北大附中2021届高三阶段性检测

数　　学

2021.5

本试卷共150分.考试时长120分钟.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回.

第一部分(选择题　共40分)

一、选择题共10题，每题4分共40分.在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1\}, B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cap B=$　　【　　】

   $A.\{-1,0,1\}$　　$B.\{1,2\}$

   $C.\{0,1,2\}$　　$D.\{0,1\}$

2. 已知复数 z 的虚部为1，且 $|z|=2$，则 z 可以是　　【　　】

   $A.1+i$　　$B.1-i$

   $C.\sqrt{3}+i$　　$D.\sqrt{3}-i$

3. 下列函数中值域是 R 且为偶函数的是　　【　　】

   $A.f(x)=x^2+1$　　$B.f(x)=\log_2|x|$

   $C.f(x)=x^3-x$　　$D.f(x)=\cos x$

4. 已知双曲线 $C_1:x^2-2y^2=1$ 和双曲线 $C_2:mx^2+ny^2=1$ 有共同的渐近线，则 $\frac{m}{n}=$　　【　　】

   $A.-2$　　$B.-\frac{1}{2}$

   $C.\frac{1}{2}$　　$D.2$

5. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha=$　　【　　】

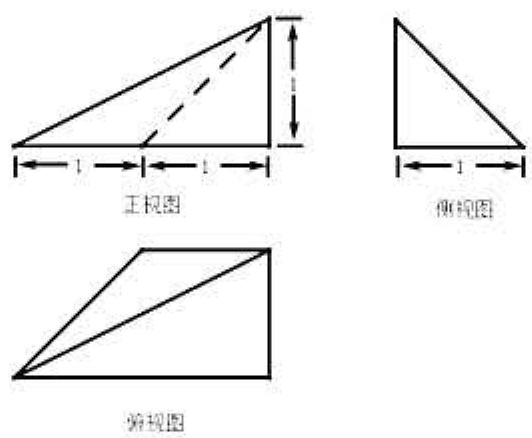
   $A.\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$B.\frac{2}{3}$

   $C.\frac{1}{3}$　　$D.\frac{\sqrt{3}}{9}$

6. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的最大棱长为　　【　　】

   $A.2\sqrt{2}$　　$B.\sqrt{7}$

   $C.\sqrt{6}$　　$D.\sqrt{5}$



7. 已知点 P 是圆 $C:(x+2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与曲线 $W:y^2=8x$ 的一个公共点，点 $Q(2,0)$. 若 $\triangle PCQ$ 是等腰三角形，则满足条件的 r 的个数为 【 】

$A.0$　　　　$B.1$

$C.2$　　　　$D.3$

8. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+t$（t 为常数），S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则“$t\geq 0$”是“$\{a_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 都有最小项”的 【 】

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x-1, & x\leq 1\\ 2x^2-ax+a, & x>1\end{cases}$. 若 $\forall x_1,x_2\in R(x_1\neq x_2)$, 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则实数 a 的取值范围是 【 】

$A.(0,1)$　　　　$B.(1,3]$

$C.[3,4]$　　　　$D.(1,4]$

10. 天干地支纪年法源于中国，中国自古便有十天干与十二地支，十天干即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；十二地支即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥.天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配，排列起来，天干在前，地支在后，天干由“甲”起，地支由“子”起，例如，第一年为“甲子”，第二年为“乙丑”，第三年为“丙寅”……，以此类推，排列到“癸酉”后，天干回到“甲”重新开始，即“甲戌”，“乙亥”，然后地支回到“子”重新开始，即“丙子”……，以此类推.今年是辛丑年，也是伟大、光荣、正确的中国共产党成立100周年，则中国共产党成立的那一年是 【 】

A.辛酉年　　　　B.辛戌年

C.壬酉年　　　　D.壬戌年

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5题，每题5分，共25分.

11. 在 $(2-x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数为__________（用数字作答）.

12. 若函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，则 $f(x)$ 的值域是__________.

13. 能够满足“对任意 $x>0$，$\sin x\cos x<kx$ 总成立”的一个 k 值是__________.

14. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为1，$\angle BAD=60^\circ$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda>0)$. 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=$__________；当 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 取得最小值时，$\lambda=$__________.

15. 在平面直角坐标系 xoy 中，点 $P(x,y)$ 到两个定点 $A(-a,0)$、$B(a,0)$ 的距离之积等于 $a^2(a>0)$，称点 P 的轨迹为双纽线.双纽线是瑞士数学家伯努利于1694年发现的.所以点 P 的轨迹也叫做伯努利双纽线.给出下列结论：①$-\sqrt{2}a\le x\le\sqrt{2}a$；

②点 P 的轨迹的方程为 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$；

③双纽线关于坐标轴及直线 $y=x$ 对称；

④满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有三个.

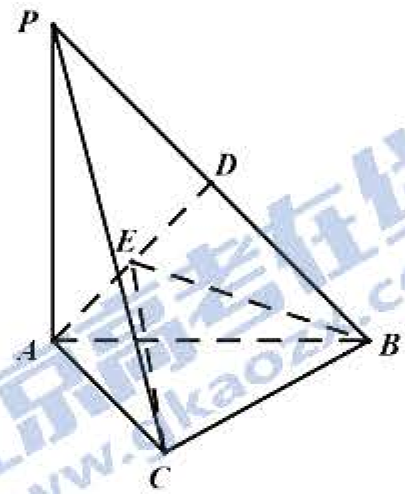
其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共6题，共85分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. （本小题共14分）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC=AB=2$，$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$.侧棱 PB 与平面 ABC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，D 为 PB 的中点.

（1）求证：$PB\perp$ 平面 ACD；

（2）若 E 为 AD 中点，求二面角 $A-EC-B$ 的余弦值.



17. （本小题共14分）在 $\triangle ABC$ 中 $a=2$，$\sin C-\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（1）$\angle C$ 的值；

（2）b 的值和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$A=\frac{\pi}{4}$

条件②：$c=\sqrt{3}+1$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. （本小题共 14 分）某调研机构就该市工薪阶层对“楼市限购令”的态度进行调查，抽调了 5000 名市民，他们月收入人数分布表和对“楼市限购令”赞成人数如下表：

月收入（单位:百元）	$[30,50)$	$[50,70)$	$[70,90)$	$[90,110)$	$[110,130)$	$[130,150)$
调查人数	500	1000	1500	1000	500	500
赞成人数	400	800	1200	414	99	87

（1）若从抽调的 5000 名市民中随机选取一名市民，求该市民赞成“楼市限购令”的概率；

（2）依据上表中的数据，若从该市工薪阶层随机选取两人进行调查，记赞成“楼市限购令”的人数为 X，求求 X 的分布列和数学期望；

（3）若从抽调的收入在 $[30,50)$（百元）的市民中随机抽取两名，记赞成“楼市限购令”的人数为 X_1，期望记作 EX_1；若从抽调的收入在 $[50,90)$（百元）的市民中随机抽取两名，记赞成“楼市限购令”的人数为 X_2，期望记作 EX_2，比较 EX_1 与 EX_2 的大小关系.（直接写出结论即可）

19. （本小题共 14 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,1)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $B(2,0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N.问：x 轴上是否存在点 Q，使得直线 MQ 与直线 NQ 关于 x 轴对称？若存在，求点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

20. （本小题共 15 分）已知函数 $f(x)=(x-1)\left[ax^2+(a+1)x+1\right]$，其中 $a\in R$．

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线 l 的斜率为 4，求实数 a 的值；

（2）当 $a>0$ 时，若函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，求证：$f(x_1)\ge 0$；

（3）若函数 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，写出满足条件的所有 a 的值．

21. （本小题共 14 分）已知无穷数列 $A:a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 满足性质 $P:a_1=0$，$|a_{i+1}+1|=|a_i|(i\in N^*)$，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$．

（1）直接写出 a_2，S_4 的所有可能值；

（2）判断 S_8 能否取到下面的值：$-4,-6,-9$，并说明理由；

（3）证明：$\forall n\in N^*,S_n\le 0$．