2019 北京一七一中学高一（上）期中

数　　学

（考试时间：120 分钟　总分：150 分）

一、选择题（共 12 小题；共 60 分）

1. 设 a，b，$c\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则(　　)

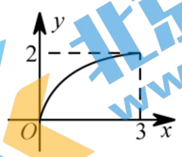
A. $ac>bc$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $a^2>b^2$　　D. $a^3>b^3$

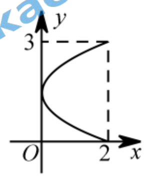
2. 已知命题 p：$\exists x<1$，$x^2\le 1$，则 $\neg p$ 为（　　）

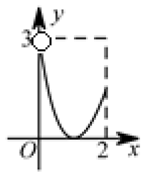
A. $\forall x\ge 1$，$x^2>1$　　B. $\exists x<1$，$x^2>1$

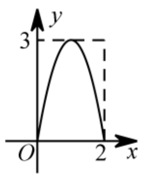
C. $\forall x<1$，$x^2>1$　　D. $\exists x\ge 1$，$x^2>1$

3. 设 $M=\{x|\,0\le x\le 2\}$，$N=\{y|\,0\le y\le 3\}$，给出下列图形，其中能表示从集合 M 到 N 的一个函数的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 若集合 $A=\{x|\,x^2+2x<0\}$，$B=\{x|\,|x|>1\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

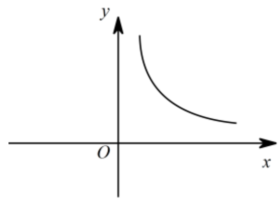
A. $\{x|-2<x<-1\}$　　B. $\{x|-1<x<0\}$

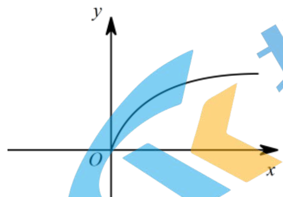
C. $\{x|\,0<x<1\}$　　D. $\{x|\,1<x<2\}$

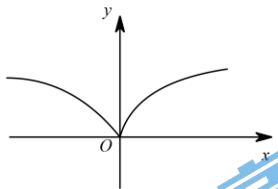
5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\ge 0\\ -x^2+1, & x<0\end{cases}$，则 $f(f(-1))=$ （　　）

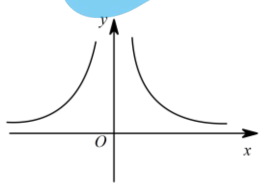
A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

6. 函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图象是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 若关于 x 的不等式 $kx^2-kx<1$ 的解集是全体实数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $-4<k<0$　　B. $-4<k\le 0$

C. $k<-4$ 或 $k>0$　　D. $k<-4$ 或 $k\ge 0$

8. 设 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\ne 0$，则“$x>1$”是“$x+\frac{1}{x}>2$”成立的（　　）

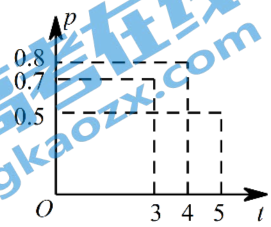
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则满足条件 $f(2x+1)<f(5)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-3,2)$　　B. $(-2,3)$　　C. $(-2,2)$　　D. $[-3,2]$

10. 加工爆米花时，爆开且不糊的粒数的百分比称为"可食用率".



在特定条件下，可食用率 p 与加工时间 t（单位：分钟）满足函数关系 $p=at^2+bt+c$（a,b,c 是常数），下图记录了三次实验的数据．根据上述函数模型和实验数据，可以得到最佳加工时间为（　　）

A. 3.50 分钟　　B. 3.75 分钟　　C. 4.00 分钟　　D. 4.25 分钟

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)=f(2x)+x^2$ 为奇函数，且 $f(2)=3$，则 $f(-2)=$（　　）

A. -2　　B. -5　　C. 1　　D. -3

12. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+5$ 在 $(-\infty,2]$ 上是减函数，且对任意的$x_1,x_2\in[1,a+1]$ 总有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 4$ 则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[1,4]$　　B. $[2,3]$　　C. $[2,5]$　　D. $[3,+\infty)$

二、填空题（共 6 小题；共 30 分）

13. 幂函数的图象经过点 $(4,2)$，那么 $f\left(\frac{1}{8}\right)$ 的值是________.

14. 已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为________.

15. 已知 $f(2x+1)=2x+2$ 且 $f(a)=4$，则 a 的值为________.

16. 若定义在 $[-1,1]$ 上的增函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)<f(1-3x)$，则实数 x 的取值范围是________.

17. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，定义函数 $f(x)=x-[x]$，则下列结论中：

① 函数的值域为 $[0,1]$；② 方程$f(x)=\dfrac{1}{2}$有无数个解；

③ 函数的图象是一条直线；④ 函数是 $\mathbf{R}$ 上的增函数．

正确的有________．（只填序号）

18. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & -2\le x\le c\\ x^{-1}, & c<x\le 3\end{cases}$．若 $c=0$，则 $f(x)$ 的值域是________；若 $f(x)$的值域是 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$，则实数 c 的取值范围是________.

三、解答题（共 5 小题；共 60 分）

19. 已知集合 $A=\{x|\,3\le x<7\}$，$B=\{x|\,x^2-12x+20<0\}$，$C=\{x|\,x<a\}$.

（1）求 $A\cup B$；$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；

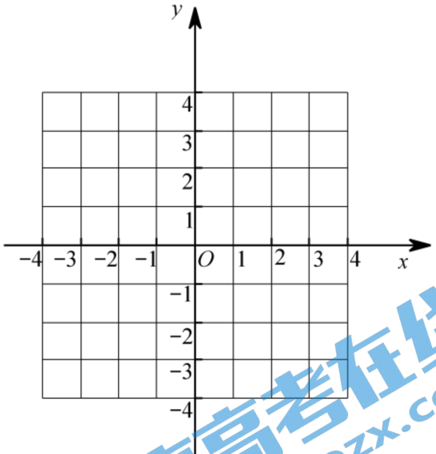
（2）若 $A\cap C\ne\emptyset$，求 a 的取值范围．

20. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$.

（1）求 $f(1)$，$f(-2)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的解析式；

（3）画出 $y=f(x)$ 的简图；写出 $y=f(x)$ 的单调递增区间（只需写出结果，不要解答过程）.

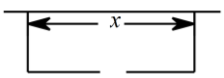


21. 已知函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）判断函数 $f(x)$ 的单调性，并用定义证明.

22. 围建一个面积为 $360\ \mathrm{m}^2$ 的矩形场地，要求矩形场地的一面利用旧墙（利用的旧墙需维修，可供利用的旧墙足够长），其他三面围墙要新建，在旧墙对面的新墙上要留一个宽 $2\ \mathrm{m}$ 的进出口，如图所示．已知旧墙的维修费用为 45 元/m，新墙的造价为 180 元/m．设利用旧墙的长度为 x（单位：m），修建此矩形场地围墙的总费用为 y（单位：元）.



（1）将 y 表示为 x 的函数，并写出此函数的定义域；

（2）若要求用于维修旧墙的费用不得超过修建此矩形场地围墙的总费用的 15%，试确定 x，使修建此矩形场地围墙的总费用最小，并求出最小总费用.

23. 已知函数 $f(x)=ax^2+x$ 定义在区间 $[0,2]$ 上，其中 $a\in[-2,0]$.

（1）若 $a=-1$，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）求 $f(x)$ 的最大值.

2019 北京一七一中学高一（上）期中数学参考答案

第一部分

1. D

2. C

3. D

4. A

5. C

6. A 【解析】因为 $-\frac{1}{2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，排除选项 B，C；又 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，故排除选项 D.

7. B

8. A 【解析】当 $x<0$ 时，不等式 $x+\frac{1}{x}>2$ 不成立，

当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，取等号，

当 $x>1$ 时，不等式则 $x+\frac{1}{x}>2$ 成立，反之不一定成立 .

9. A 【解析】根据题意，函数 $f(x)$ 为偶函数且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$f(2x+1)<f(5)\Rightarrow|2x+1|<5$，即 $-5<2x+1<5$，

解可得：$-3<x<2$，即 x 的取值范围为 $(-3,2)$.

10. B

【解析】答案：B

11. B 【解析】因为 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $g(-x)=-g(x)$，

所以 $g(-1)=-g(1)$，

所以 $f(-2)+1=-[f(2)+1]$，且 $f(2)=3$，

所以 $f(-2)=-5$.

12. B 【解析】函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=a$，且在区间 $(-\infty,2]$ 上是减函数，得 $a\geq 2$，对任意的 $x_1,x_2\in[1,a+1]$，总有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 4$ 恒成立，即 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}\leq 4$，又 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}$，当 $x\in[1,a+1]$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)$，$f(x)_{\max}=f(1)$，所以 $f(1)-f(a)=(a-1)^2\leq 4$，又 $a\geq 2$，所以 a 的取值范围是 $[2,3]$.

