

高一新生分班考试数学试卷（含答案）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

题号	一	二	三	总分
得分				

一、选择题（每题 5 分，共 40 分）

1. 化简 $\sqrt{-a\sqrt{a^2}}$ = ()

- A. \sqrt{a} B. $-a$ C. a D. a^2

2. 分式 $\frac{x^2-x-2}{|x|-1}$ 的值为 0，则 x 的值为 ()

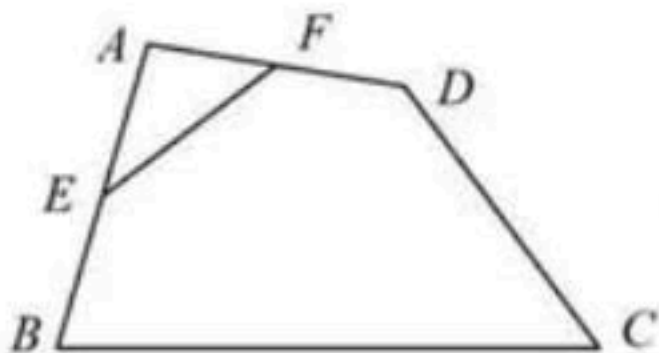
- A. -1 或 2 B. 2 C. -1 D. -2

3. 如图，在四边形 ABCD 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点。若 $EF=2$ ， $BC=5$ ， $CD=3$ ，则 $\tan C$ 等于 ()

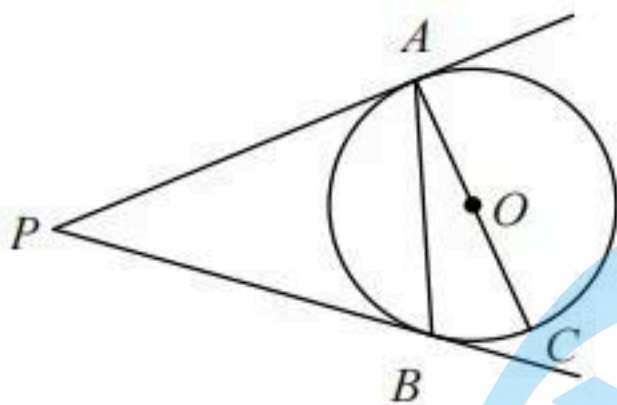
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

4. 如图，PA、PB 是 $\odot O$ 切线，A、B 为切点，AC 是直径， $\angle P=40^\circ$ ，则 $\angle BAC=$ ()

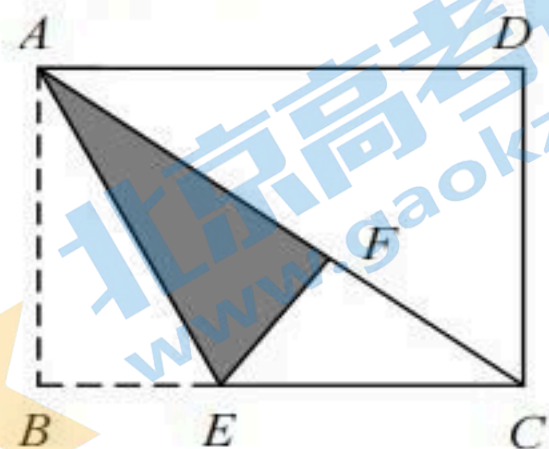
- A. 40° B. 80° C. 20° D. 10°



(3 题图)



(4 题图)



(6 题图)

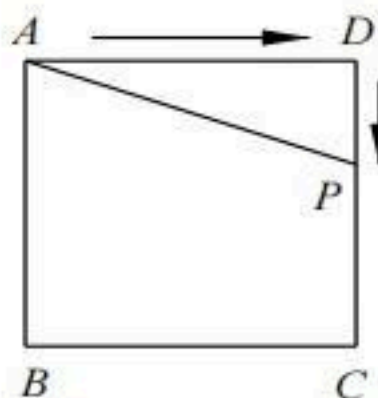
5. 在两个袋内，分别装着写有 1、2、3、4 四个数字的 4 张卡片，今从每个袋中各任取一张卡片，则所取两卡片上数字之积为偶数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{5}{16}$ C. $\frac{7}{16}$ D. $\frac{3}{4}$

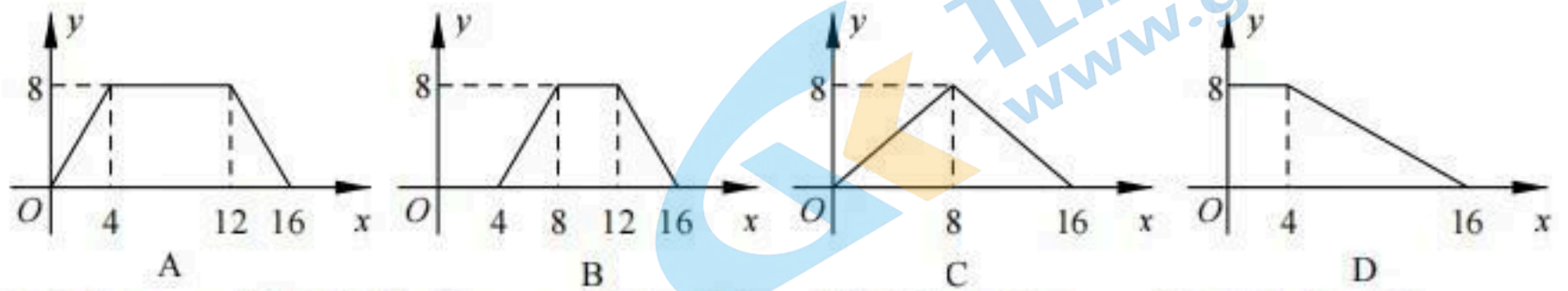
6. 如图，矩形纸片 ABCD 中，已知 $AD=8$ ，折叠纸片使 AB 边与对角线 AC 重合，点 B 落在点 F 处，折痕为 AE，且 $EF=3$ ，则 AB 的长为 ()

