中学生标准学术能力基础性测试 2019 年 9 月测试

数学试卷

扫码查成绩

本试卷共 100 分，考试时间 90 分钟。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $(C_U A)\cap(C_U B)=$

A．$\varnothing$　　B．$\{3\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,2,3\}$

2．已知圆 C 的方程为 $2x^2+2y^2-2x+4y-1=0$，则圆 C 的圆心坐标为

A．$(1,2)$　　B．$(1,-2)$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},-1\right)$

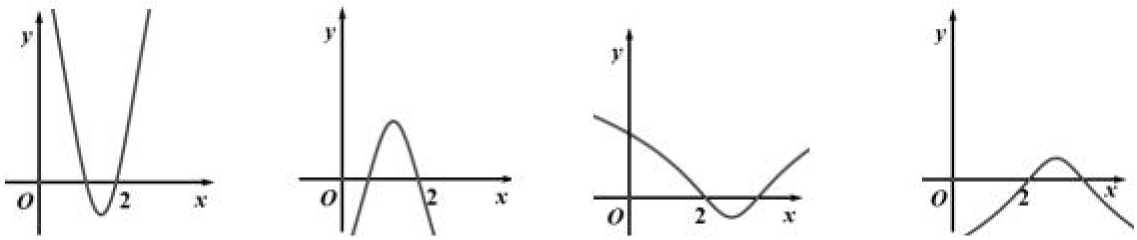
3．已知函数 $y=f(x)+x^3$ 为偶函数，且 $f(1)=1$，则 $f(-1)=$

A．-3　　B．0　　C．3　　D．4

4．已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le 1, \\ x\le 2, \\ x+2y-2\ge 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最小值为

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5．已知函数 $f(x)=\log_a[(x-a)(x-2)+1]$ $(a>0,且\, a\ne 1)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象不可能是



A　　B　　C　　D

6．已知正实数 a,b 满足：$b^a=4$，且 $a+\log_2 b=3$，则 $a+b=$

A．4　　B．5　　C．4 或 5　　D．无法确定

7. 在数列$\{a_n\}$中，记$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$，若$a_1=1$，$\Delta a_1=3$，且数列$\{\Delta a_n\}$满足$\Delta(\Delta a_n)=2$，则$a_{2019}=$

A. 4^{2018}　　B. 2019^2　　C. 6055　　D. 2019

8. 已知$0<x<\frac{\pi}{4}$，设函数$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，$g(x)=\sin 2x$，下列说法正确的是

A. 对任意的$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，都有$f(x)<g(x)$　　B. 存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，使得$f(x_0)=g(x_0)$

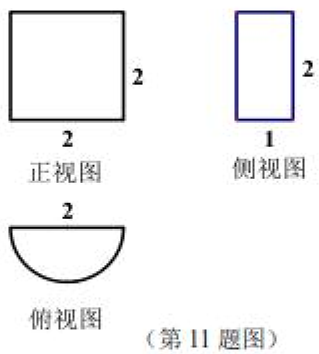
C. 对任意的$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，都有$f(x)>g(x)$　　D. 上述说法都不正确

二、填空题：本大题共 6 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 30 分.

9. 已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_4=8$，则公比$q=$________；$a_2\cdot a_3=$________.

10. 已知向量$\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(1,2)$. 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，则$m=$_______；若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m=$_______.

11. 已知某几何体三视图如图所示，其中俯视图为半径为1的半圆，则该几何体的表面积为________；体积为________.



（第 11 题图）

12. 已知△ABC中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c. 若$a\cos B+b\cos A=\sqrt{7}$，$a+b=5$，$C=\frac{\pi}{3}$，则△ABC的面积为_______.

13. 已知点O为坐标原点，集合$A=\{(x,y)\,|\,(x-2)\cos\alpha+(y-1)\sin\alpha=1,\alpha\in[0,2\pi)\}$，若动点$P\notin A$，则$|\overrightarrow{OP}|$的取值范围为________.

14. 已知二次函数$f(x)=ax^2+x+c\ (a,c\in\mathbf{R})$在区间$[1,2]$有零点，则$4a^2+c^2$的最小值为________.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 38 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（8 分）

设函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x, x\in \mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

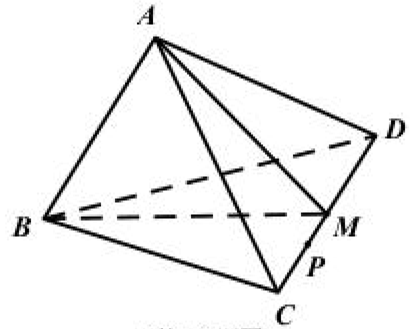
（Ⅱ）若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $f(\alpha)=1$，求 α 的值.

16.（10 分）

如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2$，$AD=AC=BD=BC=3$，点 M 为线段 CD 的中点.

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 ABM；

（Ⅱ）若点 P 是线段 CD 上的动点（包括 C、D 两个端点），设直线 AP 与平面 BCD 所成角为 θ，求 $\sin\theta$ 的最大值.



（第 16 题图）

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$2S_n=na_n+n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求a_1的值，并证明数列$\{a_n\}$是等差数列；

（Ⅱ）若$a_2=2$，求证：$\dfrac{1}{a_3S_1}+\dfrac{1}{a_4S_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n+2}S_n}<\dfrac{1}{2}$.

