

2023 北京燕山初三（上）期末

数 学

2022 年 12 月

考生须知	1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5. 考试结束，请将本试卷和答题卡一并交回。
------	---

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 在数学活动课中，同学们利用几何画板绘制出了下列曲线，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是



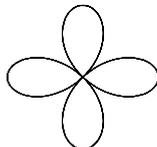
心形线

A.



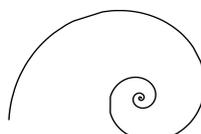
蝴蝶曲线

B.



四叶玫瑰线

C.



等角螺旋线

D.

2. 已知 $\odot O$ 的半径为 5cm，点 P 在 $\odot O$ 内，则线段 OP 的长度可以是

A. 3cm

B. 5cm

C. 7cm

D. 10cm

3. 如图， PA ， PB 是 $\odot O$ 的两条切线， A ， B 是切点，

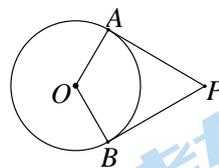
若 $\angle AOB = 120^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数为

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°



4. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(-3, 2)$ ，将线段 OA 绕点 O 顺时针

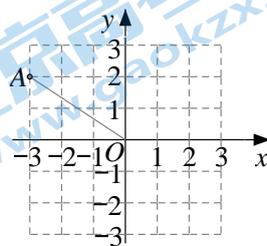
旋转 90° 得到线段 OA' ，则点 A' 的坐标为

A. $(2, 3)$

B. $(3, 2)$

C. $(-2, -3)$

D. $(-3, -2)$



5. 某企业积极响应国家垃圾分类号召，在科研部门的支持下进行技术创新，计划在未来两个月内，将厨余垃圾的月加工处理量从现在的 1000 吨提高到 1200 吨，若加工处理量的月平均增长率相同，设月平均增长率为 x ，可列方程为

A. $1000(1-x)^2 = 1200$

B. $1000(1+x)^2 = 1200$

C. $1200(1-x)^2 = 1000$

D. $1200(1+x)^2 = 1000$

6. 一个不透明的口袋中有三张卡片，上面分别写着数字 1，2，3，除数字外三张卡片无其他区别，小乐随机从中抽取一张卡片，放回摇匀，再随机抽取一张，则小乐抽到的两张卡片上的数字都是奇数的概率是

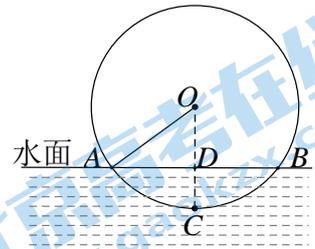
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

7. 唐代李皋发明了“桨轮船”，这种船是原始形态的轮船，是近代明轮航行模式之先导. 如图，某桨轮船的轮子被水面截得的弦 AB 长 8m ，轮子的吃水深度 CD 为 2m ，则该桨轮船的轮子半径为



- A. 2m B. 3m
A. 4m D. 5m

8. 下面的三个问题中都有两个变量 y 与 x :

- ①王阿姨去坡峰岭观赏红叶，她登顶所用的时间 y 与平均速度 x ;
②用一根长度一定的铁丝围成一个矩形，矩形的面积 y 与矩形的一边长 x ;
③某篮球联赛采用单循环制(每两队之间都赛一场)，比赛的场次 y 与参赛球队数 x .

其中，变量 y 与 x 之间的函数关系(不考虑自变量取值范围)可以用一条抛物线表示的是

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

二、填空题(共 16 分，每题 2 分)

9. 平面直角坐标系中，已知点 $P(5, -4)$ 与点 $Q(-5, a)$ 关于原点对称，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 一元二次方程 $x^2 + 5x = 0$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知某函数当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，则这个函数解析式可以是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

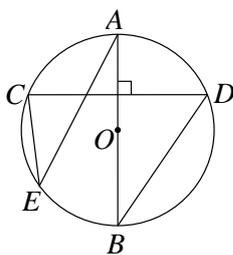
12. 若关于 x 的方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根，写出一组满足条件的实数 b, c 的值： $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 为了认真贯彻党的二十大精神，某校开展了以“喜迎二十大，奋进新征程”为主题的党史知识竞赛活动，答题后随机抽取了 100 名学生答卷，统计他们的得分情况如下：

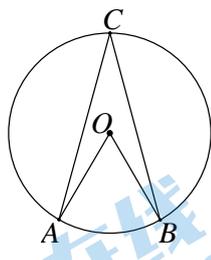
得分(x 分)	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x \leq 100$
人数(人)	10	m	n	48

据此估计，若随机抽取一名学生答卷，得分不低于 90 分的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

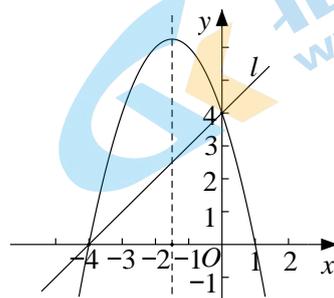
14. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， E 为 \widehat{BC} 上一点，若 $\angle CEA = 34^\circ$ ，则 $\angle ABD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



(第 14 题)



(第 15 题)



(第 16 题)

15. 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 3，点 A, B, C 都在 $\odot O$ 上， $\angle ACB = 30^\circ$ ，则 \widehat{AB} 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与直线 $l: y = kx + n (k \neq 0)$ 如图所示，有下面四个推断：

- ①二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 有最大值；

②抛物线 C 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称;

③关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = kx + n$ 的两个实数根为 $x_1 = -4$, $x_2 = 0$;

④若过动点 $M(m, 0)$ 垂直于 x 轴的直线与抛物线 C 和直线 l 分别交于点 $P(m, y_1)$ 和 $Q(m, y_2)$, 则当 $y_1 < y_2$ 时, m 的取值范围是 $-4 < m < 0$.

其中所有正确推断的序号是_____.

三、解答题(共68分, 第17-22题, 每题5分, 第23-26题, 每题6分, 第27-28题, 每题7分) 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 解方程: $x^2 + 2x - 8 = 0$.

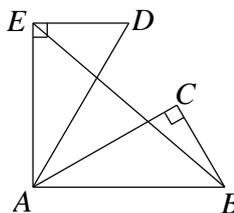
18. 已知 m 是方程 $3x^2 - 2x - 5 = 0$ 的一个根, 求代数式 $(2m+1)(2m-1) - (m+1)^2$ 的值.

19. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0)$, $B(-1, 3)$.

(1)求该抛物线的解析式;

(2)将该抛物线向左平移1个单位长度, 得到的抛物线解析式为_____.

20. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ADE$, 连接 BE . 若 $BC = 1$, 求线段 BE 的长.



21. 下面是小青设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.

已知: 直线 l 及直线 l 外一点 P .

求作: 直线 PQ , 使得 $PQ \parallel l$.

作法: 如图,

①在直线 l 上任取两点 A, B , 连接 PA, PB ;

②分别作线段 PA, AB 的垂直平分线 l_1, l_2 , 两直线交于点 O ;

③以点 O 为圆心, OA 长为半径作圆;

④以点 A 为圆心, PB 长为半径作弧, 与 $\odot O$ 在 l 上方交于点 Q ;

⑤作直线 PQ . 所以直线 PQ 就是所求作的直线.

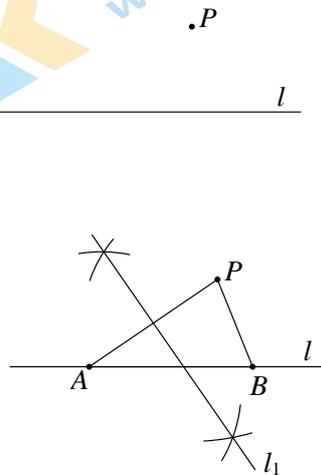
根据小青设计的尺规作图过程,

(1)使用直尺和圆规, 补全图形;(保留作图痕迹)

(2)完成下面的证明.

证明: 连接 AQ ,

\because 点 A, B, P, Q 都在 $\odot O$ 上, $AQ = PB$,



根据上述数据，解决以下问题：

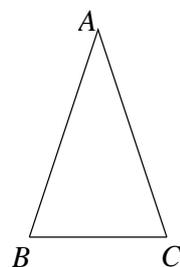
- (1)主索最低点 P 与桥面的距离 PO 为_____m.
- (2)求出主索抛物线的解析式 $y = a(x-h)^2 + k(a > 0)$;
- (3)若与点 P 水平距离为 12m 处，有两条吊索需要更换，求这两条吊索的总长度.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 为抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - 4$ 上任意两点，其中 $x_1 < x_2$.

- (1)求该抛物线顶点 P 的坐标(用含 m 的式子表示);
- (2)当 M, N 的坐标分别为 $(0, -3)$, $(2, -3)$ 时，求 m 的值;
- (3)若对于 $x_1 + x_2 > 4$ ，都有 $y_1 < y_2$ ，求 m 的取值范围.

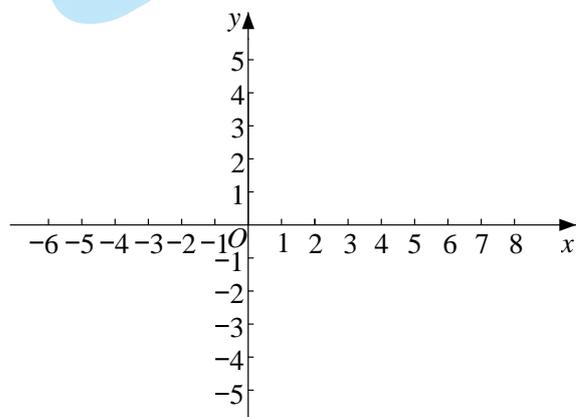
27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AD ，作 $\angle CAD$ 的角平分线 AE 交 BC 的延长线于点 E ，连接 CD, DE .

- (1)依题意补全图形，并求出 $\angle AEC$ 的度数;
- (2)用等式表示线段 AE, BE, DE 之间的数量关系，并证明.



28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 M, N 和图形 W ，给出如下定义：若图形 W 上存在一点 P ，使得 $\angle PMN = 90^\circ$ ，且 $MP = MN$ ，则称点 M 为点 N 关于图形 W 的一个“旋垂点”。

- (1)已知点 $A(0, 4)$, $B(4, 4)$,
 - ①在点 $M_1(-2, 2)$, $M_2(0, 2)$, $M_3(2, 2)$ 中，是点 O 关于点 A 的“旋垂点”的是_____;
 - ②若点 $M(m, n)$ 是点 O 关于线段 AB 的“旋垂点”，求 m 的取值范围;
- (2)直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴， y 轴分别交于 C, D 两点， $\odot T$ 的半径为 $\sqrt{10}$ ，圆心为 $T(t, 0)$ 。若在 $\odot T$ 上存在点 P ，线段 CD 上存在点 Q ，使得点 Q 是点 P 关于 $\odot T$ 的一个“旋垂点”，且 $PQ = \sqrt{2}$ ，直接写出 t 的取值范围.



参考答案

一、选择题 (共 16 分, 每题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	A	C	A	B	B	D	C

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 4; 10. $x_1=0, x_2=-5$; 11. 答案不唯一, 如: $y=(x-1)^2, y=2x \dots$
 12. 答案不唯一, 如: $b=2, c=1$; 13. 0.48; 14. 34° ;
 15. π ; 16. ①③.

三、解答题 (共 68 分, 第 17-22 题, 每题 5 分, 第 23-26 题, 每题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分)

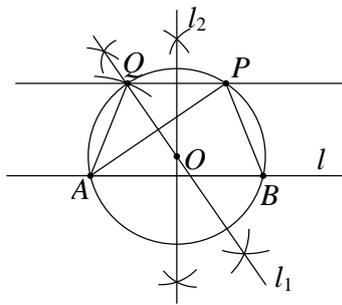
17. 解: $\because a=1, b=2, c=-8,$ 1 分
 $\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36,$ 2 分
 $\therefore x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 6}{2},$ 3 分
 $\therefore x_1=2, x_2=-4.$ 5 分

18. 解: 原式 $= (4m^2 - 1) - (m^2 + 2m + 1)$ 2 分
 $= 3m^2 - 2m - 2.$ 3 分
 $\because m$ 是方程 $3x^2 - 2x - 5 = 0$ 的一个根,
 $\therefore 3m^2 - 2m - 5 = 0,$ 4 分
 $\therefore 3m^2 - 2m = 5,$
 \therefore 原式 $= 5 - 2 = 3.$ 5 分

19. 解: (1) $\because y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(2, 0), B(-1, 3),$
 $\therefore \begin{cases} 0=4a+2b, \\ 3=a-b, \end{cases}$ 2 分
 解这个方程组, 得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$
 \therefore 所求抛物线的解析式是 $y = x^2 - 2x.$ 4 分
 (2) $y = x^2 - 1.$ 5 分

20. 解: $\because \triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ADE,$
 $\therefore AE=AC, \angle EAC=60^\circ.$ 1 分
 $\because \angle BAC=30^\circ,$
 $\therefore \angle EAB = \angle EAC + \angle BAC = 90^\circ.$ 2 分
 \because Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, \angle BAC=30^\circ, BC=1,$
 $\therefore AB=2, AC=\sqrt{3}.$ 4 分
 Rt $\triangle ABE$ 中, $AB=2, AE=AC=\sqrt{3},$
 $\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}.$ 5 分

21. 解: (1) 补全的图形如图所示; 3 分



(2) \widehat{PB} ,

同弧或等弧所对的圆周角相等.

