… 5 分

又 $BD_1\subset$ 平面 BC_1D_1，所以 $BD_1\perp B_1C$. ………………………………………………………… 6 分

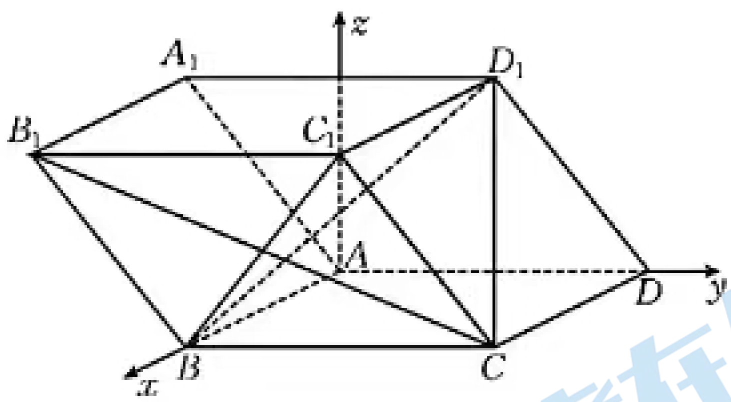
(2)解：以 A 为坐标原点，AB，AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

由 $\angle B_1BC=120°$，$AB=AD=AA_1=2$，得 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D_1(0,1,\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-2,1,\sqrt{3})$. ………………………………………………………………… 8 分

设平面 BCD_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y=0,\\ -2x+y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,2)$. ………………………………………………………………………… 9 分

由图可知，平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$.

……………………………………………………… 10 分



$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，……………… 11 分

由图可知，二面角 $A\text{-}BC\text{-}D_1$ 为锐角，故二面角 $A\text{-}BC\text{-}D_1$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. …………………… 12 分

20. (1)解：由题可知，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\ 2b=2\sqrt{6},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ……………………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=\sqrt{6},\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ ……………………………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$，则直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，令 $x=0$，得 $M(0,\dfrac{3y_0}{x_0+3})$.

…………………………………………………………………………………………… 5 分

直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{y_0-\sqrt{6}}{x_0}x+\sqrt{6}$，令 $y=0$，得 $N(\dfrac{-\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}},0)$. ………………… 6 分

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

$S_1=\frac{1}{2}|AN||OB|=\frac{\sqrt{6}}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}|$，$S_2=\frac{1}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}||\frac{3y_0}{x_0+3}|$， …………………… 7 分

$|S_1-S_2|=\frac{1}{2}|3-\frac{\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}||\sqrt{6}-\frac{3y_0}{x_0+3}|=\frac{1}{2}|\frac{3y_0-3\sqrt{6}-\sqrt{6}x_0}{y_0-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}x_0+3\sqrt{6}-3y_0}{x_0+3}|$

$=\frac{1}{2}|\frac{6x_0^2+9y_0^2-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0+54}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|$. …………………………………………… 9 分

由 $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{6}=1$，得 $6x_0^2+9y_0^2=54$，则 $\frac{1}{2}|\frac{6x_0^2+9y_0^2-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0+54}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|$

$=\frac{1}{2}|\frac{108-18\sqrt{6}y_0-6\sqrt{6}x_0y_0+36x_0}{x_0y_0+3y_0-\sqrt{6}x_0-3\sqrt{6}}|=3\sqrt{6}$. …………………………………………… 11 分

故 $|S_1-S_2|$ 为定值. ……………………………………………………………………… 12 分

21. (1)解：$f'(x)=2e^x+a$. ………………………………………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ……………………… 2 分

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln(-\frac{a}{2})$，由 $f'(x)<0$，得 $x<\ln(-\frac{a}{2})$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递减.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递减. … 4 分

(2)证明：由(1)得，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)=m$ 至多有一个根，不符合题意.

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递减，且

$f'(\ln(-\frac{a}{2}))=0$. …………………………………………………………………………… 5 分

不妨设 $0<x_1<\ln(-\frac{a}{2})<x_2$，要证明 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$，即证 $\sqrt{x_1x_2}<\ln(-\frac{a}{2})$.

又 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，所以只需要证明 $x_1+x_2<2\ln(-\frac{a}{2})$. ………………………… 7 分

令函数 $h(x)=f(x)-f(2\ln(-\frac{a}{2})-x)=2e^x+ax-2e^{2\ln(-\frac{a}{2})-x}-2a\ln(-\frac{a}{2})+ax=2e^x-\frac{a^2e^{-x}}{2}+2ax-2a\ln(-\frac{a}{2})$，$0<x<\ln(-\frac{a}{2})$. …………………………………………… 8 分

$h'(x)=2e^x+\frac{a^2e^{-x}}{2}+2a\geqslant 2\sqrt{2e^x\cdot\frac{a^2e^{-x}}{2}}+2a=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln(-\frac{a}{2}))$ 上单调递增，…………………………………………………… 9 分

所以 $h(x)<h(\ln(-\frac{a}{2}))=0$，即 $f(x)<f(2\ln(-\frac{a}{2})-x)$，

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 （微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信

所以 $f(x_1)<f(2\ln(-\frac{a}{2})-x_1)$. ………………………………………………………… 10 分

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_2)<f(2\ln(-\frac{a}{2})-x_1)$.

因为 $x_2>\ln(-\frac{a}{2})$，$2\ln(-\frac{a}{2})-x_1>\ln(-\frac{a}{2})$，而 $f(x)$ 在 $(\ln(-\frac{a}{2}),+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2<2\ln(-\frac{a}{2})-x_1$，即 $x_1+x_2<2\ln(-\frac{a}{2})$，

故 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$. ………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：由 $\begin{cases}x=\cos\theta+\sin\theta,\\ y=\cos\theta-\sin\theta,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2=1+2\cos\theta\sin\theta,\\ y^2=1-2\cos\theta\sin\theta,\end{cases}$ ……………………………… 3 分

则 $x^2+y^2=2$，即曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=2$. …………………………………… 5 分

(2)证明：将 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程，

得 $(\frac{1}{2}+t\cos\alpha)^2+(\frac{1}{2}+t\sin\alpha)^2=2$，整理得 $2t^2+2(\cos\alpha+\sin\alpha)t-3=0$，…………… 7 分

则 $t_1t_2=-\frac{3}{2}$. ……………………………………………………………………………… 8 分

$|MA|\cdot|MB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=\frac{3}{2}$，则 $|MA|\cdot|MB|$ 为定值，证毕. …………… 10 分

23. (1)证明：由 $a=1$，得 $b^2+c^2=2$，……………………………………………………… 1 分

则 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{2}(b^2+c^2)(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})=1+\frac{c^2}{2b^2}+\frac{b^2}{2c^2}\geqslant 2$， ……………………………… 4 分

当且仅当 $b=c=1$ 时，等号成立，证毕. ……………………………………………………… 5 分

(2)解：因为 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$，$bc\leqslant\frac{1}{2}(b^2+c^2)$，$ac\leqslant\frac{1}{2}(a^2+c^2)$，…………………… 8 分

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，等号成立，……………………………………………………… 9 分

所以 $ab+bc+ac\leqslant a^2+b^2+c^2=3$，即 $ab+bc+ca$ 的最大值为 3. ………………………… 10 分

关注北京高考在线官方微信：高考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜
京考一点通