18.（10 分）

已知函数$f\left(x\right)=6ax^2-bx-a+1$，其中$a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当$b=a+2$时，求证：$y=f(x)$在区间$(0,2)$上有零点；

（Ⅱ）当$a=1$时，若关于x的方程$f\left(x\right)+|6x^2-b|=0$在$(0,2)$上有两个不同的解，求实数$b$的取值范围.

中学生标准学术能力基础性测试 2019 年 9 月测试

数学答案

一．选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	C	B	D	C	B	A

二、填空题：本大题共 6 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 30 分．

9．2；8

10．4;　-1

11．$3\pi+4$；π

12．$\frac{3}{2}\sqrt{3}$

13．$(\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1)$

14．$\frac{4}{5}$

三、解答题：共 38 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本题满分 8 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2},$$ ……………………………………3 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$2k\pi-\frac{\pi}{3}\le 2x\le 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$．……………………5 分

（Ⅱ）因为 $f(\alpha)=1$，所以 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=1$，所以 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

又因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $2\alpha-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$，

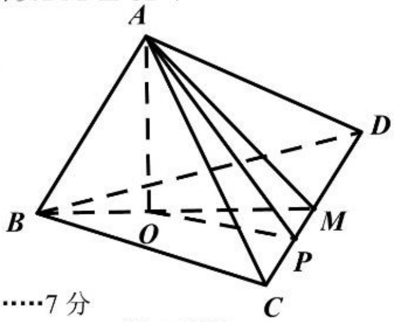
故 $2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$．　　……………………………………8 分

16．（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：在△BCD 中，$BC=BD$，M 是 CD 的中点，所以 $BM\perp CD$，

同理，在△ACD 中，$AM\perp CD$，

所以 $CD\perp$ 平面 ABM；……………………………4 分



第 16 题图

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CD\perp$ 平面 ABM，

又 $CD\subset$ 平面 BCD，

所以平面 $BCD\perp$ 平面 ABM，

过 A 作 $AO\perp BM$ 于 O，

则 $AO\perp$ 平面 BCD，

所以 $\angle APO$ 就是直线 AP 与平面 BCD 所成的角……………7 分

在△AMP 中，$AM\perp MP$，

所以 $AP\geq AM$，

所以 $\sin\theta=\sin\angle APO=\frac{AO}{AP}\leq\frac{AO}{AM}=\sin\angle AMO$，

在△AMB 中，$AB=2$，$AM=BM=2\sqrt{2}$，

所以 $\cos\angle AMO=\frac{8+8-4}{2\times 8}=\frac{3}{4}$，

所以 $\sin\angle AMO=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

即 $\sin\theta$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{7}}{4}$．　　…………………………………………10 分

17．（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：因为 $2S_n=na_n+n$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，　　…………………………………1 分

当 $n\geq 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}+(n-1)$

所以 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}+1$，即 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0$，…………3 分

又 $(n-1)a_{n+1}-na_n+1=0$，

所以 $(n-1)a_{n+1}-2(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}=0$，

因为 $n-1\neq 0$，所以 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；　　…………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，所以 $a_n=n$，$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，　　…………………………7 分

所以

$$\frac{1}{a_{n+2}S_n}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$，……………………8 分

所以$\frac{1}{a_3S_1}+\frac{1}{a_4S_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+2}S_n}=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{2}$．……………………10 分

18．（本题满分 10 分）

（Ⅰ）证明：当$b=a+2$时，$6ax^2-(a+2)x-a+1=0$，

所以$(6x^2-x-1)a-2x+1=0$，

$(2x-1)(3x+1)a-(2x-1)=0$，

$(2x-1)[(3x+1)a-1]=0$，

所以$y=f(x)$在区间$(0,2)$上有零点$x=\frac{1}{2}$；……………………………4 分

（Ⅱ）解：当$a=1$时，设$g(x)=f(x)+|6x^2-b|=6x^2-bx+|6x^2-b|$，$x\in(0,2)$，

①当$b\le 0$时，$g(x)=12x^2-bx-b$，$x\in(0,2)$，

所以$g(x)$在$(\frac{b}{24},+\infty)$上单调递增，即$g(x)$在$(0,2)$上单调递增，

又$g(0)=-b\ge 0$，

所以$g(x)=0$在$(0,2)$上至多有一个解，不合题意；……………6 分

②当$0<b<24$时，$\sqrt{\frac{b}{6}}<2$，

所以$g(x)=\begin{cases} b-bx, x\in\left(0,\sqrt{\frac{b}{6}}\right], \\ 12x^2-bx-b, x\in\left(\sqrt{\frac{b}{6}},2\right), \end{cases}$

易得$g(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{b}{6}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{\frac{b}{6}},2\right)$上单调递增，

又$g(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{b}{6}}\right)$上有解为$x=1$，要满足题意，只要

$$\begin{cases} g(\sqrt{\frac{b}{6}}) = b - b\sqrt{\frac{b}{6}} < 0, \\ g(2) = 48 - 2b - b > 0, \end{cases}$$

所以$6 < b < 16$； ……………………………………………………8 分

③当$b \geq 24$时，$\sqrt{\frac{b}{6}} \geq 2$，

$g(x) = b - bx$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，

所以 $g(x) = 0$ 在 $(0,2)$ 上有唯一解 $x = 1$，不合题意，

综上所述，$6 < b < 16$. ……………………………………………10 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao