

# “皖南八校”2020 届高三第一次联考

## 数 学 (文科)

2019.10

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。第 I 卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;第 II 卷请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:集合与常用逻辑用语、函数与导数、三角函数与解三角形、平面向量、复数。

### 第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{-2, 2, 4\}$ ,  $B = \{x | x^2 = 4\}$ , 则  $A \cap B =$

A.  $\{4\}$

B.  $\{2\}$

C.  $\{2, 4\}$

D.  $\{-2, 2\}$

2. 若复数  $z = \frac{1-2i}{1+3i}$ , 则  $|z| =$

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. 已知  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , 则  $\sin(\pi + \alpha) + \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) =$

A.  $-\frac{2}{3}$

B.  $\frac{2}{3}$

C.  $-\frac{1}{3}$

D. 0

4. 设  $a = (1, 2)$ ,  $b = (x, 1)$ , 且  $a \perp b$ , 则  $|a + 2b| =$

A.  $\sqrt{5}$

B. 4

C. 5

D.  $5\sqrt{2}$

5. 若  $a = \log_3 0.3$ ,  $b = \log_{0.3} 0.2$ ,  $c = 0.2^{0.3}$ , 则

A.  $a < b < c$

B.  $b < c < a$

C.  $a < c < b$

D.  $b < a < c$

座位号

考场号

准考证号

姓名

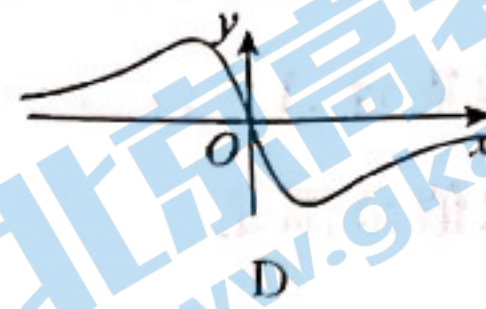
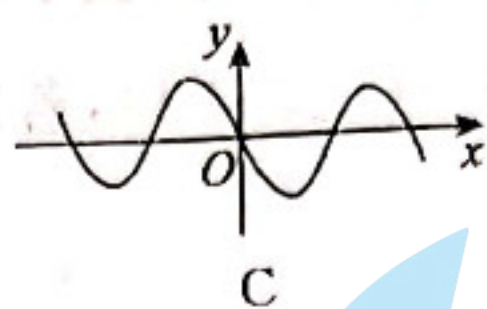
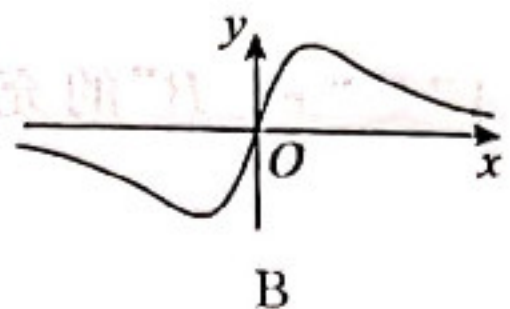
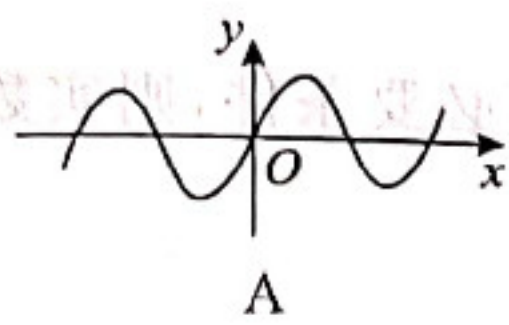
班级