- A. 6 B. 4 C. 5 D. 3

7. 如图，正方形 ABCD 的边长为 4，P 为正方形边上一动点，运动



路线是 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, 设 P 点经过的路程为 x , 以点 A 、 P 、 D 为顶点的三角形的面积是 y . 则下列图象能大致反映 y 与 x 的函数关系的是 ()



8. 若直角坐标系内两点 P 、 Q 满足条件① P 、 Q 都在函数 y 的图象上② P 、 Q 关于原点对称, 则称点对 (P, Q) 是函数 y 的一个“友好点对”(点对 (P, Q) 与 (Q, P) 看作同一个“友好点对”). 已知函数 $y = \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2x}, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 y 的“友好点对”有 () 个

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

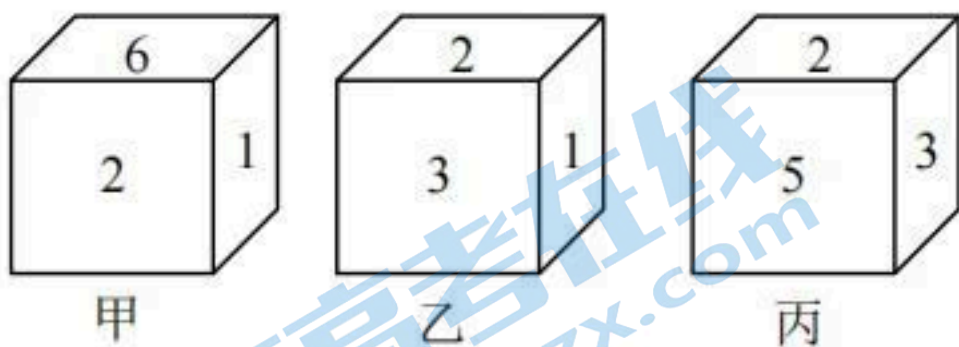
注意: 请将选择题的答案填入表格中。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	得分	评卷人
答案										

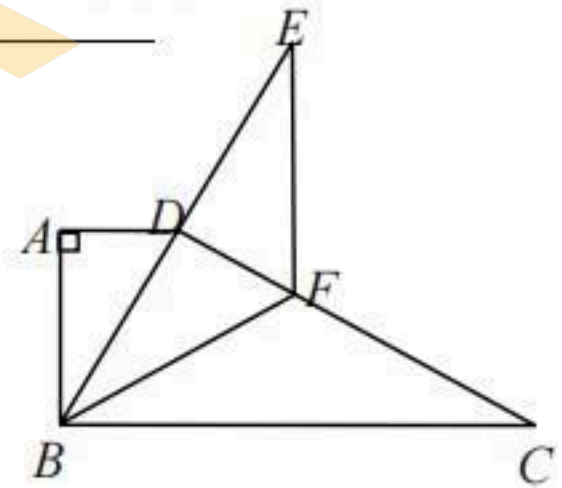
二、填空题 (每题 5 分, 共 50 分)

9. 已知 a 、 b 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个实数根, 则代数式 $(a-b)(a+b-2) + ab$ 的值等于_____

10. 有一个六个面分别标上数字 1、2、3、4、5、6 的正方体, 甲、乙、丙三位同学从不同的角度观察的结果如图所示. 如果记 2 的对面的数字为 m , 3 的对面的数字为 n , 则方程 $m^{x+1} = n$ 的解 x 满足 $k < x < k+1$, k 为整数, 则 $k =$ _____



10 题图



11 题图

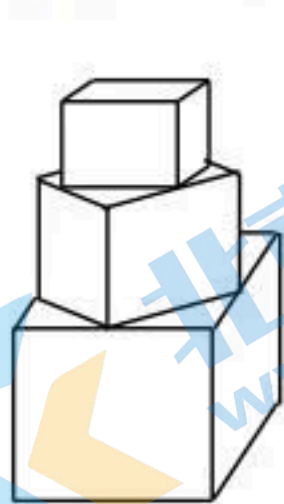
11. 如图, 直角梯形纸片 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. 折叠纸片使 BC 经过点 D , 点 C 落在点 E 处, BF 是折痕, 且 $BF = CF = 8$, 则 AB 的长为_____

12. 记函数 y 在 x 处的值为 $f(x)$ (如函数 $y = x^2$ 也可记为 $f(x) = x^2$, 当 $x = 1$ 时的函数

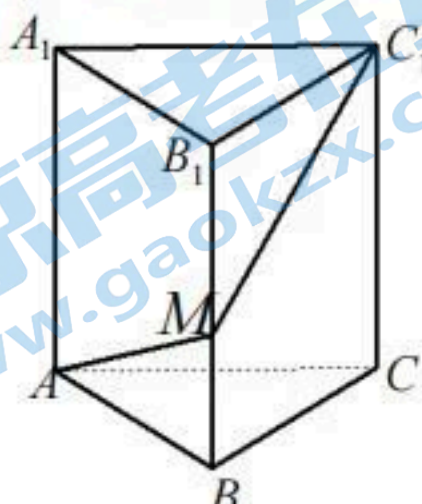
值可记为 $f(1) = 1$)。已知 $f(x) = \frac{x}{|x|}$, 若 $a > b > c$ 且 $a + b + c = 0$, $b \neq 0$, 则