..... 5分

22. (1)证明: 由题意得,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4-m)^2 - 4 \times 1 \times (3-m)$$

$$= m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0,$$

\therefore 该方程总有两个实数根.

..... 2分

(2)解: $x^2 + (4-m)x + 3-m = 0$,

解这个方程得 $x_1 = m-3$, $x_2 = -1$.

\therefore 方程恰有一个实数根为非负数,

$$\therefore m-3 \geq 0,$$

$$\therefore m \geq 3.$$

..... 5分

23. 解: (1) $\frac{1}{4}$;

..... 2分

(2) 记从四个实验中随机抽取两个实验进行原理讲述, 抽到“B. 液桥演示实验”和“C. 水油分离实验”为事件 M .

方法一: 用列表法列举所有可能出现的结果:

	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

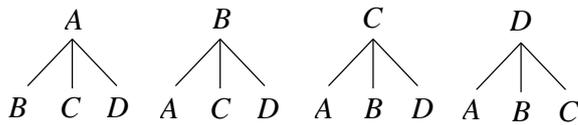
..... 4分

由表中可以看出, 所有可能的结果有 12 种, 并且这 12 种结果出现的可能性相等, 所有可能的结果中, 满足事件 M 的结果有 2 种, 即 BC, CB,

$$\therefore P(M) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

..... 6分

方法二: 根据题意可以画出如下的树状图:



..... 4分

由树状图可以看出，所有可能的结果有 12 种，并且这 12 种结果出现的可能性相等，所有可能的结果中，满足事件 M 的结果有 2 种，即 BC, CB,

$$\therefore P(M) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

..... 6分

24. (1) 证明：如图，连接 OE 。

\because $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 为斜边中线，

$$\therefore CD = DA = DB = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle B.$$

$$\because OC = OE,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle OEC,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle B,$$

$$\therefore OE \parallel AB.$$

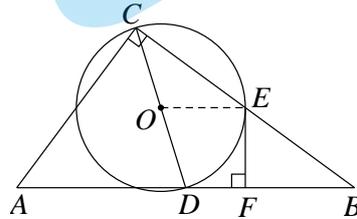
$$\because EF \perp AB,$$

$$\therefore EF \perp OE,$$

$\therefore OE$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore EF$ 为 $\odot O$ 的切线.

..... 3分



(2) 解：如图，连接 DE 。

$\because CD$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边中线，

$$\therefore DB = CD = 5, AB = 2CD = 10.$$

$\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 10, AC = 6,$

$$\therefore BC = 8.$$

$\because CD$ 为 $\odot O$ 直径，

$$\therefore DE \perp BC,$$

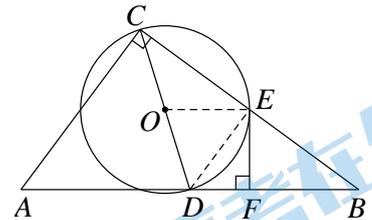
$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC = 4.$$

$\text{Rt}\triangle BDE$ 中， $BD = 5, BE = 4,$

$$\therefore DE = 3,$$

$$\therefore EF = \frac{DE \cdot BE}{DB} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

..... 6分



25. 解：(1) 2;

..... 2分

(2) 由表中数据可知，抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点为 $P(32, 2),$

$$\therefore y = a(x-32)^2 + 2$$

\because 抛物线经过点 $D(0, 18),$ 代入 $y = a(x-32)^2 + 2$ 中，得

$$18 = a \cdot (0-32)^2 + 2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{64},$$

$$\therefore \text{主索抛物线的解析式 } y = \frac{1}{64}(x-32)^2 + 2. \quad \text{..... 4分}$$

(3) ∵点P的横坐标为32,

∴距离点P水平距离为12m的点的横坐标为20, 或44,

$$\text{将 } x=20 \text{ 代入 } y=\frac{1}{64}(x-32)^2+2 \text{ 中, 得 } y=\frac{1}{64}(20-32)^2+2=4.25,$$

即此时吊索的长度为4.25m.

由抛物线的对称性可得, $x=44$ 时, 吊索的长度也为4.25m,

∴两条吊索的总长度为8.5m. 6分

26. 解: (1) $y=x^2-2mx+m^2-4$
 $= (x-m)^2-4,$

∴抛物线的顶点为 $P(m, -4)$ 2分

(2) ∵ $M(0, -3), N(2, -3)$ 在抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-4$ 上,

∴抛物线的对称轴 $x=m$ 经过 MN 的中点 $(1, -3)$,

∴ $m=1$ 4分

(3) 抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-4$ 的开口向上, 对称轴为 $x=m$.

①若 $x_1 < x_2 \leq m$, 显然 $y_1 > y_2$, 即 $y_1 < y_2$ 恒不成立;

②若 $m \leq x_1 < x_2$, 显然 $y_1 < y_2$ 恒成立;

③若 $x_1 < m < x_2$, 由 $y_1 < y_2$ 可得

$$m-x_1 < x_2-m,$$

$$\therefore x_1+x_2 > 2m,$$

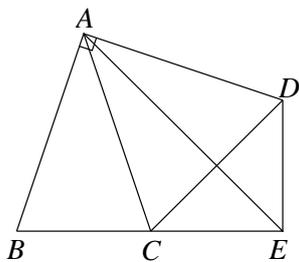
故对于 $x_1+x_2 > 4$, 都有 $x_1+x_2 > 2m$,

$$\therefore 2m \leq 4,$$

$$m \leq 2.$$

综上, m 的取值范围是 $m \leq 2$ 6分

27. (1) 依题意补全图形, 如图. 1分



如图, 取 BC 中点 P , 连接 AP .

∵ $AB=AC$,

$$\therefore \angle BAP = \angle CAP = \frac{1}{2} \angle BAC, \quad \angle APE = 90^\circ.$$

∵ AE 为 $\angle CAD$ 的角平分线,

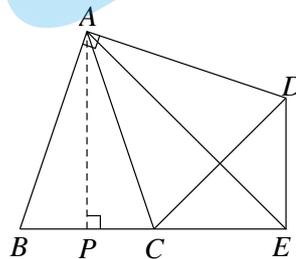
$$\therefore \angle CAE = \angle EAD = \frac{1}{2} \angle CAD,$$

$$\therefore \angle PAE = \angle CAP + \angle CAE = \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAD.$$

∵ $\angle BAD = 90^\circ$,

∴ $\angle PAE = 45^\circ$,

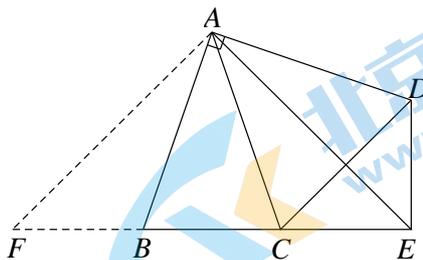
∴ $\angle AEC = 45^\circ$ 3分



(2) $BE+DE=\sqrt{2}AE$ 4分

证明：如图，延长 CB 至 F ，使 $BF=CE$ ，连接 AF 5分

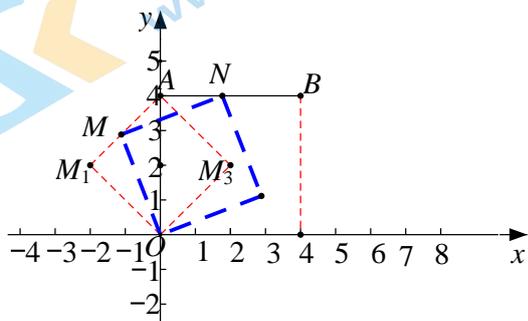
$\because AB=AC$,
 $\therefore \angle ABC=\angle ACB$,
 $\therefore \angle ABF=\angle ACE$,
 $\therefore \triangle ABF\cong\triangle ACE$,
 $\therefore AF=AE, \angle F=\angle AEC=45^\circ$,
 $\therefore \angle FAE=90^\circ$,
 $\therefore EF=\sqrt{2}AE$.
 $\because AC=AB=AD, AE$ 为 $\angle CAD$ 的角平分线,
 $\therefore AE$ 垂直平分 CD ,
 $\therefore DE=CE=BF$,
 $\therefore BE+BF=EF$,
 $\therefore BE+DE=\sqrt{2}AE$.



..... 7分

28. 解：(1) ① M_1, M_3 ; 2分

② 如图，



\because 点 M 是点 O 关于线段 AB 的“旋垂点”，
 \therefore 在线段 AB 上存在点 N ，使得 $\angle OMN=90^\circ$ ，且 $OM=MN$ ，
 当点 N 与点 A 重合时，点 M 的坐标为 $(-2, 2)$ ，或 $(2, 2)$ ；
 当点 N 与点 B 重合时，点 M 的坐标为 $(0, 4)$ ，或 $(4, 0)$ 。
 观察图象可知 m 的取值范围是 $-2\leq m\leq 0$ ，或 $2\leq m\leq 4$.

(2) $-2\sqrt{3}\leq t\leq -2$ ，或 $2-2\sqrt{2}\leq t\leq 6$ 7分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