学校

答题区域内密封线

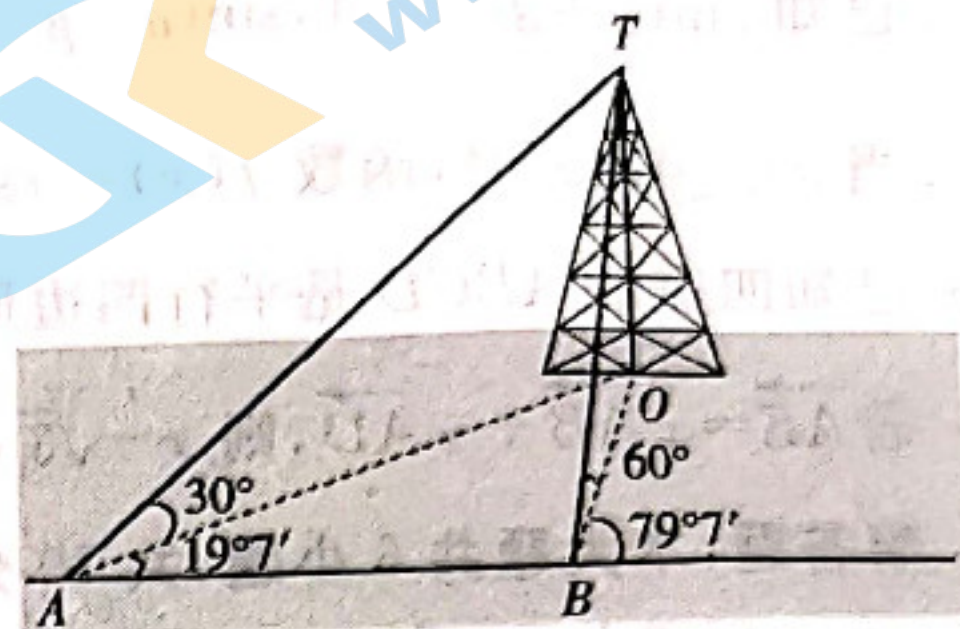


6. 函数  $y = \frac{x + \sin x}{1 + x^2}$  的部分图象大致为



7. 为了测量铁塔  $OT$  的高度, 小刘同学在地面  $A$  处测得铁塔在东偏北  $19^\circ 7'$  方向上, 塔顶  $T$  处的仰角为  $30^\circ$ , 小刘从  $A$  处向正东方向走 140 米到地面  $B$  处, 测得铁塔在东偏北  $79^\circ 7'$  方向上, 塔顶  $T$  处的仰角为  $60^\circ$ , 则铁塔  $OT$  的高度为

- A.  $20\sqrt{7}$  米      B.  $25\sqrt{7}$  米  
C.  $20\sqrt{21}$  米      D.  $25\sqrt{21}$  米



8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  的顶点为  $O$ , 始边与  $x$  轴正半轴重合, 终边过点  $(-\sqrt{2}, y)$ , 且

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}, \text{ 则 } \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$$

- A.  $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$       B.  $-\frac{1+\sqrt{7}}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{7}-1}{4}$       D.  $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

9. 关于复数  $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$ , 下列命题 ① 若  $|z + i| = 1$ , 则  $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ ; ② 若  $z$  是实数, 则  $y = 0$ ; ③ 若  $zi$  是纯虚数, 则  $x \neq 0$ ; ④ 若  $\frac{1}{z} = 1 + i$ , 则  $x + y = 1$ . 其中真命题个数为

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

10. 若曲线  $f(x) = (ax - 1)e^{x-2}$  在点  $(2, f(2))$  处的切线过点  $(3, 3)$ , 则函数  $f(x)$  的单调递增区间为

- A.  $(0, +\infty)$       B.  $(-\infty, 0)$       C.  $(2, +\infty)$       D.  $(-\infty, 2)$

11. 已知函数  $f(x) = |\sin x| + \cos x$ , 则下列说法正确的是

- A. 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$  对称  
B. 函数  $f(x)$  在  $[\pi, 2\pi]$  上单调递增  
C. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0) (k \in \mathbf{Z})$  对称  
D. 函数  $f(x)$  的值域为  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(a+2)x + 1 - 2a, & x \leq 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$ , 若函数  $y = f(x)$  与函数  $y = a(x - 3)$  的图象