$f(a) + f(b) + f(c)$ 的所有可能值为_____

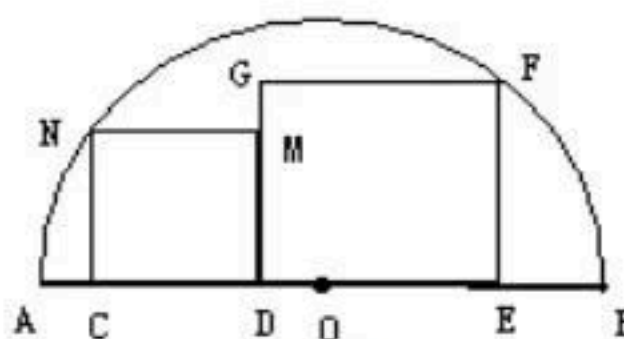
13. 有一塔形几何体由若干个正方体构成, 构成方式如图所示, 上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点。已知最底层正方体的棱长为 2, 且该塔形的表面积 (含最底层正方体的底面面积) 超过 39, 则该塔形中正方体的个数至少是_____



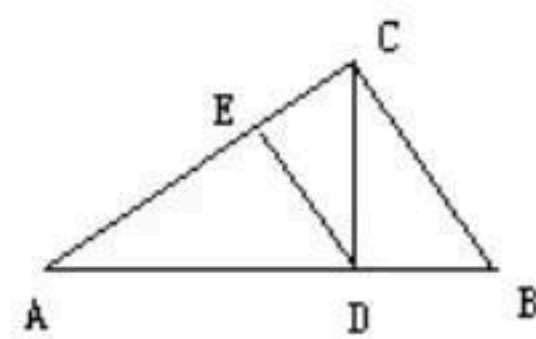
13题图



14题图



15题图



16题图

14. 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面 $AB = 1, BC = 2$, 三个侧面都是矩形, $AA_1 = 3$

M 为线段 BB_1 上的一动点, 则当 $AM + MC_1$ 最小时, $BM =$ _____

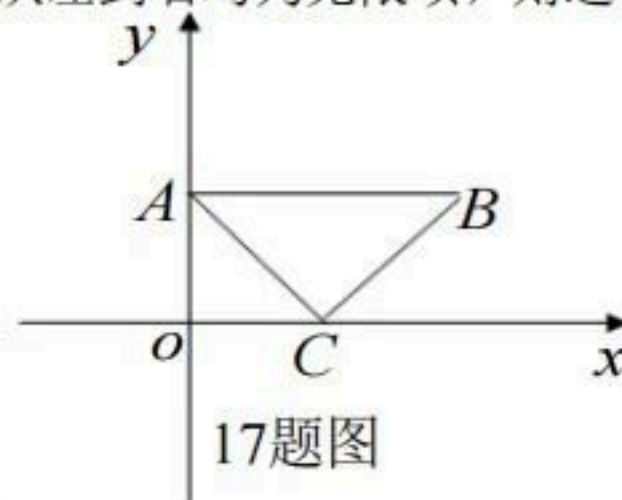
15. 如图, AB 是半圆 O 的直径, 四边形 $CDMN$ 和 $DEFG$ 都是正方形, 其中 C, D, E 在 AB 上, F, N 在半圆上。若 $AB = 10$, 则正方形 $CDMN$ 的面积与正方形 $DEFG$ 的面积之和是_____

16. 如图, CD 为直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高, BC 长度为 1, $DE \perp AC$ 。设 $\triangle ADE$, $\triangle CDB$, $\triangle ABC$ 的周长分别是 p_1, p_2, p 。当 $\frac{p_1 + p_2}{p}$ 取最大值时, $AB =$ _____

17. 如图放置的等腰直角 $\triangle ABC$ 薄片 ($\angle ACB = 90^\circ, AC = 2$) 沿 x 轴滚动, 点 A 的运动轨迹曲线与 x 轴有交点, 则在两个相邻交点间点 A 的轨迹曲线与 x 轴围成图形面积为_____

18. 如图是一个数表, 第 1 行依次写着从小到大的正整数, 然后把每行相邻的两个数的和写在这两数正中间的下方, 得到下一行, 数表从上到下与从左到右均为无限项, 则这个数表中的第 11 行第 7 个数为_____ (用具体数字作答)

1	2	3	4	5	6	7...
3	5	7	9	11	13...	
8	12	16	20	24...		
20	28	36	44...			
48	64	80...				