第二部分

13. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】设幂函数为：$y=x^{\alpha}$

因为幂函数的图象经过点 $(4,2)$，

所以 $2=4^{\alpha}$，

所以 $\alpha=\frac{1}{2}$，

所以 $y=x^{\frac{1}{2}}$，

所以 $f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14. 4

【解析】因为 $a>b$，$b>0$，$a+b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立．

15. 3

【解析】由图象可知 $1\leq m\leq 2$．

16. $\left[0,\frac{1}{2}\right)$

【解析】因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，且 $f(x-1)<f(1-3x)$，所以 $\begin{cases}x-1<1-3x,\\-1\leq x-1\leq 1,\\-1\leq 1-3x\leq 1,\end{cases}$ 解得 $0\leq x<\frac{1}{2}$．

17. ②

18. $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$

第三部分

19. （1） $B=\{x|\,x^2-12x+20<0\}=\{x|\,2<x<10\}$；

因为 $A=\{x|\,3\leq x<7\}$，

所以 $A\cup B=\{x|\,2<x<10\}$；

因为 $A=\{x|\,3\leq x<7\}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|\,x<3\text{ 或}x\geq 7\}$；$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|\,2<x<3\text{ 或 }7\leq x<10\}$．

（2） 因为 $A=\{x|\,3\leq x<7\}$，$C=\{x|\,x<a\}$．

$A\cap C\neq\emptyset$，

所以 $a>3$．

所以 a 的取值范围为 $(3,+\infty)$．

20. （1） 当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，$f(-x)=f(x)$，

所以 $f(1)=-1$，$f(-2)=f(2)=0$．

（2） 因为 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，

所以 $f(x)=f(-x)=x^2+2x$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geq 0\\x^2+2x, & x<0\end{cases}$．

（3） 因为 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geq 0\\x^2+2x, & x<0\end{cases}$，

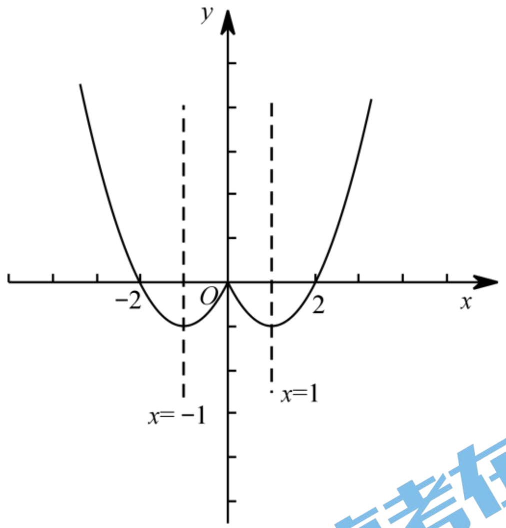
所以当 $x\geq 0$ 时，$y=x^2-2x$，抛物线开口向上，对称轴方程为 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-1)$，

当 $y=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=2$；当 $x=0$ 时，$y=0$．

当 $x<0$ 时，$y=x^2+2x$，抛物线开口向上，对称轴方程为 $x=-1$，顶点坐标为 $(-1,-1)$，

当 $y=0$ 时，$x=-2$.

由此作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



结合图象，知 $f(x)$ 的增区间是 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

21. （1） 由题意可知 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $\frac{-ax+b}{1+x^2}=-\frac{ax+b}{1+x^2}$，

所以 $b=0$，

所以 $f(x)=\frac{ax}{1+x^2}$，

因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$，

所以 $a=1$，

所以 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

（2） $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递增，

证明如下：

设 $-1<x_1<x_2<1$，

则：$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$，

因为 $-1<x_1<x_2<1$，

所以 $x_1-x_2<0$，$1-x_1x_2>0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，

所以 $\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

22. （1） 设矩形场地的宽为 a m， 则

$$y=45x+180(x-2)+180\times 2a=225x+360a-360.$$

因为 $ax=360$ ，

所以 $a=\dfrac{360}{x}$ ，

所以 $y=225x+\frac{360^2}{x}-360\,(x>2)$.

（2） 因为 $x>2$，

所以 $y=225x+\frac{360^2}{x}-360\geqslant 2\sqrt{225\times 360^2}-360=10440$.

当且仅当 $225x=\frac{360^2}{x}$ ，即 $x=24$ 时，等号成立.

当 $x=24$ 时，修建此矩形场地围墙的总费用的 15% 为：1566 元，用于维修旧墙的费用为：1080 元.

因为 $1080<1566$ ，

所以当 $x=24$ 时，修建此矩形场地围墙的总费用最小，最小总费用是 10440 元.

23. （1） 当 $a=-1$ 时，$f(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上 $f(x)$ 单调递减.

因为 $f(0)=0$，$f(2)=-2$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 -2.

（2） ①当 $a=0$ 时，$f(x)=x$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=2$.

当 $-2\le a<0$ 时，函数 $f(x)=ax^2+x$ 图象的对称轴方程是 $x=-\frac{1}{2a}$.

②当 $0<-\frac{1}{2a}\le 2$，即 $-2\le a\le-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=-\frac{1}{4a}$.

③当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=4a+2$.

综上，当 $-2\le a\le-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=-\frac{1}{4a}$;

当 $-\frac{1}{4}<a\le 0$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $4a+2$.