2023 北京清华附中高二（上）期中

数　　学

（清华附中高 22 级）

2023.11

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 在复平面内，复数 $z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则 $|z|$ 等于（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{a}-\vec{b}=(4,-2)$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 等于（　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 已知函数 $f(x)=3\sin(4x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3$，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 等于（　）

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 0　　D. -3

4. 已知平面 α 与平面 β 间的距离为 3，定点 $A\in\alpha$，设集合 $S=\{B\in\beta|AB=5\}$，则 S 表示的曲线的长度为（　）

A. 6π　　B. 8π　　C. 10π　　D. 12π

5. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)$，则 $f(1),\frac{f(2)}{2},\frac{f(3)}{3}$ 的大小关系为（　）

A. $f(1)<\frac{f(2)}{2}<\frac{f(3)}{3}$　　B. $\frac{f(3)}{3}<f(1)<\frac{f(2)}{2}$

C. $\frac{f(3)}{3}<\frac{f(2)}{2}<f(1)$　　D. $\frac{f(2)}{2}<f(1)<\frac{f(3)}{3}$

6. 已知直线 l 恒过点 $(0,5)$，圆 $C:(x-3)^2+y^2=9$，则“直线 l 的斜率为 $-\frac{8}{15}$”是“直线 l 与圆 C 相切”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sqrt{2}\sin A,\angle C=105°,c=\sqrt{3}+1$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　　　B. $\sqrt{3}-1$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　　　D. $\sqrt{3}+1$

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-10n(n=1,2,3,\cdots)$，下列判断中正确的是（　）

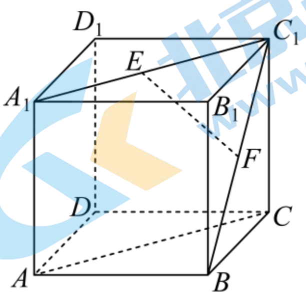
A. $a_5>0$　　　　B. 数列$\{a_n\}$是单调递减数列

C. 数列$\{a_n\}$前n项的乘积有最大值　　　　D. 数列$\{a_n\}$前n项的乘积有最小值

9. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1, F_1, F_2$分别为左右焦点，$P$为椭圆上一点，满足$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，则$|OP|$的长为（　）

A. $\sqrt{6}$　　　　B. $\sqrt{7}$　　　　C. $2\sqrt{2}$　　　　D. $\sqrt{3}+1$

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，F为线段BC_1的中点，E为线段A_1C_1上的动点，下列四个结论中，错误的是（　）



A. 存在点E, EF // 平面ABB_1A_1　　　　B. 对任意点$E, EF\perp DB_1$

C. 存在点E，使得EF与BD所成的角是$60°$　　　　D. 不存在点E，使得EF与平面AA_1C_1C所成的角是$30°$

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 已知点F_1, F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点，横坐标为4的点$M$在椭圆$C$上，则$\triangle F_1MF_2$的周长为________.

12. 古代名著中的《营造法式》集中了当时的建筑设计与施工经验．下图1为《营造法式》中的殿堂大木制作示意图，其中某处木件嵌入处部分是底面为矩形的四棱锥$S-ABCD$，如图 2 所示，其侧面SAD是边长为$2\sqrt{3}\text{cm}$的等边三角形，$AB=1\text{cm}$，且平面$SAD\perp$底面$ABCD$，则该四棱锥的体积为________cm^3.

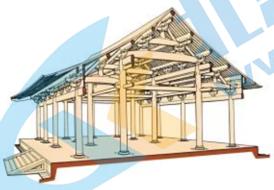


图1

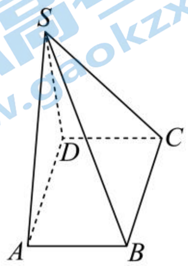


图2

13. 过原点且倾斜角为$30°$的直线被圆$x^2+(y-2)^2=4$所截得的弦长为________.

14. 已知点$(2,1)$在函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x, x\le a\\ 2^x-3, x>a\end{cases}$的图像上，且$f(x)$有最小值，则常数$a$的一个取值为________.