17题图

注意：请将填空题的答案填在下面的横线上。

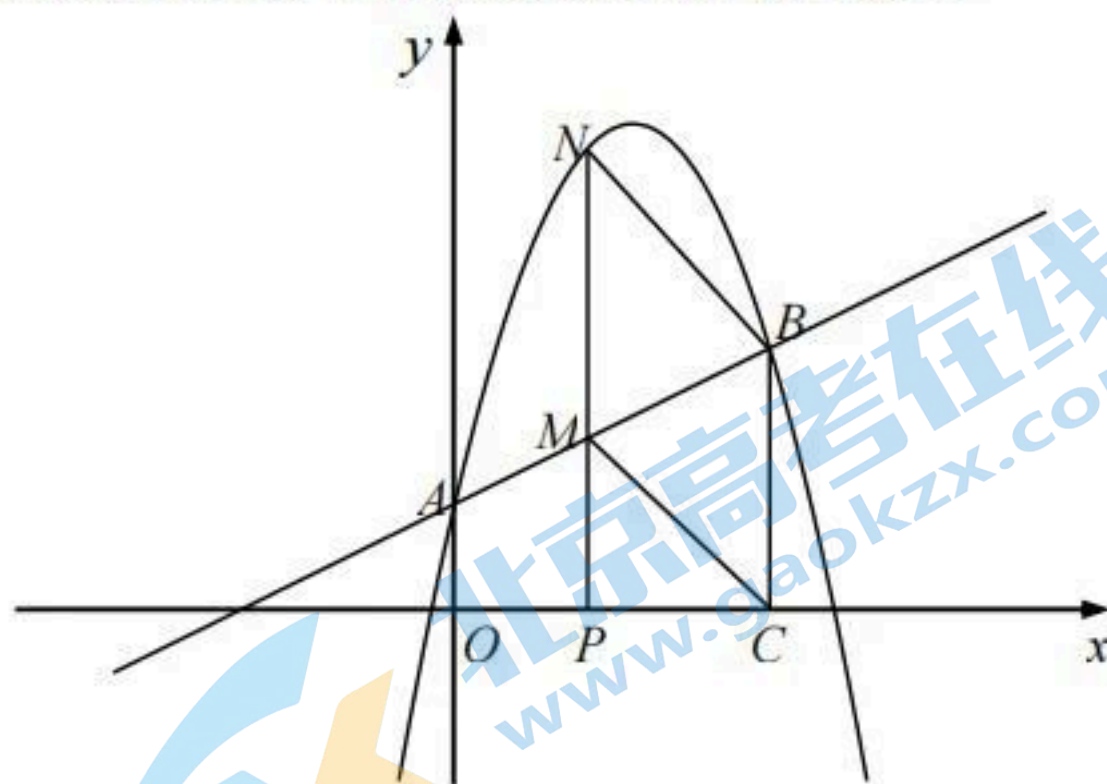
得分	评卷人

9. _____ 10. _____
 11. _____ 12. _____
 13. _____ 14. _____ 15. _____
 16. _____ 17. _____ 18. _____

三、解答题（共 60 分）

19. （本小题满分 12 分）如图，抛物线 $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{17}{4}x + 1$ 与 y 轴交于 A 点，过点 A 的直线与抛物线交于另一点 B ，过点 B 作 $BC \perp x$ 轴，垂足为点 $C(3, 0)$ 。

- (1) 求直线 AB 的函数关系式；
- (2) 动点 P 在线段 OC 上从原点出发以每秒一个单位的速度向 C 移动，过点 P 作 $PN \perp x$ 轴，交直线 AB 于点 M ，交抛物线于点 N 。设点 P 移动的时间为 t 秒， MN 的长度为 s 个单位，求 s 与 t 的函数关系式，并写出 t 的取值范围；
- (3) 设在 (2) 的条件下（不考虑点 P 与点 O ，点 C 重合的情况），连接 CM ， BN ，当 t 为何值时，四边形 $BCMN$ 为平行四边形？问对于所求的 t 值，平行四边形 $BCMN$ 能否为菱形？请说明理由。

