秘密 ★ 启用前

广安市高 2021 级第一次诊断性考试

数　学(理科)

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|-3<x<2\}$，$B=\{x|x^2+4x-5\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $(-3,1]$　　C. $[-1,2)$　　D. $(-3,2)$

2. 复数 $z=\dfrac{1+i}{1-i}+i$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

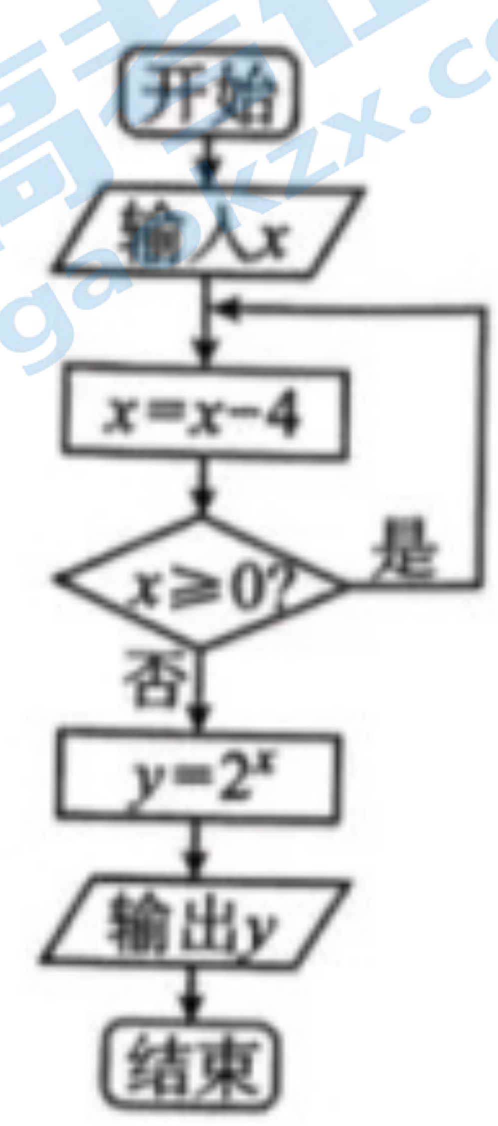
3. 执行如图所示的程序框图，若输入的 x 值为 2023，则输出的 y 值为

A. $\dfrac{1}{16}$

B. $\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{1}{4}$

D. $\dfrac{1}{2}$



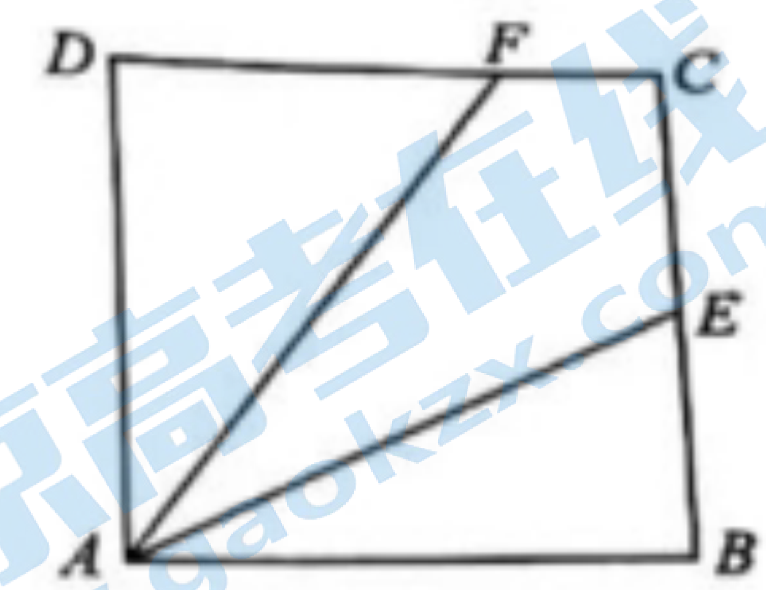
4. 甲、乙两个口袋中均装有 1 个黑球和 2 个白球，现分别从甲、乙两口袋中随机取一个球交换放入另一口袋，则甲口袋的三个球中恰有两个白球的概率为

