# 2023 北京四中高三 10 月月考

# 数　　学

**（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）**

## 一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分、共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{x\mid x\geq 0\}$， $B=\{0,1,2\}$，则（　）

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$　　C. $A\cup B=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

2. 在复平面内，复数 $\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}$ 对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设 $a=\lg e, b=(\lg e)^2, c=\lg\sqrt{e}$, 则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

4. 下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $y=x^3$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\ln\dfrac{1}{x^2}$　　D. $y=2^{|x|}$

5. 若不等式 $|x-3|+|x-4|>a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 $a$ 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]$

6. 设 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，“$(\frac{1}{2})^x>1$”是“$\dfrac{1}{x}<1$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 若 $f(x)=|\log_2(1-x)|$ 在区间 $M$ 上单调递增，则 $M$ 可以是（　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(0,1)$

8. 设偶函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)+f(x+1)=4$，当 $x\in(-3,-2]$ 时， $f(x)=4x+12$．则 $f(12.5)=$（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x<0$ 时， $f(x)>0$．给出以下四个结论：

① $f(0)=0$；

② $f(x)$ 可能是偶函数；

③ $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上一定存在最大值 $f(n)$；

④ $f(x-1)>0$ 的解集为 $\{x|x<1\}$ .

其中正确的结论为（ ）

A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④

10. 下图展示了一个由区间 $(0,1)$ 到实数集 R 的映射过程：区间 $(0,1)$ 中的实数 $m$ 对应数轴上的点 $M$ （如图 1）；将线段 $AB$ 围成一个圆，使两端点 A 、$B$ 恰好重合（从 A 到 $B$ 是逆时针，如图 2）；再将这个圆放在平面直角坐标系中，使其圆心在 $y$ 轴上，点 A 的坐标为 $(0,1)$（如图 3），图 3 中直线 $AM$ 与 $x$ 轴交于点 $N(n,0)$，则 $m$ 的象就是 $n$，记作 $f(m)=n$ .

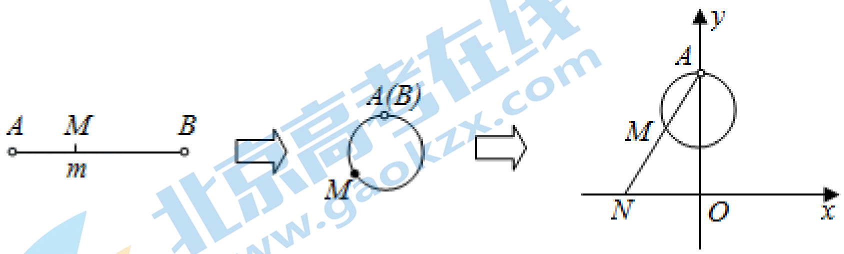



图1 图2 图3

则下列命题中正确的是（ ）

A. $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$ B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 在其定义域上单调递增 D. $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 命题“$\exists x\in \mathrm{R}, x^3>2$”的否定是________.

12.计算：$\log_3 75-2\log_9 5-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}=$______.

13. 函数 y=$\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为__________________________.

14. 若存在 $x<0$ 使得 $\mathrm{e}^x-a=\dfrac{1}{x-1}$ 成立，则实数 $a$ 的取值范围是________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, x\le 0\\ x^2-3ax+a, x>0\end{cases}$ .

①若 $a=0$，则函数 $f(x)$ 的值域为________；

②若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，则实数 $a$ 的取值范围是________.

## 三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$ .

（I）若点 $P(1,-\sqrt{3})$ 在角 $\alpha$ 的终边上，求 $f(\alpha)$ 的值；

（II）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 $f(x)$ 的值域.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x_0$ 处取得极小值 $-\frac{3}{2}$，其导函数为 $f'\left(x\right)$. 当 $x$ 变化时，$f'\left(x\right)$ 变化情况如下表：

| $x$ | $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ | $-\frac{2}{3}$ | $\left(-\frac{2}{3},1\right)$ | 1 | $\left(1,+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | + | 0 | - | 0 | + |

（1）写出 $x_0$ 的值，并说明理由；

（2）求 $a,b,c$ 的值.