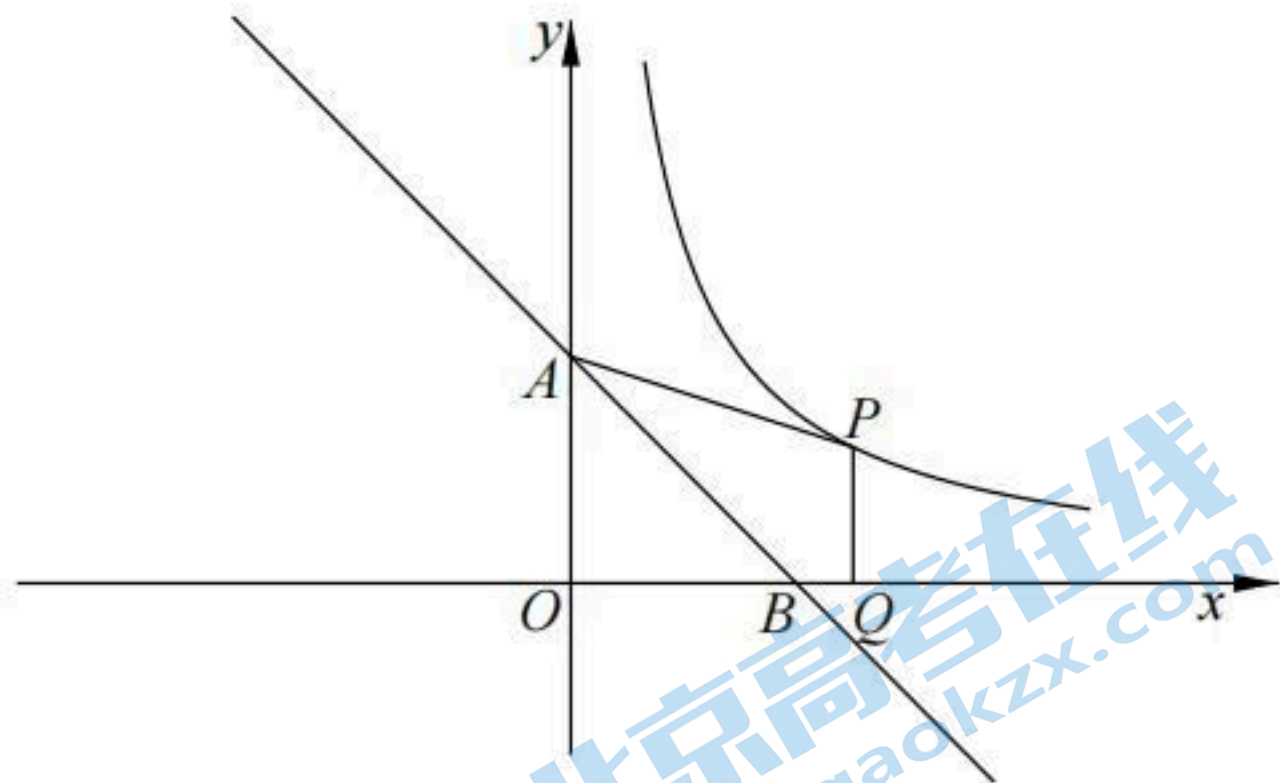


20. (本小题满分 12 分) 函数 $f(x)$, 若自变量 x 取值范围内存在 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$ 成立, 则称以 (x_0, x_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图像上的不动点. ($f(x)$ 的定义见第 12 题)

(1) 若函数 $f(x) = \frac{3x+a}{x+b}$ 有两个关于原点对称的不动点, 求 a, b 应满足的条件;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $a=2$, 直线 $l: y = (1-a)x + b - 1$ 与 y 轴、 x 轴分别相交于 A, B 两点, 在 $y = \frac{b}{x}$ 的图象上取一点 P (P 点的横坐标大于 2), 过 P 作 $PQ \perp x$ 轴, 垂足是 Q , 若四边形 $ABQP$ 的面积等于 2, 求 P 点的坐标

(3) 定义在实数集上的函数 $f(x)$, 对任意的 x 有 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立. 下述命题“若函数 $f(x)$ 的图像上存在有限个不动点, 则不动点有奇数个”是否正确? 若正确, 给予证明; 若不正确, 举反例说明.



21. (本小题满分 12 分) 已知圆 O 圆心为坐标原点, 半径为 $\frac{4}{3}$, 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$

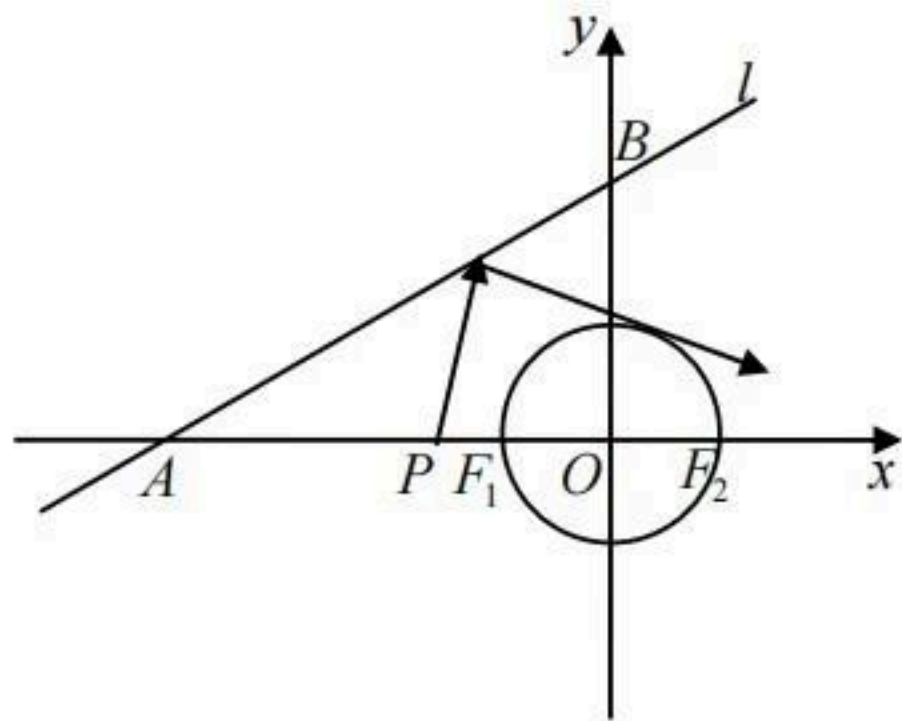
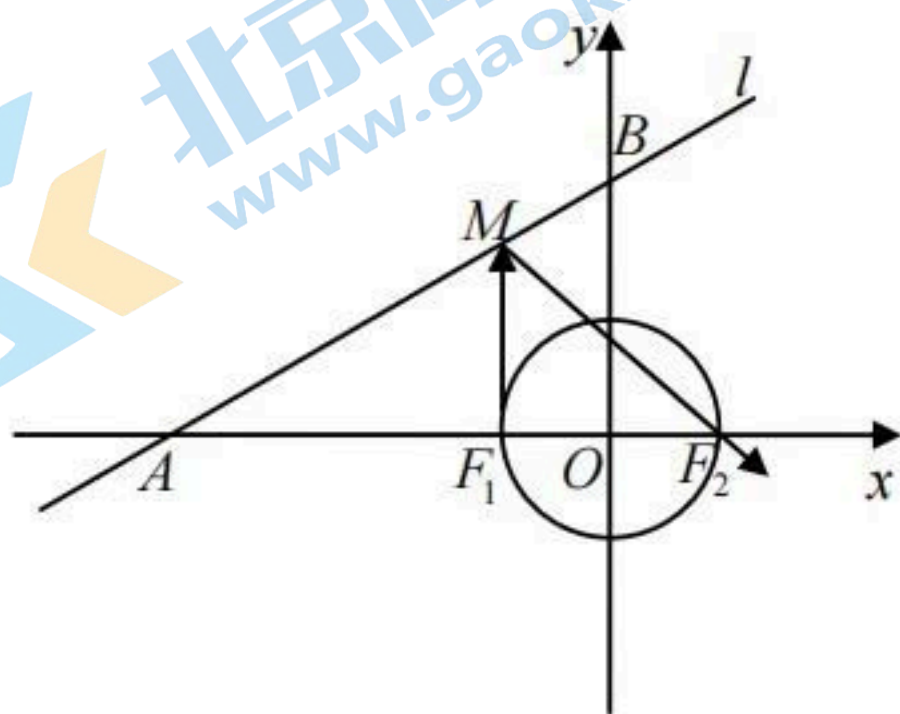
交 x 轴负半轴于 A 点, 交 y 轴正半轴于 B 点

