数学一
参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知，$A=\left\{x\left|\frac{2x+1}{x-4}\leqslant 0\right.\right\}=\left\{x\left|-\frac{1}{2}\leqslant x<4\right.\right\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$，所以 $A\cap B$ 的子集的个数为 $2^3=8$. 故选 B.

2. B　因为幂函数 $f(x)=(2m^2-2m-11)x^{m+1}$，所以 $2m^2-2m-11=1$，解得 $m=-2$ 或 $m=3$. 当 $m=-2$ 时，$f(x)=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；当 $m=3$ 时，$f(x)=x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意. 综上，$m=3$. 故选 B.

3. D　不等式 $x^2+2x+4>0$ 与 $2x^2+3x+5>0$ 的解集均为 $\mathbf{R}$，但 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，所以充分性不成立；不妨令 $a_1=1,b_1=2,c_1=1,a_2=-1,b_2=-2,c_2=-1$，满足 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，但 $x^2+2x+1>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$-x^2-2x-1>0$ 的解集为 $\varnothing$，所以 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集不同，必要性不成立. 故选 D.

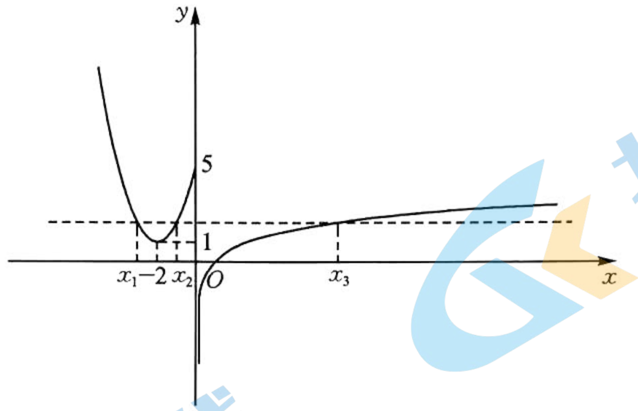
4. B　当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=4\ln x-|4x-1|=4\ln x+4x-1$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增. 当 $x\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=4\ln x-|4x-1|=4\ln x-4x+1$，所以 $f'(x)=\frac{4}{x}-4=\frac{4(1-x)}{x}$，当 $\frac{1}{4}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-3$. 故选 B.

5. A　因为 $a=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{4}}<1$，$b=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}>1$，$c=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{4}}<1$，又 $0<\frac{27}{64}<\frac{1}{2}<\frac{16}{25}<1$，$y=x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $c=\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{4}}=a$. 综上，$c<a<b$. 故选 A.

6. C　由题意可得当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=2^{x^2+2x-2}-1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$，当 $x<1$ 时，$f(x)$ 的值域为 A，又 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，所以 $(-\infty,1)\subseteq A$，所以 $\begin{cases}2-a>0,\\2-a+3a\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leqslant a<2$，即 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},2\right)$. 故选 C.

7. C　因为函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，又 $f(3)=0$，所以 $f(-3)=f(3)=0$，所以当 $-3<x<3$ 时，$f(x)>0$，当 $x<-3$ 或 $x>3$ 时，$f(x)<0$，则不等式 $(2x-1)f(x)>0$ 等价于 $\begin{cases}f(x)>0,\\2x-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0,\\2x-1<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<x<3$ 或 $x<-3$，即原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)$. 故选 C.

8. D　作出 $f(x)$ 的函数图象如图所示:答案解析网



若存在实数 x_1,x_2,x_3 且 $x_1<x_2<x_3$,使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,所以 $x_1+x_2=-4$,$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)=(x_1+x_2+x_3)f(x_3)=(x_3-4)f(x_3)=(x_3-4)\ln x_3$,由图可知,$1<f(x_3)\leqslant 5$,所以 $e<x_3\leqslant e^5$. 设 $g(x)=(x-4)\ln x, x\in(e,e^5]$,所以 $g'(x)=\ln x+1-\frac{4}{x}$,$g'(x)$ 在 $(e,e^5]$ 上单调递增,又 $g'(e)=2-\frac{4}{e}>0$,所以当 $x\in(e,e^5]$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(e,e^5]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\max}=g(e^5)=(e^5-4)\ln e^5=5e^5-20$. 故选 D. 答案解析网