18. 国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达 35%以上．截至 2019 年底，这 46 个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近 70%．某企业积极响应国家垃圾分类号召，在科研部门的支持下进行技术创新，新上一种把厨余垃圾加工处理为可重新利用的化工产品的项目．已知该企业日加工处理量 $x$（单位：吨）最少为 70 吨，最多为 100 吨．日加工处理总成本 $y$（单位：元）与日加工处理量 $x$ 之间的函数关系可近似地表示为 $y=\frac{1}{2}x^2+40x+3200$，且每加工处理 1 吨厨余垃圾得到的化工产品的售价为 100 元.

（1）该企业日加工处理量为多少吨时，日加工处理每吨厨余垃圾的平均成本最低？此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损还是盈利状态？

（2）为了该企业可持续发展，政府决定对该企业进行财政补贴，补贴方式共有两种.

① 每日进行定额财政补贴，金额为 2300 元；

② 根据日加工处理量进行财政补贴，金额为 $30x$ .

如果你是企业的决策者，为了获得最大利润，你会选择哪种补贴方式进行补贴？为什么？

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义域为 $\left(-1,1\right)$ 的奇函数，满足 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）用定义证明 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上是增函数；

（3）求不等式 $f\left(\log_2\left(2t-1\right)\right)+f\left(\log_2 t\right)<0$ 的解集.

20. 已知函数 $f(x)=2a\ln x-x^2+1$.

（1）若 $a$=1，求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（2）若 $a>0$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值；

（3）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 $a$ 的最大值.

21. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 $x$，$y$ 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 $x$，$y$ 中最小的数.

（1）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 $a_4$ 的所有可能值；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（3）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 $M$，使得对任意的正整数 $n$，都有 $a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的 $M$；如果不存在，说明理由.

# 参考答案

## 一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分、共 40 分）

1. 【答案】B

【分析】判定出两集合的关系判断选项 AB；求得 $A\cup B=A$ 否定选项 C；求得 $A\cap B\neq\varnothing$ 否定选项 D.

【详解】由 $A=\{x\mid x\geq 0\}$， $B=\{0,1,2\}$，可得 $B\subsetneqq A$

故选项 A 判断错误；选项 B 判断正确；

$A\cup B=\{x\mid x\geq 0\}\cup\{0,1,2\}=\{x\mid x\geq 0\}\neq B$，则选项 C 判断错误；

$A\cap B=\{x\mid x\geq 0\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}\neq\varnothing$，则选项 D 判断错误.

故选：B

2. 【答案】D

【分析】根据复数的乘、除法运算可得 $\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$，结合复数的几何意义即可求解.

【详解】 $\dfrac{5}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{5(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{10-5\mathrm{i}}{5}=2-\mathrm{i}$，

所以该复数在复平面内的点的坐标为 $(2,-1)$，位于第四象限.

故选：D.

3. 【答案】B

【详解】：因为 $1<e<\sqrt{10}$，所以 $0<\lg e<\lg\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$，那么 $(\lg e)^2<\dfrac{1}{2}\lg e=\lg\sqrt{e}<\lg e$，

所以 $a>c>b$.

4. 【答案】C

【分析】根据幂函数，余弦函数，对数函数及指数函数的奇偶性与单调性逐一判断即可.

【详解】对于 A，函数 $y=f(x)=x^3$，

因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$，所以函数 $y=x^3$ 为奇函数，故 A 不符题意；

对于 B，因为 $\cos\dfrac{\pi}{2}=\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$，

所以函数 $y=\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是减函数，故 B 不符题意；

对于 C，函数 $y=f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2}$，

因为 $f(-x)=\ln\dfrac{1}{x^2}=f(x)$，所以函数 $y=\ln\dfrac{1}{x^2}$ 为偶函数，

令 $\mu=\dfrac{1}{x^2}$，

令 $t=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

而函数 $y=\dfrac{1}{t}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $\mu=\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又函数 $y=\ln\mu$ 为增函数，

所以函数 $y=\ln\dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 C 符合题意；

对于 D，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=2^{|x|}=2^x$ 为增函数，故 D 不符题意.

故选：C.