(1) 求 $\angle BAO$

(2) 设圆 O 与 x 轴的两交点是 F_1, F_2 , 若从 F_1 发出的光线经 l 上的点 M 反射后过点 F_2 ,

求光线从 F_1 射出经反射到 F_2 经过的路程

(3) 点 P 是 x 轴负半轴上一点, 从点 P 发出的光线经 l 反射后与圆 O 相切. 若光线从射出经反射到相切经过的路程最短, 求点 P 的坐标



22. (本小题满分 12 分)

在金融危机中,某钢材公司积压了部分圆钢,经清理知共有 2009 根.现将它们堆放在一起.

(1)若堆放成纵断面为正三角形(每一层的根数比上一层根数多 1 根),并使剩余的圆钢尽可能地少,则剩余了多少根圆钢?

(2)若堆成纵断面为等腰梯形(每一层的根数比上一层根数多 1 根),且不少于七层,

(I)共有几种不同的方案?

(II)已知每根圆钢的直径为 10cm ,为考虑安全隐患,堆放高度不得高于 4m ,则选择哪个方案,最能节省堆放场地?

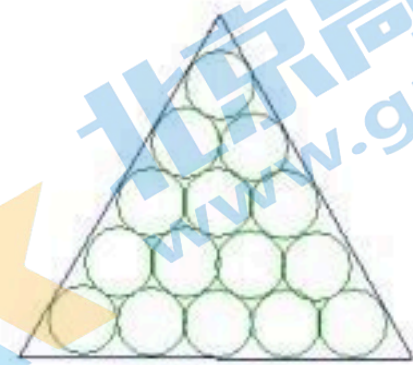


图 (1)

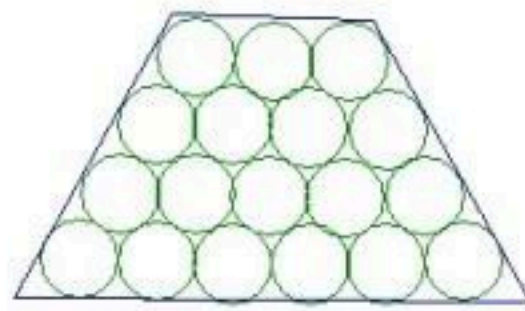
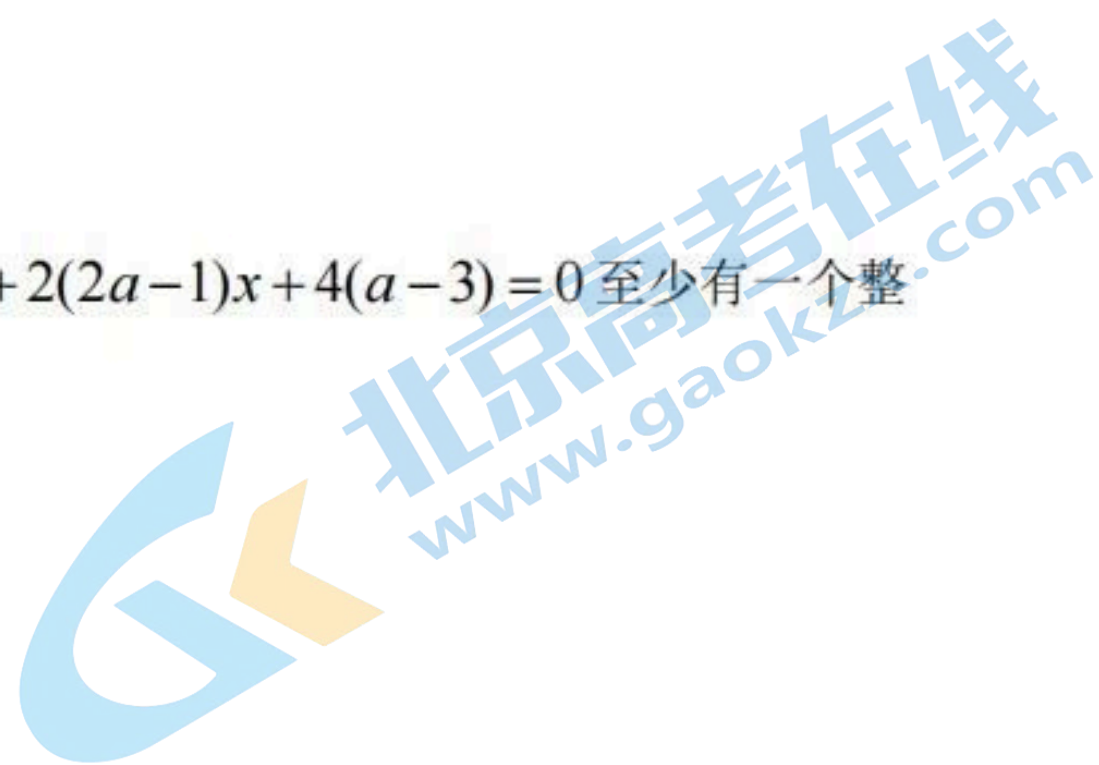


图 (2)

23. (本小题满分 12 分)

试求出所有正整数 a 使得关于 x 的二次方程 $ax^2 + 2(2a-1)x + 4(a-3) = 0$ 至少有一个整数根.