有且只有 3 个公共点, 则实数  $a$  的取值范围是

- A.  $[0, \frac{1}{2}]$       B.  $[-\frac{1}{2}, 0]$       C.  $[0, 1]$       D.  $[-1, 0]$



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知集合  $A = \{x | x > a\}$ ,  $B = \{x | 2^x \geq 1\}$ , 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知  $\sin(\alpha + \beta) = -1$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{7}{25}$ , 则  $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} =$ \_\_\_\_\_.

15. 当  $x \in [0, 2\pi]$  时, 函数  $f(x) = x \sin x + \cos x$  的最大值与最小值的和为\_\_\_\_\_.

16. 已知四边形  $ABCD$  是平行四边形, 点  $E$  在  $CB$  的延长线上,  $BC = 3$ ,  $AE = AB = 1$ ,  $\angle C = 30^\circ$ .

若  $\vec{AE} = x \vec{AB} + y \vec{AD}$ , 则  $x - \sqrt{3}y =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知  $p$ : 函数  $f(x) = x^2 - (2a+4)x + 6$  在  $(1, +\infty)$  上是增函数,  $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ , 若  $p \wedge (\neg q)$  是真命题, 求实数  $a$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知  $\mathbf{a} = (\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2})$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1)$ .

(1) 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 求  $\sin x (\cos x + 3 \sin x)$  的值;

(2) 若  $f(x) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + 2 \sin \frac{x}{2}$ , 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度后, 得到函数  $g(x)$  的图象, 求函数  $g(x)$  的表达式及  $g(x)$  的最小正周期.

19. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \cos \frac{A+C}{2} = b \sin A$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 若  $b = 6$ , 求  $\triangle ABC$  的面积的最大值.



北京高者在线 www.gkaoz.com

题 答 要 不 内 线 封 密

20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \cos \omega x (\sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x) (\omega > 0)$ ,  $A, B$  分别是曲线  $y = f(x)$  上的一个最高点和一个最低点, 且  $|AB|$  的最小值为  $\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调增区间和曲线  $y = f(x)$  的对称中心的坐标;
- (2) 若不等式  $\frac{m-1}{2} < f(x) < \frac{m+3}{2}$  对  $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + 1, a \in \mathbf{R}$ .

- (1) 讨论函数  $f(x)$  的极值;
- (2) 若函数  $f(x)$  存在极小值, 且极小值小于零, 求实数  $a$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (2x-1)\ln x - x$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的零点个数;
- (2) 求证:  $f(x) + 2x > 0$ .



# “皖南八校”2020 届高三第一次联考·数学(文科)

## 参考答案、解析及评分细则

1. D

2. B  $|z| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

3. A  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ ,  $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cos(-\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{1}{3}$

4. C 由  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  得  $x = -2$ ,  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = (1, 2) + (-4, 2) = (-3, 4)$ ,  $\therefore |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = 5$ .

5. C  $b = \log_{0.3} 0.2 > \log_{0.3} 0.3 = 1$ ,  $0 < c < 0.2^0 = 1$ ,  $a < 0$ ,  $\therefore a < c < b$ .

6. B

7. C 塔底为  $O$ , 则在  $\text{Rt}\triangle TAO$  中,  $OA = \sqrt{3}OT$ , 在  $\text{Rt}\triangle TBO$  中,  $OT = \sqrt{3}OB$ ,  $\therefore OA = 3OB$ , 在  $\triangle AOB$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $AB = 140$ ,  $\therefore 140^2 = 9OB^2 + OB^2 - 2 \times 3OB^2 \times \frac{1}{2} = 7OB^2$ ,  $\therefore OB = 20\sqrt{7}$ ,  $\therefore OT = 20\sqrt{21}$ .