5.【答案】A

【分析】令 $f(x)=|x-3|+|x-4|$，由题意可得 $a<f(x)_{\min}$ 恒成立，结合 $|x-3|+|x-4|\geq|(x-3)-(x-4)|$ 即可求解.

【详解】令 $f(x)=|x-3|+|x-4|$，

则 $f(x)=|x-3|+|x-4|\geq|(x-3)-(x-4)|=1$，

当且仅当 $(x-3)(x-4)\leq 0$ 等号成立，所以 $f(x)_{\min}=1$，

又 $|x-3|+|x-4|>a$ 的解集为 R，

所以 $a<f(x)_{\min}$ 恒成立，故 $a<1$，

即实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

故选：A.

6.【答案】A

【详解】由 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>1$ 解得：$x<0$.

由 $\dfrac{1}{x}<1$ 化为：$\dfrac{x-1}{x}>0$，即 $x(x-1)>0$，解得 $x>1$ 或 $x<0$.

$\therefore$“$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>1$”是“$\dfrac{1}{x}<1$”的充分不必要条件，

故选 A

7.【答案】D

【分析】根据复合函数的单调性可知函数 $y=\log_2(1-x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，且过原点 $(0,0)$，进而得 $f(x)=|\log_2(1-x)|$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，即可求解.

【详解】函数 $y=1-x$ 在 R 上单调递减，函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，

所以函数 $y=\log_2(1-x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，且过原点 $(0,0)$，

所以函数 $f(x)=|\log_2(1-x)|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增.

故选：D.

8. 【答案】A

【分析】根据偶函数的性质以及已知条件的等式，即可将 $f(12.5)$ 转化为 $f(-2.5)$ 求解.

【详解】因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，

又 $f(x)+f(x+1)=4$，

则 $f(12.5)=4-f(11.5)=4-4+f(10.5)$

$=4-f(9.5)=4-4+f(8.5)=4-f(7.5)$

$=4-4+f(6.5)=4-f(5.5)=4-4+f(4.5)$

$=4-f(3.5)=4-4+f(2.5)=f(-2.5)=4\times(-2.5)+12=2$.

故选：A

9. 【答案】C

【分析】令 $x=0$，即可判断①；令 $y=-x$，结合奇偶性得定义即可判断②；设 $x<y$，结合当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，判断出函数的单调性，即可判断③④.

【详解】对于①，令 $x=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$，故①正确；

对于②，令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，

又当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x)$ 不是常函数，不可能是偶函数，故②错误；

对于③，设 $x<y$，则 $x-y<0$，

则 $f(x-y)=f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)>0$，

所以 $f(x)>f(y)$，所以 $f(x)$ 是减函数，

所以 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上一定存在最大值 $f(m)$，故③错误；

对于④，因为 $f(x)$ 为减函数，$f(0)=0$，

由 $f(x-1)>0=f(0)$，得 $x-1<0$，解得 $x<1$，

所以 $f(x-1)>0$ 的解集为 $\{x|x<1\}$，故④正确.

故选：C.

10. 【答案】C

【分析】借助于图形来看四个选项，先由 $f(\frac{1}{4})=-1$ 可判断 A，实数 $m$ 所在区间 $(0,1)$ 不关于原点对称，知 B 错，从图形上可得 $f(x)$ 在定义域上单调递增，C 对，先找到 $f(\frac{1}{2})=0$，再利用图形判断 D 错，

【详解】如图，因为点 $M$ 在以 $\left(0,1-\frac{1}{2\pi}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2\pi}$ 为半径的圆上运动，

对于 A，当 $m=\frac{1}{4}$ 时，$M$ 的坐标为 $(-\frac{1}{2\pi}$，$1-\frac{1}{2\pi})$，

直线 $AM$ 的方程为 $\dfrac{y-1}{1-\frac{1}{2\pi}-1}=\dfrac{x-0}{-\frac{1}{2\pi}-0}$，即 $y=x+1$，所以点 $N$ 的坐标为 $(-1,0)$，

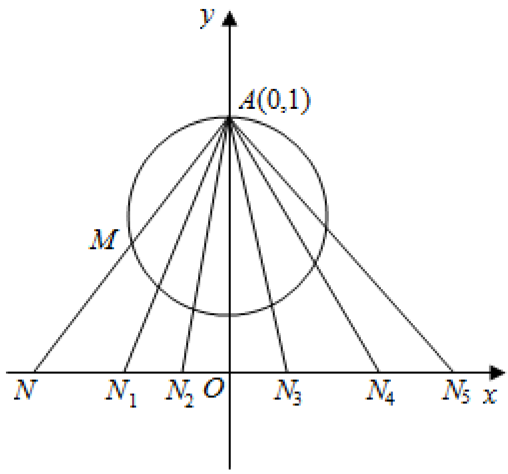
故 $f(\frac{1}{4})=-1$，即 A 错.