数学试卷答案

一、选择题（每题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	A	C	D	A	B	C

三、填空题（每题 5 分，共 50 分）

9. -1 10. 0 11. 6 12. 1或-1 13. 6
 14. 1 15. 25 16. 2 17. $4\pi+2$ 18. 12288

三、解答题（共 60 分）

19. 解：(1) 易知 A(0,1), B(3,2.5), 可得直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 3 分

$$(2) s = MN = NP - MP = -\frac{5}{4}t^2 + \frac{17}{4}t + 1 - (\frac{1}{2}t + 1)$$

$$= -\frac{5}{4}t^2 + \frac{15}{4}t \quad (0 \leq t \leq 3) \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

(3) 若四边形 BCMN 为平行四边形, 则有 $MN=BC$, 此时, 有

$$-\frac{5}{4}t^2 + \frac{15}{4}t = \frac{5}{2}, \text{ 解得 } t_1 = 1, t_2 = 2$$

所以当 $t=1$ 或 2 时, 四边形 BCMN 为平行四边形.8 分

① 当 $t=1$ 时, $MP = \frac{3}{2}$, $NP = 4$, 故 $MN = NP - MP = \frac{5}{2}$, 又在 $\text{Rt}\triangle MPC$ 中,
 $MC = \sqrt{MP^2 + PC^2} = \frac{5}{2}$, 故 $MN=MC$, 此时四边形 BCMN 为菱形10 分

② 当 $t=2$ 时, $MP = 2$, $NP = \frac{9}{2}$, 故 $MN = NP - MP = \frac{5}{2}$, 又在 $\text{Rt}\triangle MPC$ 中,
 $MC = \sqrt{MP^2 + PC^2} = \sqrt{5}$, 故 $MN \neq MC$, 此时四边形 BCMN 不是菱形.12 分

20. 解：(1) 由题得 $\frac{3x+a}{x+b} = x$ 有两个互为相反数的根 $x_0, -x_0 (x_0 \neq 0)$

即 $x^2 + (b-3)x - a = 0 (x \neq -b)$ 有两个互为相反数的根 $x_0, -x_0$ 1 分

根带入得 $\begin{cases} x_0^2 + (b-3)x_0 - a = 0 \\ x_0^2 + (b-3)(-x_0) - a = 0 \end{cases}$, 两式相减得 $2(b-3)x_0 = 0, \therefore b = 3$ 3 分

方程变为 $x^2 - a = 0 (x \neq -3) \quad \therefore a > 0$ 且 $a \neq 9$ 4 分

(2) 由 (1) 得 $a=2, b=3$, 所以 $l: y = -x + 2$, 即 $A(0,2) \quad B(2,0)$ 5分

设 $y = \frac{3}{x}$ 上任意一点 $P(t, \frac{3}{t})(t > 2)$, 所以 $Q(t,0)(t > 2)$ 6分

又因为 $S_{\text{四边形}AOQP} - S_{\Delta MOB} = 2$, 所以 $\frac{1}{2}(2 + \frac{3}{t})t - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \quad \therefore t = \frac{5}{2}$ 8分

$\therefore P(\frac{5}{2}, \frac{6}{5})$ 9分

(3) 正确

①在 $f(-x) = -f(x)$ 令 $x=0$ 得 $f(0) = -f(0)$ 所以 $f(0) = 0$

所以 $(0,0)$ 为函数的不动点10分

②设 (x_0, x_0) 为函数 $f(x)$ 图像上的不动点, 则 $f(x_0) = x_0$

所以 $f(-x_0) = -f(x_0) = -x_0$,

所以 $(-x_0, -x_0)$ 也为函数 $f(x)$ 图像上的不动点12分

21. 解: (1) 由题 $|OA|=4, |OB| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\tan \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle BAO = 30^\circ$ 2分

(2) 如图 (1) 由对称性可知, 点 F_1 关于 l 的对称点 F_1' 在过点 $A(-4,0)$ 且倾斜角为 60° 的
直线 l' 上在 $\Delta AF_2F_1'$ 中, $\angle F_1'AO = 60^\circ, AF_1' = AF_1 = AO - F_1O = \frac{8}{3}, AF_2 = \frac{16}{3}$

所以 $\Delta AF_2F_1'$ 为直角三角形, $\angle AF_1'F_2 = 90^\circ$ 。所以光线从 F_1 射出经反射到 F_2 经过的路

程为 $F_1M + MF_2 = F_1'M + MF_2 = F_1'F_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 6分

(2) 如图 (2) 由对称性可知, 点 P 关于 l 的对称点 P' 在过点 $A(-4,0)$ 且倾斜角为 60° 的
直线 l' 上

$PM + MQ = P'M + MQ = P'Q$, 所以路程最短即为 l' 上点 P' 到切点 Q 的切线长最短。

连接 OQ, OP' , 在 $Rt\Delta OQP'$ 中, 只要 OP' 最短,

由几何知识可知, P' 应为过原点 O 且与 l' 垂直的直线与 l' 的交点, 这一点又与点 P 关于 l 对称, $\therefore AP = AP' = AO \cos 60^\circ = 2$, 故点 P 的坐标为 $(-2, 0)$ 12 分

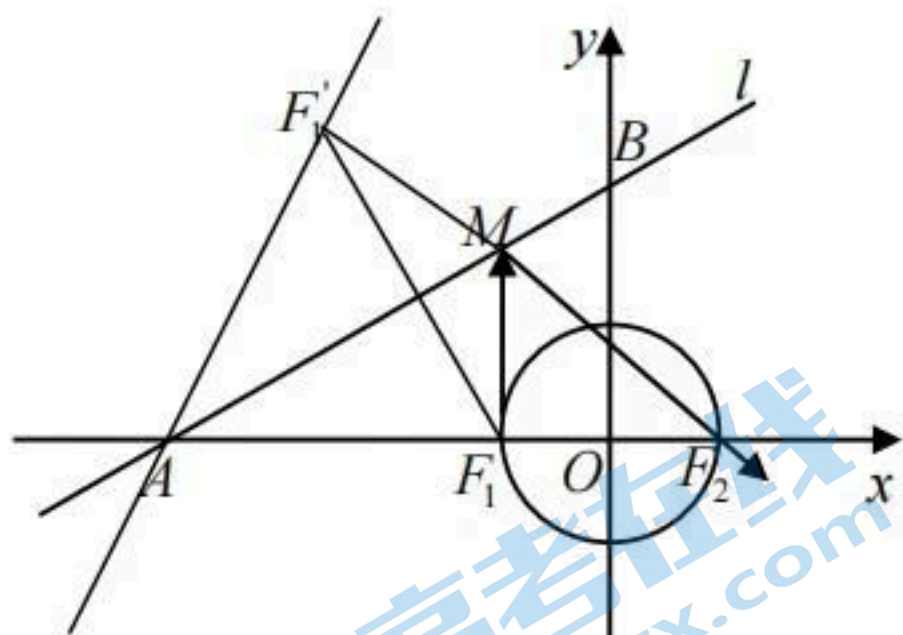


图 (1)

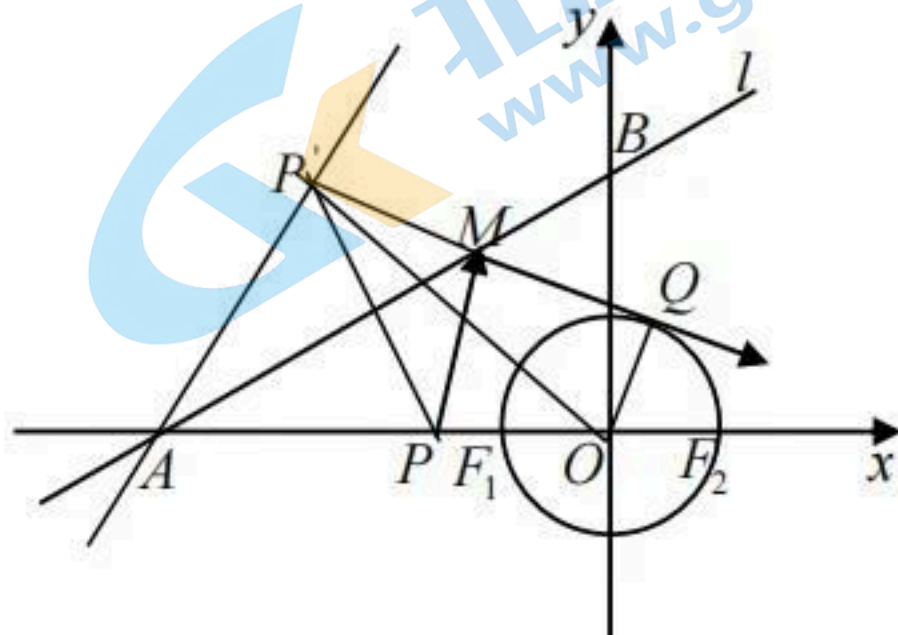


图 (2)

22. 解: (1) 设纵断面层数为 n , 则 $1+2+3+\dots+n \leq 2009$

即 $\frac{n(n+1)}{2} \leq 2009$, $n^2 + n - 4018 \leq 0$, 经带入 $n = 62$ 满足不等式, $n = 63$ 不满足

当 $n = 62$ 时, 剩余的圆钢最少 2 分

此时剩余的圆钢为 $2009 - \frac{62(62+1)}{2} = 56$; 4 分

(2) 当纵断面为等腰梯形时, 设共堆放 n 层, 第一层圆钢根数为 x , 则由题意得:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n-1) = 2009, \text{ 化简得 } nx + \frac{1}{2}n(n-1) = 2009,$$

$$\text{即 } n(2x+n-1) = 2 \times 2009 = 2 \times 7 \times 7 \times 41, \text{ 6 分}$$

因 $n-1$ 与 n 的奇偶性不同, 所以 $2x+n-1$ 与 n 的奇偶性也不同, 且 $n < 2x+n-1$, 从而

$$\text{由上述等式得: } \begin{cases} n=7 \\ 2x+n-1=574 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n=14 \\ 2x+n-1=287 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n=41 \\ 2x+n-1=98 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} n=49 \\ 2x+n-1=82 \end{cases}, \text{ 所以共有 4 种方案可供选择。 8 分}$$

(3) 因层数越多, 最下层堆放得越少, 占用面积也越少, 所以由 (2) 可知:

若 $n = 41$, 则 $x = 29$, 说明最上层有 29 根圆钢, 最下层有 69 根圆钢, 两腰之长为 400 cm,

上下底之长为 280 cm 和 680cm, 从而梯形之高为 $200\sqrt{3}$ cm,

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