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{5}{9}$　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，若 $a_1+a_5+a_9=9$，$b_2b_5b_8=3\sqrt{3}$，则 $\dfrac{a_2+a_8}{1+b_2b_8}=$

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 为 BC 的中点，F 为 CD 边上一点，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AE}|^2$，则 $|AF|=$



A. $\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{6}$　　D. 5

7. “$\varphi=-\frac{\pi}{6}$”是“函数 $y=\sin(2x-\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 A 在 C 上，若 $|F_1A|=2|F_2A|$，$\angle AF_1F_2=30°$，$\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

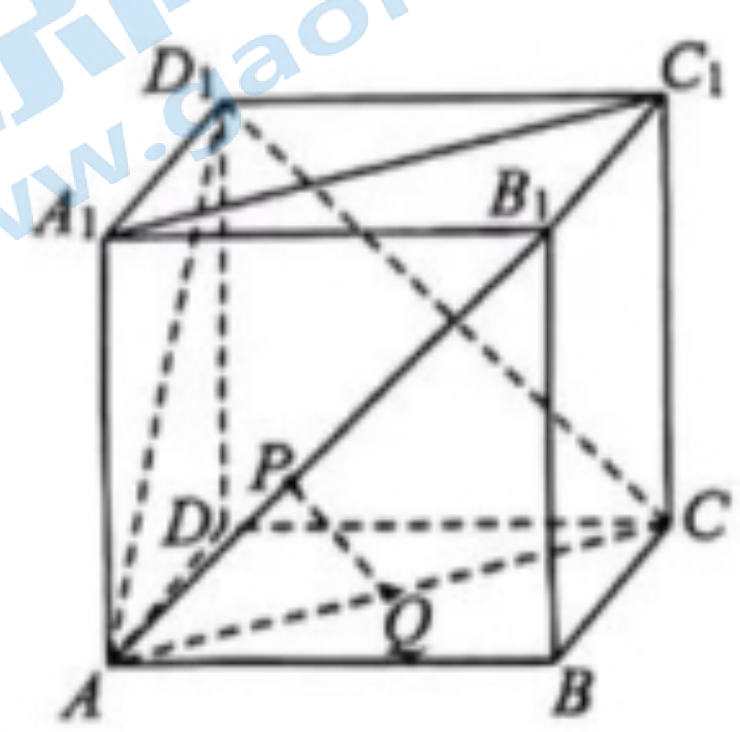
9. 甲、乙、丙、丁 4 个学校将分别组织部分学生开展研学活动，现有 A,B,C,D,E 五个研学基地供选择，每个学校只选择一个基地，则 4 个学校中至少有 3 个学校所选研学基地不相同的选择种数共有

A. 420　　B. 460　　C. 480　　D. 520

10. 若点 P 是函数 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}\cos x}{\sin x+\cos x}$ 图象上任意一点，直线 l 为点 P 处的切线，则直线 l 倾斜角的取值范围是

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

11. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 AB_1 上的动点（含端点），点 Q 是线段 AC 的中点，设 PQ 与平面 ACD_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最小值是



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点，F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A,B 分别为 C 的左、右顶点．P 为 C 上一点，且 $PF_2\perp x$ 轴，直线 AP 与 y 轴交于点 M，直线 BM 与 PF_2 交于点 Q，直线 F_1Q 与 y 轴交于点 N．若 $|ON|=\frac{1}{4}|OM|$，则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} y\leqslant 4-x, \\ y+2\geqslant 0, \\ y\leqslant x+2, \end{cases}$ 则 $2x+3y$ 的最大值为______.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数：______.

①偶函数；②最大值为 2；③最小正周期是 π.

15. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个球与该四棱台的每个面都相切（称为该四棱台的内切球），若 $A_1B_1=2$，$AB=4$，则该四棱台的外接球（四棱台的顶点都在球面上）与内切球的半径之比为______.

16. 若点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，$35\sin A\cdot\overrightarrow{PA}+21\sin B\cdot\overrightarrow{PB}+15\sin C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\cos\angle BAC=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

某工厂注重生产工艺创新，设计并试运行了甲、乙两条生产线. 现对这两条生产线生产的产品进行评估，在这两条生产线所生产的产品中，随机抽取了 300 件进行测评，并将测评结果（“优”或“良”）制成如下所示列联表：

	良	优	合计
甲生产线	40	80	120
乙生产线	80	100	180
合计	120	180	300

（1）通过计算判断，是否有 90% 的把握认为产品质量与生产线有关系？

（2）现对产品进行进一步分析，在测评结果为“良”的产品中按生产线用分层抽样的方法抽取了 6 件产品. 若在这 6 件产品中随机抽取 3 件，求这 3 件产品中产自于甲生产线的件数 X 的分布列和数学期望.

附表及公式：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=\log_2 b_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$，且______.

（1）求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n\cdot b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

从① $b_3=16$，$b_5=128$；② $b_1=4$，$b_5-b_1b_3=0$ 这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.(12 分)

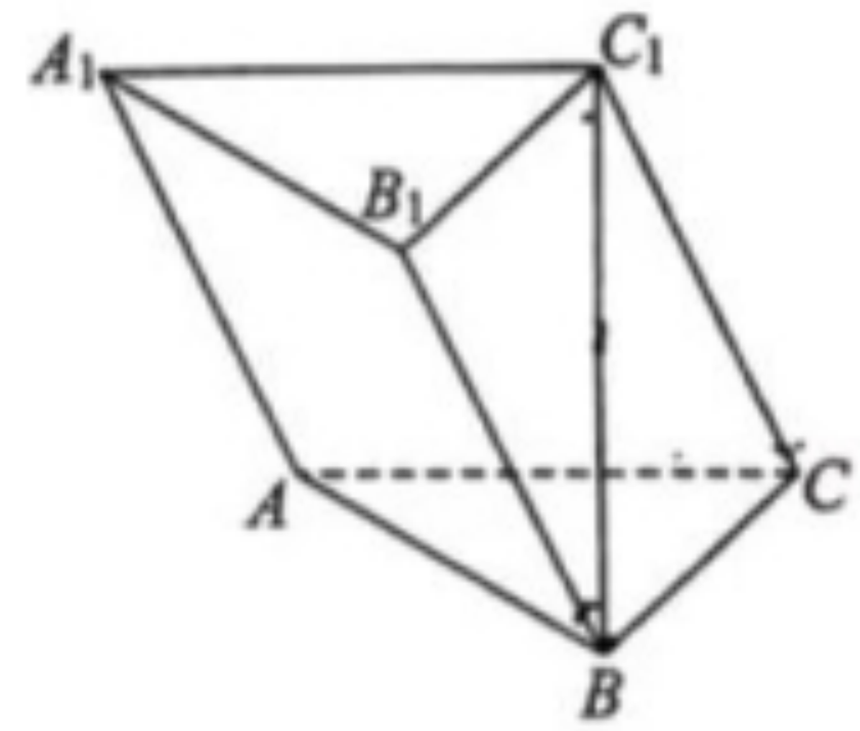
已知 O 为坐标原点,过点 $P(2,0)$ 的动直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点.

(1)求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$;

(2)在平面直角坐标系 xOy 中,是否存在不同于点 P 的定点 Q,使得 $\angle AQR=\angle BQP$ 恒成立?若存在,求出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

20.(12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,直线 $C_1B\perp$ 平面 ABC,平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C.



(1)求证:$AC\perp BB_1$;

(2)若 $AC=BC=BC_1=2$,在棱 A_1B_1 上是否存在一点 P,使二面角 $P-BC-C_1$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$?若存在,求 $\frac{B_1P}{A_1B_1}$ 的值;若不存在,请说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$(其中 a 为实数).

(1)若 $a=-\frac{1}{2}$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,证明:$f(x)\geqslant 0$;

(2)探究 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,已知曲线 $C:x^2+y^2=|x|+y$(其中 $y>0$),曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$t>0$),曲线 $C_2:\begin{cases}x=-t\sin\alpha,\\ y=t\cos\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$t>0$,$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$).以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的极坐标方程;

(2)若曲线 C 与 C_1,C_2 分别交于 A,B 两点,求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x)=|2x-2|+|x+2|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant 5-2x$;

(2)令 $f(x)$ 的最小值为 T,正数 a,b 满足 $a^2+b^2+2b=T$,证明:$a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$.