15. 已知函数$f(x)=x+\dfrac{k}{x}$的定义域为$(0,+\infty)$，其最小值为 2．点M是函数图象上的任意一点，过点M分别作直线$l:y=x$和y轴的垂线，垂足分别为A,B．其中O为坐标原点．给出下列四个结论：

①$k=1$；　②不存在点M，使得$|MA|=2023$；

③$|MA|\cdot|MB|$的值恒为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　④四边形$OAMB$面积的最小值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$.

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数$f(x)=4\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

（1）求函数$f(x)$的单调递增区间；

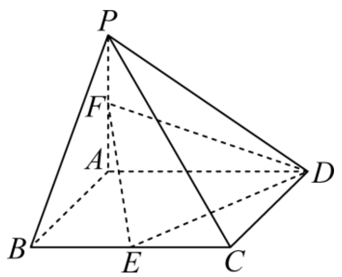
（2）求函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$上的值域.

17. 已知直线$l:x-ay-2=0$，圆$C:(x-a)^2+(y-1)^2=2$.

（1）若$a>1$，求证：直线l与圆C相交；

（2）已知直线l与圆C相交于 A，B 两点．若$\triangle ABC$的面积为 1，求a的值.

18. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PA\perp AB, PA=AB=1, AD=2, E,F$分别是$BC,PA$的中点.



（1）求证：EF // 平面PCD；

（2）再从条件①，条件②中选择一个作为已知，求平面EFD与平面PAB夹角的余弦值.

条件①：平面$PAB\perp$平面$ABCD$；

条件②：$PC=\sqrt{6}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 直线 $l:x=ty+2$ 与随圆交于 P,Q 两点，点 $A(3,2)$ 不在直线 l 上，直线 PA 与 $x=4$ 交于点 B.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）求直线 QB 的斜率.

20. 已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+2\ln(1-x)$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y+3-2\ln2=0$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的定义域及单调区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的零点的个数.

21. 设 k,m 是正整数，如果存在非负整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k,c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得 $m=\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，则称 m 是 $k-$好数，否则称 m 是 $k-$坏数. 例如：$2=(-1)^0\cdot2^0+(-1)^0\cdot2^0$，所以 2 是 $2-$好数.

（1）分别判断 $22,23,24$ 是否为 $3-$好数；

（2）若 m 是偶数且是 $k-$好数，求证：m 是 $(k+1)-$好数，且 $\dfrac{m}{2}$ 是 $k-$好数；

（3）求最少的 $2023-$坏数.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】D

【分析】先根据复数的除法运算求复数 z，再结合复数的模长公式运算求解.

【详解】由题意可得：$z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=2-\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

故选：D.

2. 【答案】C

【分析】由已知先求出 $\vec{b}$，然后利用 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ 求解即可.

【详解】因为 $\vec{a}=(1,2),\vec{a}-\vec{b}=(4,-2)$，

所以 $\vec{b}=(-3,4)$，

则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\times(-3)+2\times4}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故选：C.

3. 【答案】D

【分析】根据三角函数的性质解方程得到 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，然后代入求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 即可.

【详解】因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3$，所以 $3\sin\left(4\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=3$，整理得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，$f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(4\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\frac{3\pi}{2}=-3$.

故选：D.

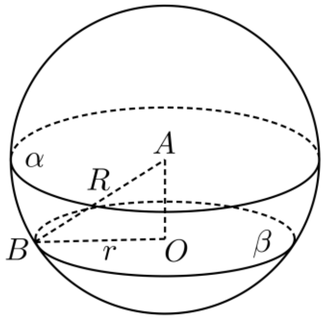
4. 【答案】B

【分析】根据题意结合球的定义和性质分析求解.