对于 B，因为实数 $m$ 所在区间 $(0,1)$ 不关于原点对称，所以 $f(x)$ 不存在奇偶性．故 B 错.

对于 C，当实数 $m$ 越来越大时，直线 $AM$ 与 $x$ 轴的交点 $N(n,0)$ 也越来越往右，即 $n$ 也越来越大，所以 $f(x)$ 在定义域上单调递增，即 C 对.

对于 D，当实数 $m=\frac{1}{2}$ 时，对应的点在点 A 的正下方，此时点 $N(0,0)$，所以 $f(\frac{1}{2})=0$，

再由图形可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{2}$，$0)$ 对称，而非关于 $y$ 轴对称，即 D 错.




故选：C.

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$\forall x\in R, x^3\le 2$

【分析】根据存在量词命题的否定为全称量词命题即可得解.

【详解】因为存在量词命题的否定为全称量词命题，

所以命题“$\exists x\in R, x^3>2$”的否定是 $\forall x\in R, x^3\le 2$.

故答案为：$\forall x\in R, x^3\le 2$.

12. 【答案】1

【分析】根据对数运算法则即可求解.

【详解】$\log_3 75-2\log_9 5-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}=\log_3 75-\log_3 5-\log_3 5=\log_3\frac{75}{5\times 5}=\log_3 3=1$

故答案为：1

13.【答案】$(-1,1)$

【分析】根据函数表达式得到使得函数有意义只需要$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases}$,解这个不等式取得交集即可.

【详解】由$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases}$得$-1<x<1$.

故答案为$(-1,1)$.

【点睛】求函数定义域的类型及求法:(1)已知函数解析式：构造使解析式有意义的不等式(组)求解;(2)抽象函数：①若已知函数$f(x)$的定义域为$[a,b]$，其复合函数$f[g(x)]$的定义域由$a\le g(x)\le b$求出;②若已知函数$f[g(x)]$的定义域为$[a,b]$，则$f(x)$的定义域为$g(x)$在$x\in[a,b]$上的值域.

14.【答案】$(0,2)$

【分析】利用当$x\in(-\infty,0)$时，由函数$y=\mathrm{e}^x$与$y=\frac{1}{x-1}$的单调性可得函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x-1}$单调性，进而得出$a$的取值范围.

【详解】当$x\in(-\infty,0)$时，函数$y=\mathrm{e}^x$与$y=\frac{1}{x-1}$在$x<0$分别具有单调递增与单调递减.

$\therefore$函数$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x-1}$在$x<0$上单调递增.

$\therefore f(x)<f(0)=2^0-\frac{1}{0-1}=2$,

又当$x\to-\infty$时，$f(x)\to 0$,

$\therefore 0<f(x)<2$.

$\because$存在$x\in(-\infty,0)$使得方程$2^x-\frac{1}{x-1}-a=0$成立,

$\therefore a\in(0,2)$.

故答案为：$(0,2)$

15.【答案】 ①. $(0,+\infty)$

②. $\left(\frac{4}{9},1\right]$

【分析】根据二次函数和指数函数的性质即可求出函数$f(x)$的值域；根据零点和对应方程的解得关系可知，当$x\le 0$时方程$f(x)=0$有1个解，当$x>0$时方程$f(x)=0$有2个解，结合$\Delta>0$即可求解.