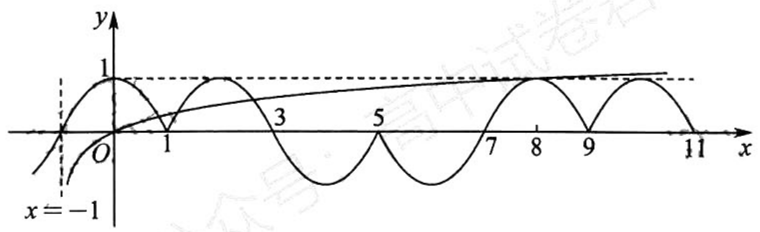
9. ABD　若 $a>1$,因为 $\log_a b<1=\log_a a$,所以 $b<a$. 当 $b<1<a$ 时,A 正确,当 $1<b<a$ 时,B 正确;若 $a<1$,因为 $\log_a b<1=\log_a a$,所以 $b>a$. 综上,$(a-1)(a-b)>0$,故 C 错误,D 正确. 故选 ABD. 答案解析网

10. ABC　$ab=\frac{1}{2}\times 2a\cdot b\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$,当且仅当 $2a=b$,即 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$ 时等号成立,故 ab 有最大值 $\frac{1}{8}$,故 A 正确;$(\sqrt{2a}+\sqrt{b})^2=2a+b+2\sqrt{2ab}=1+2\sqrt{2ab}\leqslant 1+2\sqrt{2\times\frac{1}{8}}=2$,当且仅当 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$ 时等号成立,所以 $\sqrt{2a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$,故 B 正确;$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}=\frac{2a+b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时等号成立,即 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}$ 有最小值 4,故 C 正确;$4a^2+b^2=(2a+b)^2-4ab=1-4ab\geqslant\frac{1}{2}$,当且仅当 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{2}$ 时等号成立,所以 $4a^2+b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$,故 D 错误. 故选 ABC.

11. AD　若 $a=4$,则 $f(x)=x^3-12x+2$,所以 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$,当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,当 $-2<x<2$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增,在 $(-2,2)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值,又 $f(2)=2^3-12\times 2+2=-14$,所以 $f(x)$ 的极小值为 -14,故 A 正确;由 $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$,当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数,此时 $f(x)$ 没有极值点,故 B 错误;若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有极值点,则 $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)=0$ 在 $(1,2)$ 上有解,所以 $\begin{cases}1-a<0,\\2^2-a>0,\end{cases}$ 解得 $1<a<4$,即 a 的取值范围是 $(1,4)$,故 C 错误;由 $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$,当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数,故不存在三个零点,不符合题意;当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$,解得 $x=\pm\sqrt{a}$. 所以当 $x\in(-\infty,-\sqrt{a})$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

$(-\infty,-\sqrt{a})$和$(\sqrt{a},+\infty)$，单调递减区间为$(-\sqrt{a},\sqrt{a})$，所以函数的极小值$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+2$和极大值$f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+2$.又函数$f(x)$恰有3个零点，所以$\begin{cases}a>0,\\f(-\sqrt{a})>0,\\f(\sqrt{a})<0,\end{cases}$即$\begin{cases}a>0,\\a\sqrt{a}+1>0,\\a\sqrt{a}-1>0,\end{cases}$解得$a>1$，即$a$的取值范围是$(1,+\infty)$，故D正确.故选AD.答案解析网

12. AC　因为$f(x-2)=-f(-x)$，所以$f(x)$的图象关于$(-1,0)$中心对称，故A正确；因为$f(x)$的图象关于$(-1,0)$中心对称，所以$f(-1)=a+1=0$，解得$a=-1$.所以当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=-x^2+1$，因为$f(x-2)=-f(-x)$，所以$f(x)=-f(-x-2)$，因为$f(1+x)=f(1-x)$，所以$f(x)=f(2-x)$，所以$f(2-x)=-f(-x-2)$，即$f(x)=-f(x-4)$.当$x\in[3,5]$时，$-4+x\in[-1,1]$，所以$f(x)=-f(-4+x)=-[-(-4+x)^2+1]=x^2-8x+15$，故B错误；因为$f(x)=-f(x-4)$，所以$f(x+8)=-f(x+4)=-[-f(x)]=f(x)$，所以$f(x)$的周期为8，又$f(1)=-1+1=0$，$f(2)=f(0)=1$，$f(3)=f(-1)=-1+1=0$，$f(4)=-f(0)=-1$，$f(5)=-f(1)=0$，$f(6)=-f(2)=-1$，$f(7)=-f(3)=0$，$f(8)=-f(4)=f(0)=1$，所以$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)=12[f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)]+f(1)+f(2)+f(3)=f(1)+f(2)+f(3)=1$，故C正确；令$g(x)=0$，即$f(x)=\log_9(x+1)$，画出$y=f(x)$与$y=\log_9(x+1)$的图象，如图所示：答案解析网



因为$f(8)=\log_9(8+1)$，$f'(8)=0<[\log_9(x+1)]'|_{x=8}$，所以两函数图象共有5个交点，所以$g(x)$恰有5个不同的零点，故D错误.故选AC.答案解析网

13. 4　由题意知$f(-2\ 023)=f(-3)=f(1)=\log_3(1+2)+3=4$.

14. 5　$\log_2 3\times\log_3 4+3^{\log_9 4}+(-1.08)^0=\frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\ln 4}{\ln 3}+3^{\log_3 2}+1=2+2+1=5$.

15. $\frac{3}{4}$　因为$x+y=\frac{3}{2y}-\frac{1}{4x-1}$，所以$x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4x-1}=\frac{3}{2y}-y-\frac{1}{4}\geqslant2\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4x-1}}=1$，当且仅当$x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4x-1}$，即$x=\frac{3}{4}$时等号成立，所以$\frac{3}{2y}-y-\frac{1}{4}\geqslant1$，又$y>0$，所以$4y^2+5y-6\leqslant0$，解得$0<y\leqslant\frac{3}{4}$，即$y$的最大值为$\frac{3}{4}$.答案解析网

16. $\frac{4}{e^2}$　由$\ln x=ye^x+\ln y$得$\ln\frac{x}{y}=ye^x$，所以$\frac{x}{y}\ln\frac{x}{y}=xe^x$，则$xe^x=\ln\frac{x}{y}\cdot e^{\ln\frac{x}{y}}$，因为$x>0$，$e^x>0$，$e^{\ln\frac{x}{y}}>0$，所以$\ln\frac{x}{y}>0$，令$f(x)=xe^x(x>0)$，则$f'(x)=e^x(x+1)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以由$xe^x=\ln\frac{x}{y}\cdot e^{\ln\frac{x}{y}}$，即$f(x)=f\left(\ln\frac{x}{y}\right)$，得$x=\ln\frac{x}{y}$，所以$y=\frac{x}{e^x}$，所以$xy=\frac{x^2}{e^x}$.令$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，$x>0$，所以$g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$，当$0<x<2$时，$g'(x)>0$，当$x>2$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,2)$上

单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{4}{e^2}$.

17. 解：(1)由题意得：$\begin{cases}2+x\geqslant 0,\\16-x^2>0,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得$-2\leqslant x<4$，所以$A=[-2,4)$. ………………………… 3 分

若$m=3$，则$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}=[1,5]$，所以$A\cup B=[-2,5]$. ………………………… 4 分

(2)因为$A\cap B=B$，所以$B\subseteq A$. ………………………… 6 分

当$B=\varnothing$时，满足$B\subseteq A$，则$2m-1<m-2$，解得$m<-1$；………………………… 7 分

当$B\neq\varnothing$时，由$B\subseteq A$得$\begin{cases}m-2\leqslant 2m-1,\\m-2\geqslant -2,\\2m-1<4,\end{cases}$ 解得$0\leqslant m<\frac{5}{2}$. ………………………… 9 分

综上，m的取值范围为$(-\infty,-1)\cup\left[0,\frac{5}{2}\right)$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)因为$f(x)=\log_2(2^x+1)+ax$是偶函数，

所以$f(-x)-f(x)=0$，即$\log_2(2^{-x}+1)-ax-\log_2(2^x+1)-ax=0$，

即$2ax=\log_2(2^{-x}+1)-\log_2(2^x+1)=\log_2\frac{2^{-x}+1}{2^x+1}=-x$，所以$a=-\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

(2)因为对任意的$x_1\in[0,4]$，存在$x_2\in[0,5]$，使得$g(x_1)\geqslant h(x_2)$，

所以$g(x)$在$[0,4]$上的最小值不小于$h(x)$在$[0,5]$上的最小值. ………………………… 7 分

因为$g(x)=\log_2(2^x+1)+\frac{1}{2}x$在$[0,4]$上单调递增，所以$g(x)_{\min}=g(0)=1$，………………………… 9 分

$h(x)=x^2-2x+m$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(1)=m-1$，………………………… 10 分

所以$1\geqslant m-1$，解得$m\leqslant 2$，即m的取值范围是$(-\infty,2]$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)因为$ax^2+bx+c>0$的解集为$\{x|-2<x<5\}$，所以$a<0$，$-2+5=-\frac{b}{a}$，$(-2)\times 5=\frac{c}{a}$，

所以$b=-3a$，$c=-10a(a<0)$，………………………… 2 分

所以$bx^2+ax+2b-c<0$等价于$-3ax^2+ax-6a+10a<0$，又$a<0$，所以$3x^2-x-4<0$，………………………… 4 分

解得$-1<x<\frac{4}{3}$，即关于x的不等式$bx^2+ax+2b-c<0$的解集为$\left(-1,\frac{4}{3}\right)$. ………………………… 5 分

(2)因为$f(x)\geqslant 2ax+b$对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$恒成立，

即$ax^2+(b-2a)x+c-b\geqslant 0$对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$恒成立，所以$a>0$，$\Delta=(b-2a)^2-4a(c-b)=b^2+4a^2-4ac\leqslant 0$，所以$0\leqslant b^2\leqslant 4a(c-a)$，………………………… 6 分

所以$\frac{b^2}{4a^2+c^2}\leqslant\frac{4a(c-a)}{4a^2+c^2}=\frac{4\left(\frac{c}{a}-1\right)}{4+\left(\frac{c}{a}\right)^2}$. ………………………… 7 分

令$t=\frac{c}{a}-1$，又$4a(c-a)\geqslant b^2\geqslant 0$，所以$c\geqslant a$，即$\frac{c}{a}\geqslant 1$，所以$t\geqslant 0$，所以$\frac{b^2}{4a^2+c^2}\leqslant\frac{4t}{4+(t+1)^2}=\frac{4t}{t^2+2t+5}$，

令 $g(t)=\frac{4t}{t^2+2t+5}(t\geqslant 0)$，…………………………………………………………… 8 分

当 $t=0$ 时，$g(0)=0$；…………………………………………………………………………… 9 分

当 $t>0$ 时，$g(t)=\frac{4}{t+\frac{5}{t}+2}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，当且仅当 $t=\sqrt{5}$ 时，等号成立. …………………… 11 分

所以 $\frac{b^2}{4a^2+c^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. …………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)若 $a=3$，则 $f(x)=3^x+3\cdot 3^{-x}$，

所以 $f(x)\geqslant 4$，即 $3^x+3\cdot 3^{-x}\geqslant 4$，所以 $(3^x-1)(3^x-3)\geqslant 0$，……………………………… 3 分

所以 $3^x\leqslant 1$ 或 $3^x\geqslant 3$，解得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$，答案解析网

即不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$. …………………………………………… 5 分

(2)若 $f(1)=\frac{10}{3}$，即 $3+\frac{a}{3}=\frac{10}{3}$，解得 $a=1$，……………………………………………… 6 分

所以 $g(x)=9^x+9^{-x}+m(3^x+3^{-x})+2m-1=(3^x+3^{-x})^2+m(3^x+3^{-x})+2m-3$，

令 $t=3^x+3^{-x}$，$t\in[2,+\infty)$，所以 $y=g(x)=t^2+mt+2m-3$. ……………………………… 7 分

当 $-\frac{m}{2}\leqslant 2$，即 $m\geqslant -4$ 时，$y=t^2+mt+2m-3$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，答案解析网

所以 $y_{\min}=2^2+2m+2m-3=4m+1$，即 $g(x)_{\min}=4m+1$. ………………………………………… 9 分

当 $-\frac{m}{2}>2$，即 $m<-4$ 时，$y=t^2+mt+2m-3$ 在 $\left(2,-\frac{m}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $y_{\min}=\left(-\frac{m}{2}\right)^2+m\cdot\left(-\frac{m}{2}\right)+2m-3=-\frac{m^2}{4}+2m-3$，即 $g(x)_{\min}=-\frac{m^2}{4}+2m-3$. ………… 11 分

综上，$g(x)_{\min}=\begin{cases}-\frac{m^2}{4}+2m-3, & m<-4,\\ 4m+1, & m\geqslant -4.\end{cases}$ …………………………………………… 12 分

21. 解：(1)若 $a=2$，则 $f(x)=(x-2)e^x-x^2+2x-1$，所以 $f'(x)=(x-1)e^x-2x+2$，……………… 1 分

所以 $f'(0)=-1+2=1$，又 $f(0)=-2-1=-3$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-(-3)=1\times(x-0)$，即 $x-y-3=0$. ……… 4 分

(2)$f'(x)=(x-1)e^x-ax+a=(x-1)(e^x-a)$，……………………………………………………… 6 分

当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增答案解析网 ………………………………………………………………… 7 分

当 $0<a<e$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<\ln a$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$，解得 $\ln a<x<1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；………………………… 8 分

当 $a=e$ 时，由 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；………… 9 分

当 $a>e$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<1$ 或 $x>\ln a$，令 $f'(x)<0$，解得 $1<x<\ln a$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.答案解析网 ……………………………… 10 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：若 $f(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant -\dfrac{2\ln x}{x}$，…………………………………………………… 1 分

令 $u(x)=-\dfrac{2\ln x}{x}$，所以 $u'(x)=-\dfrac{2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$，

所以当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$u'(x)<0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$u'(x)>0$，所以 $u(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，所以 $u(x)_{\min}=u(\mathrm{e})=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，…………………………………………………………………… 4 分

所以 $a\leqslant -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$. ……………………………………………………… 5 分

(2)证明：令 $g(x)=0$，即 $x^2-\dfrac{2\ln x}{x}-a=0$，令 $h(x)=x^2-\dfrac{2\ln x}{x}-a$，

则 $h'(x)=2x-\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}=\dfrac{2(x^3+\ln x-1)}{x^2}$，

令 $r(x)=x^3+\ln x-1$，所以 $r'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}>0$，所以 $r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，答案解析网

又 $r(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$r(x)<0$，所以 $h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$r(x)>0$，所以 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 答案解析网 ……………………………………………… 7 分

不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$，$0<\dfrac{1}{x_2}<1$，

因为 $h(x_1)=h(x_2)=0$，

所以 $h(x_1)-h\left(\dfrac{1}{x_2}\right)=h(x_2)-h\left(\dfrac{1}{x_2}\right)=\left(x_2^2-\dfrac{2\ln x_2}{x_2}-a\right)-\left(\dfrac{1}{x_2^2}-\dfrac{2\ln\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}}-a\right)$

$=\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)\left(x_2-\dfrac{1}{x_2}-2\ln x_2\right)$. …………………………………………………………………………… 9 分

设函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x(x>1)$，则 $\varphi'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，答案解析网

所以 $\varphi(x_2)=x_2-\dfrac{1}{x_2}-2\ln x_2>\varphi(1)=0$，

所以 $h(x_1)-h\left(\dfrac{1}{x_2}\right)>0$，即 $h(x_1)>h\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$，…………………………………………………………… 11 分

又函数 $h(x)=x^2-\dfrac{2\ln x}{x}-a$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $0<x_1<\dfrac{1}{x_2}<1$，所以 $x_1x_2<1$. ……………… 12 分