【详解】在空间中，集合 $T=\{B\mid AB=5\}$ 表示以点 A 为球心，半径 $R=5$ 的球面，

记 $M=\{B\mid B\in\beta\}$ 表示平面 β，可知 $S=M\cap T$，

所以 S 表示的曲线球 A 与平面 β 所截得的圆周，设其圆心为 O，半径为 r，



可知 $OA=3$，则 $r=\sqrt{R^2-OA^2}=4$，

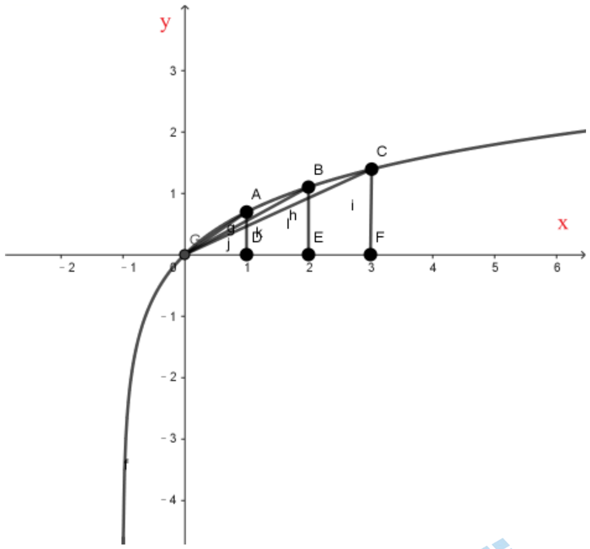
所以 S 表示的曲线的长度为 $2\pi r=8\pi$.

故选：B.

5. 【答案】C

【分析】画出函数 $f(x)=\ln(x+1)$ 的图象，观察 $(x,f(x))$ 与 $(0,0)$ 连线的斜率即得.

【详解】作出函数 $f(x)=\ln(x+1)$ 的图象，如图所示.



由图可知曲线上各点与坐标原点的连线的斜率随着 x 的增大而减小.

由 $1<2<3$，得 $\dfrac{f(1)-0}{1-0}>\dfrac{f(2)-0}{2-0}>\dfrac{f(3)-0}{3-0}$，即 $\dfrac{f(1)}{1}>\dfrac{f(2)}{2}>\dfrac{f(3)}{3}$，

故选：C

6. 【答案】A

【分析】根据直线 l 与圆 C 相切分析可知：直线 l 的斜率不存在或直线 l 的斜率为 $-\dfrac{8}{15}$，结合充分、必要条件分析判断.

【详解】由题意可知：圆 $C:(x-3)^2+y^2=9$ 的圆心 $C(3,0)$，半径 $r=3$，

若直线 l 与圆 C 相切，则有：

当直线 l 的斜率不存在，则直线 $l:x=0$，符合题意；

当直线 l 的斜率存在，设直线 $l:y=kx+5$，即 $kx-y+5=0$，

则圆心 $C(3,0)$ 到线 l 的距离 $\dfrac{|3k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\dfrac{8}{15}$；

综上所述：当且仅当直线 l 的斜率不存在或直线 l 的斜率为 $-\dfrac{8}{15}$ 时，线 l 与圆 C 相切.

可知"直线 l 的斜率为 $-\dfrac{8}{15}$"可以推出"直线 l 与圆 C 相切"，即充分性成立；

"直线 l 与圆 C 相切"不可以推出"直线 l 的斜率为 $-\dfrac{8}{15}$"，即必要性不成立；

所以"直线 l 的斜率为 $-\dfrac{8}{15}$"是"直线 l 与圆 C 相切"的充分不必要条件.

故选：A.

7. 【答案】C

【分析】应用正弦定理进行边角互化，得 $b=\sqrt{2}a$，再应用余弦定理出 $\cos\angle C$，进而得到 a,b，利用同角三角函数关系求出 $\sin\angle C$，应用三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 即可求得.

【详解】由 $\sin B=\sqrt{2}\sin A$，根据正弦定理得：$b=\sqrt{2}a$，

又 $\angle C=105°, c=\sqrt{3}+1$，则

$\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

$\sin 105^\circ=\sqrt{1-(\cos 105^\circ)^2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\cos\angle C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+2a^2-4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

解得 $a=\sqrt{2}$，则 $b=2$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin\angle C=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

故选：C

8. 【答案】C

【分析】根据已知 S_n 求 a_n 的方法求出通项公式 a_n，然后逐项判断即可.

【详解】数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-10n(n=1,2,3,\cdots)$，

当$n=1$时，$a_1=1-10=-9$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-10n)-\left[(n-1)^2-10(n-1)\right]=2n-11$，

当$n=1$，代入上式，即$2-11=-9$，符合上式，

所以$a_n=2n-11$

$a_5=2\times 5-11=-1<0$，故 A 错误；

由$a_n=2n-11$可知，数列$\{a_n\}$是单调递增数列，故 B 错误；

因为$a_1=-9$，$a_2=-7$，$a_3=-5$，$a_4=-3$，$a_5=-1$，$a_6=1$，$a_7=3$，$\cdots$

当$n\leq 5$时，$a_n<0$，当$n\geq 6$时，$a_n>0$，

所以数列$\{a_n\}$前n项的乘积有最大值，最大值为$a_1a_2a_3a_4=(-9)\times(-7)\times(-5)\times(-3)=945$，故 C 正确，D 错误.