【详解】若 $a=0$， $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，

当 $x\le 0$ 时， $f(x)=2^x\in(0,1]$，

当 $x>0$ 时， $f(x)=x^2\in(0,+\infty)$，

所以 $f(x)\in(0,+\infty)$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$；

若函数 $f(x)$ 有三个零点，

当 $x\le 0$ 时，令 $f(x)=2^x-a=0\Rightarrow a=2^x\in(0,1]$，

当 $x>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有 2 个解，则 $\Delta>0$，

即 $9a^2-4a>0$，由 $a>0$ 解得 $a>\frac{4}{9}$，

综上，$\frac{4}{9}<a\le 1$，即实数 $a$ 的取值范围为 $(\frac{4}{9},1]$.

故答案为：$(0,+\infty)$；$(\frac{4}{9},1]$.

## 三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.【答案】（I） $-3$ （II） $[-2,1]$

【分析】（I）利用三角函数定义得正余弦值，再代入计算即可；（II）化简函数解析式，再整体代入求值域即可

【详解】（I）因为点 $P(1,-\sqrt{3})$ 在角 $\alpha$ 的终边上，

所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

所以 $f(\alpha)=\sqrt{3}\sin 2\alpha-2\sin^2\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha$

$=2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{1}{2}-2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=-3$

（II） $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x-1$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$，

因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le 1$，

所以 $f(x)$ 的值域是 $[-2,1]$

17.【答案】（1） $x_0=1$，理由见解析；

（2）$a=-\frac{1}{2},b=-2,c=0$

【分析】（1）根据函数极小值点的定义求解即可；

（2）根据题意得$\begin{cases}f'(1)=0\\ f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0\\ f(1)=-\frac{3}{2}\end{cases}$，进而解方程即可得答案.

【小问 1 详解】

解：$x_0=1$，理由如下：

由表格中的数据可知，

当$x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in\left(-\frac{2}{3},1\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

所以，当$x=-\frac{2}{3}$时，函数$f(x)$取得极大值$f\left(-\frac{2}{3}\right)$，

当$x=1$时，函数$f(x)$取得极小值$f(1)=-\frac{3}{2}$.

所以，$x_0=1$为函数$f(x)$的极小值点.

【小问 2 详解】

解：由题知$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

所以，结合（1）有：$\begin{cases}f'(1)=0\\ f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0\\ f(1)=-\frac{3}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}3+2a+b=0\\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3}a+b=0\\ 1+a+b+c=-\frac{3}{2}\end{cases}$，解得$a=-\frac{1}{2},b=-2,c=0$.

所以，$a=-\frac{1}{2},b=-2,c=0$

18.【答案】（1）加工处理量为80吨时，每吨厨余垃圾的平均加工成本最低，此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损状态；（2）选择两种方案均可，理由见解析.

【分析】

（1）根据条件写出每吨厨余垃圾的平均成本表达式，利用基本不等式求解出其最小值，并判断处理1吨厨

余垃圾处于亏损还是盈利状态；

（2）根据两种补贴方式分别列出企业日获利的函数表达式，并求解出最大值，将最大值进行比较确定出所选的补贴方式.

【详解】解：（1）由题意可知，每吨厨余垃圾平均加工成本为$\frac{y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{3200}{x}+40\ x\in[70,100]$.

又$\frac{x}{2}+\frac{3200}{x}+40\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{3200}{x}}+40=2\times 40+40=120$.

当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{3200}{x}$，即$x=80$吨时，每吨厨余垃圾的平均加工成本最低.

因为$100<120$，所以此时该企业处理1吨厨余垃圾处于亏损状态；

（2）若该企业采用第一种补贴方式，设该企业每日获利为$y_1$，由题可得

$$y_1=100x-(\frac{1}{2}x^2+40x+3200)+2300=-\frac{1}{2}x^2+60x-900=-\frac{1}{2}(x-60)^2+900$$

因为$x\in[70,100]$,所以当$x=70$吨时，企业最大获利为850元.

若该企业采用第二种补贴方式，设该企业每日获利为$y_2$，由题可得

$$y_2=130x-(\frac{1}{2}x^2+40x+3200)=-\frac{1}{2}x^2+90x-3200=-\frac{1}{2}(x-90)^2+850$$

因为$x\in[70,100]$,所以当吨$x=90$吨时, 企业最大获利为850元.