8. B  $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{2+y^2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ,  $y = \sqrt{14}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ .

9. C ①②③是真命题.

10. A  $f(2) = 2a - 1$ ,  $f'(x) = (ax - 1 + a)e^{x^2}$ ,  $f'(2) = 3a - 1$ ,

切线方程为  $y - 2a + 1 = (3a - 1)(x - 2)$ ,  $4 - 2a = 3a - 1$ ,  $a = 1$ ,

$\therefore f'(x) = xe^{x^2}$ ,  $\therefore f'(x) > 0$ ,  $x > 0$ ,  $\therefore f(x)$  的单调增区间为  $(0, +\infty)$ .

11. A  $x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbf{Z})$  时,  $\sin x \geq 0$ ,  $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ,

$x \in [2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$  时,  $\sin x \leq 0$ ,  $f(x) = -\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$ .

12. D 当  $a > 0$  时,  $\lg x = a(x - 3)$  有两个实数解, 则  $x^2 + 2(a+2)x + 1 - 2a = a(x - 3)$  即  $x^2 + (a+4)x + 1 + a = 0$  只有 1 个非正数解,  $x_1 + x_2 = -a - 4 < 0$ ,  $x_1 x_2 = 1 + a > 0$ ,  $\therefore x_1 < 0, x_2 < 0$ ,  $\therefore a > 0$  不合题意.

当  $a = 0$  时, 函数  $f(x) = a(x - 3)$  显然有 3 个解,

当  $a < 0$  时, 函数  $\lg x = a(x - 3)$  有 1 个解, 则  $x^2 + 2(a+2)x + 1 - 2a = a(x - 3)$  要有 2 个非正的实数根,

$\therefore -1 \leq a < 0$ , 综上  $a \in [-1, 0]$ .

13.  $[0, +\infty)$   $B = \{x | x \geq 0\}$ ,  $x \in A \Rightarrow x \in B$ , 则  $a \geq 0$ .

14.  $\frac{16}{9}$   $\because \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -1$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = -\frac{7}{25}$ ,  $\therefore \sin \alpha \cos \beta = -$

$\frac{16}{25}$ ,  $\cos \alpha \sin \beta = -\frac{9}{25}$ ,  $\therefore \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = \frac{16}{9}$ .

15.  $-\pi$   $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$ , 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  时,  $f'(x) \geq 0$ ;

当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  时,  $f'(x) \leq 0$ ,  $\therefore f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  上都是增函数, 在  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  上是减函数,  $f(0) = 1$ ,

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ,  $f(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$ ,  $f(2\pi) = 1$ ,  $\therefore f(x)$  的最大值为  $\frac{\pi}{2}$ , 最小值为  $-\frac{3\pi}{2}$ , 它们的和为  $-\pi$ .



16.2 由  $AB=AE=1, \angle ABE=\angle C=30^\circ$ , 得  $BE=\sqrt{3}$ ,

$$\because BC=3, \therefore BC=\sqrt{3}BE, \therefore \vec{BE}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{BC},$$

$$\therefore \vec{AE}=\vec{AB}+\vec{BE}=\vec{AB}-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{BC}=\vec{AB}-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{AD}, x=1, y=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x-\sqrt{3}y=1+1=2.$$

17. 解:  $p$  真时,  $a+2 \leq 1, a \leq -1$ , ..... 2分

$$q \text{ 真时, } a^2 - 4(2a-3) = a^2 - 8a + 12 < 0,$$

$$2 < a < 6, \dots\dots\dots 4分$$

$$\neg q \text{ 为真时, } a \geq 6 \text{ 或 } a \leq 2, \dots\dots\dots 6分$$

$\because p \wedge (\neg q)$  为真,

$\therefore p$  与  $\neg q$  都为真, ..... 8分

$\therefore a \leq -1$ , 即  $a \in (-\infty, -1]$ . ..... 10分

18. 解: (1) 由  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 得  $\cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2}, \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \therefore \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3}$ , ..... 3分

$$\therefore \sin x (\cos x + 3 \sin x) = \frac{\sin x (\cos x + 3 \sin x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\tan x (1 + 3 \tan x)}{1 + \tan^2 x} = \frac{12}{5}, \dots\dots\dots 5分$$

$$(2) f(x) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + 2 \sin \frac{x}{2} = (\cos \frac{x}{2} + 2)^2 + (\sin \frac{x}{2} + 1)^2 + 2 \sin \frac{x}{2},$$

$$= 4 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + 6 + 2 \sin \frac{x}{2} = 4\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + 6, \dots\dots\dots 8分$$

$$\therefore g(x) = 4\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + 6 = 4\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + 6, \dots\dots\dots 10分$$

最小正周期为  $T=4\pi$ . ..... 12分

19. 解: (1) 由  $a \cos \frac{A+C}{2} = b \sin A$ , 及正弦定理, 得  $\sin A \cos \frac{A+C}{2} = \sin B \sin A$ , ..... 2分

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 中, } \sin B = \sin(A+C) = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2} > 0, \sin A > 0,$$

$$\therefore \cos \frac{A+C}{2} = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A+C}{2}, \therefore \sin \frac{A+C}{2} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 5分$$

$$\because 0 < A+C < \pi, \therefore 0 < \frac{A+C}{2} < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore A+C = \frac{\pi}{3}, \therefore B = \pi - A - C = \frac{2\pi}{3}, \dots\dots\dots 6分$$

(2)  $\because b=6, b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 + ac \geq 3ac$ , 当且仅当  $a=c$  时, 取等号. .... 8分

$$\therefore ac \leq \frac{36}{3} = 12, \dots\dots\dots 10分$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac \leq 3\sqrt{3}, \therefore \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } 3\sqrt{3}. \dots\dots\dots 12分$$



20. 解:(1)  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \cos^2 \omega x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1 + \cos 2\omega x}{2}$ ,

$= \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ , ..... 1分

$T = \frac{2\pi}{2\omega}$ ,

$\therefore |AB|$  的最小值为  $\sqrt{\left(\frac{T}{2}\right)^2 + 4}$ ,

$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, \therefore \omega = 1$ ,

$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ , ..... 3分

由  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$  得  $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  的单调增区间为  $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$ , ..... 5分

由  $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$  得  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$ ,

$\therefore$  曲线  $y = f(x)$  的对称中心坐标为  $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, -\frac{1}{2}\right) (k \in \mathbf{Z})$ , ..... 7分

(2)  $\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$ ,

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ , ..... 9分

$\therefore -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ , ..... 10分

$\therefore \frac{m-1}{2} < f(x) < \frac{m+3}{2}$  对  $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$  恒成立,

$\therefore \begin{cases} \frac{m-1}{2} < -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{m+3}{2} > \frac{1}{2} \end{cases}$ , ..... 11分

$\therefore \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > -2 \end{cases}$ ,

$\therefore m \in (-2, -\sqrt{3})$ . ..... 12分

21. 解:(1)  $f(x)$  定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ , ..... 1分

当  $a > 0$  时,  $f'(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{2a}{3}$  或  $x > 0$ ;  $f'(x) < 0 \Rightarrow -\frac{2a}{3} < x < 0$ ,  $f(x)$  单调增区间为  $(-\infty, -\frac{2a}{3})$ ,

$(0, +\infty)$ , 单调减区间为  $(-\frac{2a}{3}, 0)$ ,  $\therefore f(x)$  的极大值为  $f(-\frac{2a}{3}) = \frac{4a^3}{27} + 1$ , 极小值为  $f(0) = 1$ , ..... 4分

当  $a = 0$  时,  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数,  $f(x)$  没有极值; ..... 5分



当  $a < 0$  时,  $f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0$  或  $x > -\frac{2a}{3}$ ;  $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < -\frac{2a}{3}$ ,  $\therefore f(x)$  的单调增区间为  $(-\infty, 0)$ ,

$(-\frac{2a}{3}, +\infty)$ , 单调减区间为  $(0, -\frac{2a}{3})$ ,  $\therefore f(x)$  的极大值为  $f(0) = 1$ , 极小值为  $f(-\frac{2a}{3}) = \frac{4a^3}{27} + 1$ , ... 8分

(2) 由(1)知  $a > 0$  时,  $f(x)$  的极小值为  $f(0) = 1 > 0$ , ..... 9分

$a < 0$  时,  $f(x)$  的极小值为  $\frac{4a^3}{27} + 1$ , ..... 10分

由  $\frac{4a^3}{27} + 1 < 0$  得  $a^3 < -\frac{27}{4}$ ,  $\therefore a < -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$  即  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2})$ . ..... 12分

22. 解:(1)  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$f'(x) = 2\ln x + \frac{2x-1}{x} - 1 = 2\ln x + 1 - \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数,  $f'(1) = 0$ ,

$\therefore 0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore f(x)$  的单调增区间为  $(1, +\infty)$ , 单调减区间为  $(0, 1)$ , ..... 2分

$\therefore f(1) = -1 < 0$ ,  $f(\frac{1}{e^2}) = (\frac{2}{e^2} - 1)\ln \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2} = -2(\frac{2}{e^2} - 1) - \frac{1}{e^2} = 2 - \frac{5}{e^2} > 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(\frac{1}{e^2}, 1)$  内有 1 个零点,

$\therefore f(e) = (2e-1)\ln e - e = e-1 > 0$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(1, e)$  内有 1 个零点, ..... 4分

$\therefore f(x)$  有两个零点, ..... 5分

证明:(2) 令  $g(x) = f(x) + 2x = (2x-1)\ln x + x$ , 则  $g(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$g'(x) = 2\ln x + \frac{2x-1}{x} + 1 = 2\ln x - \frac{1}{x} + 3$ , ..... 6分

令  $h(x) = 2\ln x - \frac{1}{x} + 3$ , 则  $h'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ ,  $\therefore h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数, ..... 7分

$h(1) = 2 > 0$ ,  $h(\frac{1}{2}) = 1 - \ln 4 < 0$ ,

$\therefore \exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使  $h(x_0) = 0$ , 即  $g'(x_0) = 2\ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 3 = 0$ ,  $\therefore \ln x_0 = \frac{1}{2x_0} - \frac{3}{2}$ , ..... 8分

$\therefore x \in (0, x_0)$  时,  $g'(x) < 0$ ;  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,

$\therefore g(x)$  的单调减区间为  $(0, x_0)$ , 单调增区间为  $(x_0, +\infty)$ , ..... 9分

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = (2x_0-1)\ln x_0 + x_0 = (2x_0-1)(\frac{1}{2x_0} - \frac{3}{2}) + x_0 = \frac{5}{2} - 2x_0 - \frac{1}{2x_0}$ , ..... 10分

令  $m(x) = \frac{5}{2} - 2x - \frac{1}{2x}$ ,  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 则  $m'(x) = -2 + \frac{1}{2x^2} = \frac{1-4x^2}{2x^2} = \frac{(1+2x)(1-2x)}{2x^2} \leq 0$  对  $x \geq \frac{1}{2}$  成立,

$\therefore m(x)$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$  上是减函数,  $\therefore x \in (\frac{1}{2}, 1)$  时,  $m(x) > m(1) = \frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 0$ , ..... 11分

$\therefore g(x)_{\min} > 0$ ,  $\therefore f(x) + 2x > 0$ . ..... 12分

欢迎将本卷使用情况、优秀建议发至邮箱: [kyyfzx@163.com](mailto:kyyfzx@163.com).