故选：C.

9.【答案】A

【分析】根据椭圆的定义结合余弦定理可得$|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，再利用向量求$|OP|$的长.

【详解】由椭圆方程可知：$a=3,b=\sqrt{5},c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，

可得$|PF_1|+|PF_2|=2a=6,|F_1F_2|=2c=4$，

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$

$=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即$16=36-2|PF_1|\cdot|PF_2|-\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|$，解得$|PF_1|\cdot|PF_2|=8$，

因为O为线段F_1F_2的中点，则$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)$，

可得$\overrightarrow{PO}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PF_1}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{PF_2}^2\right)$

$=\frac{1}{4}\left[\left(\left|\overrightarrow{PF_1}\right|+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\right)^2-2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|+2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cos\angle F_1PF_2\right]$

$=\frac{1}{4}\left(6^2-2\times 8+2\times 8\times\frac{1}{4}\right)=6$，

所以$|OP|$的长为$\sqrt{6}$.

故选：A.

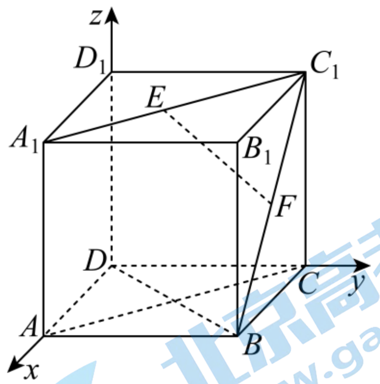
10.【答案】D

【分析】设正方体的棱长为 1，以点D为坐标原点，以DA，DC，DD_1所在的直线为x,y,z轴建立空间

直角坐标系，利用空间向量方法求解.选项 A，取平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，将 EF // 平面 ABB_1A_1 平面转化为 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA}=0$；选项 B，$EF\perp DB_1$ 转化为 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0$；选项 C，$EF$ 与 BD 所成的角是 $60°$ 转化为 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BD}\right\rangle\right|=\frac{1}{2}$；选项 D，由 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，结合选项 C 可知.

【详解】设正方体的棱长为 1，以点 D 为坐标原点，

以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0), B(1,1,0), C(0,1,0), A_1(1,0,1), B_1(1,1,1), C_1(0,1,1), F\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$，

设 $\overrightarrow{C_1E}=\lambda\overrightarrow{C_1A_1}(0\le\lambda\le1)$，又 $\overrightarrow{C_1A_1}=(1,-1,0)$，

$\therefore\overrightarrow{C_1E}=(\lambda,-\lambda,0)$，又 $\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，

则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{C_1E}=(\lambda,1-\lambda,1)$，

$\therefore E(\lambda,1-\lambda,1),\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,\lambda,-\frac{1}{2}\right)$，

选项 A，取平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

令 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}-\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，此时 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA}$，

$\therefore$ 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，EF 与 DA 垂直，而 $EF\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，

故 EF // 平面 ABB_1A_1，故 A 项正确；

选项 B，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，

则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DB_1}=\frac{1}{2}-\lambda+\lambda-\frac{1}{2}=0$，

故对任意点 E, $EF\perp DB_1$，故 B 项正确；

选项 C，$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=\lambda-\frac{1}{2}-\lambda=-\frac{1}{2}$，

令 $\left|\cos\left\langle \overrightarrow{EF},\overrightarrow{BD}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-\lambda\right)^2+\lambda^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}}=\dfrac{1}{2}$，

化简得 $2\lambda^2-\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，或 $\lambda=0$，

故存在点 E，使得 EF 与 BD 所成的角是 $60°$，故 C 项正确；

选项 D，连接 BD，

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

由底面 $ABCD$ 是正方形，则 $AC\perp BD$，

由 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $AA_1\perp BD$，

又 $AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C，$AA_1\cap AC=A$，

则 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C，即 $\overrightarrow{BD}$ 是平面 AA_1C_1C 的一个法向量，

由 C 项分析可知，存在点 E，使得 EF 与 BD 所成的角是 $60°$，

即存在点 E，使得 EF 与平面 AA_1C_1C 所成的角是 $30°$，故 D 项错误.