结论：选择方案一，因为日加工处理量处理量为70吨时，可以获得最大利润；选择方案二，日加工处理量处理量为90吨时，获得最大利润，能够为社会做出更大贡献；由于最大利润相同，所以选择两种方案均可.

【点睛】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）“一正二定三相等”“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

19.【答案】（1）$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

（2）证明见解析　（3）$\left\{x\middle|\frac{3}{4}<t<1\right\}$

【分析】（1）由$f(0)=\frac{b}{1}=0$，即$b=0$，又$f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$，解得$a=1$，则可得$f(x)$的解析式，

（2）由函数的单调性定义，即可得出答案.

（3）根据函数的奇偶性以及单调性，即可结合对数函数的单调性求解.

【小问1详解】

因为 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 R 上的奇函数，

所以 $f(0)=\dfrac{b}{1}=0$，所以 $b=0$，

又因为 $f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{5}{4}}=\dfrac{2}{5}$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，

$f(-x)=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f\left(x\right)$，故当 $a=1$，$b=0$ 时，$f(x)$ 是奇函数，

故 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

【小问 2 详解】

设 $-1<x_1<x_2<1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

因为 $-1<x_1<x_2<1$，

所以 $x_1-x_2<0$，$1-x_1x_2>0$，$(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上为增函数.

【小问 3 详解】

由于 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 是 $\left(-1,1\right)$ 上的函数，

所以 $\begin{cases}-1<\log_2\left(2t-1\right)<1\\-1<\log_2 t<1\\2t-1>0\\t>0\end{cases}$，解得 $\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}$，

由 $f(x)$ 为奇函数以及 $f\left(\log_2\left(2t-1\right)\right)+f\left(\log_2 t\right)<0$ 得 $f\left(\log_2\left(2t-1\right)\right)<-f\left(\log_2 t\right)=f\left(\log_2 t^{-1}\right)$，

又 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上为增函数．所以 $\log_2\left(2t-1\right)<\log_2 t^{-1}$，

故 $0<2t-1<\dfrac{1}{t}$，解得 $\dfrac{1}{2}<t<1$，

故 $\dfrac{3}{4}<t<1$，

因此解集为 $\left\{x\left|\dfrac{3}{4}<t<1\right.\right\}$

20.【答案】（1）$(1,+\infty)$

（2）答案见详解　（3）1

【分析】（1）求导，利用导数求原函数单调递减区间；（2）分类讨论判断导函数符号，进而确定原函数的单调性及最大值；（3）根据恒成立理解可得$\left[f(x)\right]_{\max}\le 0$，分类讨论，结合（2）运算求解.

【小问 1 详解】

当$a=1$时，$f(x)=2\ln x-x^2+1$，则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{-2(x^2-1)}{x}$，$x>0$

令$f'(x)=\dfrac{-2(x^2-1)}{x}<0$．因为$x>0$，则$x>1$

所以函数$f(x)$的单调递减区间是$(1,+\infty)$

【小问 2 详解】

$f'(x)=\dfrac{2\left(a-x^2\right)}{x}$.

令$f'(x)=0$，由$a>0$，解得$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$（舍去）.

当$\sqrt{a}\le 1$，即$0<a\le 1$时，在区间$[1,+\infty)$上$f'(x)\le 0$，函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是减函数.

所以函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最大值为$f(1)=0$；

当$\sqrt{a}>1$，即$a>1$时，$x$在$[1,+\infty)$上变化时，$f'(x),f(x)$的变化情况如下表

| $x$ | 1 | $(1,\sqrt{a})$ | $\sqrt{a}$ | $(\sqrt{a},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $a\ln a-a+1$ | ↘ |

所以函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最大值为$f(\sqrt{a})=a\ln a-a+1$.

综上所述：

当$0<a\le 1$时，函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最大值为$f(1)=0$；

当$a>1$时，函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最大值为$f(\sqrt{a})=a\ln a-a+1$.

【小问 3 详解】

当$a\le 0$时，则$f'(x)\le 0$在$[1,+\infty)$上恒成立

$\therefore$函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是减函数，则$f(x)\le f(1)=0$

$\therefore a\le 0$成立

当$a>0$时，由（2）可知：

①当$0<a\le 1$时，$f(x)\le f(1)=0$在区间$[1,+\infty)$上恒成立，则$0<a\le 1$成立；

②当$a>1$时，由于$f(x)$在区间$[1,\sqrt{a}]$上是增函数，

所以 $f(\sqrt{a}) > f(1) = 0$，即在区间$[1,+\infty)$上存在 $x=\sqrt{a}$ 使得 $f(x) > 0$，$a>1$不成立

综上所述：$a$的取值范围为$a \le 1$，即$a$的最大值为$1$.

21.【答案】(1) $\{1,3,5\}$

(2) 证明见解析　(3) 不存在，理由见解析

【分析】(1) 根据定义知$a_n \ge 0$，讨论$a_3 > 2$、$a_3 < 2$及$a_3, a_4$大小求所有$a_4$可能值；

(2) 由 $a_n \ge 0$，假设存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$ 使 $a_n \le a_{n_0}$，进而有 $a_{n_0} \le \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le a_{n_0}$，可得 $\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，即可证结论；

(3) 由题设 $a_n \ne a_{n+1}\ (n = 2,3,\cdots)$，令 $S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \ge 1\}$，讨论 $S = \varnothing$、$S \ne \varnothing$ 求证 $a_n > M$ 即可判断存在性.

【小问 1 详解】

由$a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \ge 0$，$a_1 = \max\{2, a_3\} - \min\{2, a_3\} = 1$，

若$a_3 > 2$，则$a_3 - 2 = 1$，即$a_3 = 3$，此时$a_2 = \max\{3, a_4\} - \min\{3, a_4\} = 2$，

当$a_4 > 3$，则$a_4 - 3 = 2$，即$a_4 = 5$；

当$a_4 < 3$，则$3 - a_4 = 2$，即$a_4 = 1$；

若$a_3 < 2$，则$2 - a_3 = 1$，即$a_3 = 1$，此时$a_2 = \max\{1, a_4\} - \min\{1, a_4\} = 2$，

当$a_4 > 1$，则$a_4 - 1 = 2$，即$a_4 = 3$；

当$a_4 < 1$，则$1 - a_4 = 2$，即$a_4 = -1$（舍）；

综上，$a_4$的所有可能值为$\{1,3,5\}$.

【小问 2 详解】

由（1）知：$a_n \ge 0$，则$\min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \ge 0$，

数列$\{a_n\}$中的项存在最大值，故存在$n_0 \in \mathrm{N}^*$使$a_n \le a_{n_0}$，$(n = 1,2,3,\cdots)$，

由$a_{n_0} = \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} - \min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le a_{n_0}$，

所以$\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，故存在$k \in \{n_0+1, n_0+2\}$使$a_k = 0$，

所以 0 为数列$\{a_n\}$中的项；

【小问 3 详解】

不存在，理由如下：由$a_n > 0 (n = 1,2,3,\cdots)$，则$a_n \ne a_{n+1}\ (n = 2,3,\cdots)$，

设$S = \{n \mid a_n > a_{n+1}, n \ge 1\}$，

若$S = \varnothing$，则$a_1 \leqslant a_2$，$a_i < a_{i+1}\ (i = 2,3,\cdots)$，

对任意$M > 0$，取$n_1 = [\dfrac{M}{a_1}] + 2$（$[x]$表示不超过$x$的最大整数），

当 $n>n_1$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_3-a_2)+a_2$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+...+a_1+a_2\geq(n-1)a_1>M$；

若 $S\neq\varnothing$，则 S 为有限集，

设 $m=\max\{n|a_n>a_{n+1},n\geq1\}$，$a_{m+i}<a_{m+i+1}\ (i=1,2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_2=[\frac{M}{a_{m+1}}]+m+1$（$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数），

当 $n>n_2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_{m+2}-a_{m+1})+a_{m+1}$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+...+a_m+a_{m+1}\geq(n-m)a_{m+1}>M$；

综上，不存在正实数 $M$，使得对任意的正整数 $n$，都有 $a_n\leq M$ .

【点睛】关键点点睛：第三问，首选确定 $a_n\neq a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$，并构造集合 $S=\{n|a_n>a_{n+1},n\geq1\}$，讨论 $S=\varnothing$ 、$S\neq\varnothing$ 研究存在性.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！