故选：D.

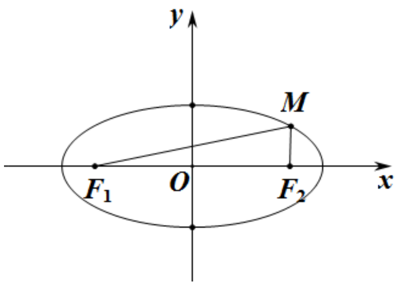
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小彪 5 分，共 25 分.

11. 【答案】18

【分析】根据椭圆的定义求出 $|MF_1|+|MF_2|$ 以及 $|F_1F_2|$ 的长，从而得到 $\triangle F_1MF_2$ 的周长.

【详解】



因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

由椭圆定义可得 $|MF_1|+|MF_2|=10$，$|F_1F_2|=8$，

所以 $\triangle F_1MF_2$ 的周长为 $|MF_1|+|MF_2|+|F_1F_2|=18$.

故答案为：18.

12. 【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】由面面垂直的性质定理得线面垂直关系，从而得四棱锥的高，进而求出体积.

【详解】取 AD 的中点 E，连接 SE，

由侧面 SAD 是边长为 $2\sqrt{3}\text{cm}$ 的等边三角形，得 $SE\perp AD$，

已知平面 $SAD\perp$ 底面 $ABCD$，

又 $SE\subset$ 平面 SAD，平面 $SAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，

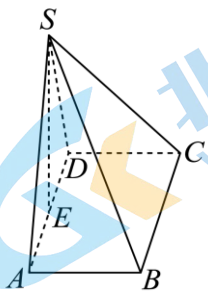
所以 $SE\perp$ 底面 $ABCD$，

即四棱锥 $S-ABCD$ 的高为 SE，且 $SE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}=3\text{cm}$，

又底面矩形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}\text{cm}^2$，

则四棱锥 $S-ABCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 3=2\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

故答案为：$2\sqrt{3}$.



13.【答案】2

【分析】根据题意先求直线方程以及圆心到直线的距离，进而结合垂径定理运算求解.

【详解】因为直线的倾斜角为 30°，可知其斜率为 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

且直线过原点，可知直线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，即 $x-\sqrt{3}y=0$，

又因为圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 的圆心为 $(0,2)$，半径 $r=2$，

可得圆心 $(0,2)$ 到直线的距离 $d=\dfrac{\left|0-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{3}$，

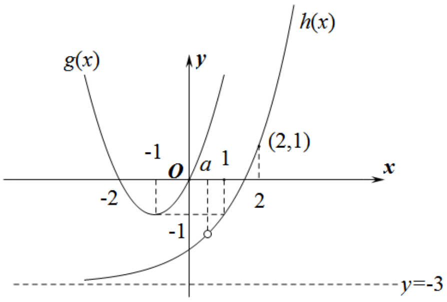
所以所截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

故答案为：2.

14.【答案】1（不唯一）

【分析】分别画出函数 $y=x^2+2x$ 和 $y=2^x-3$ 的图像，再根据条件求解.

【详解】设 $g(x)=x^2+2x,h(x)=2^x-3$，分别绘制 $g(x),h(x)$ 函数的大致图像如下图：



其中 $g(x)=x^2+2x$ 有最小值，$g_{\min}(x)=g(-1)=-1$，$h(x)=2^x-3$ 没有最小值，$y=-3$ 是它的渐近线，

点 $(2,1)$ 在 $h(x)$ 上，$\therefore\ a<2$，$h(1)=-1$，如上图，当 $a<1$ 时，$f(x)$ 不存在最小值，

$\therefore 1\le a<2$；

故答案为：$a=1$（不唯一）.

15.【答案】①③④

【分析】由函数在定义域内的最小值求出 k 的值验证结论①；设 $M\left(x_0,x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)(x_0>0)$，点到直线 $y=x$ 的距离表示出 $|MA|$，由 $|MA|=2023$ 是否有解判断结论②；计算 $|MA|\cdot|MB|$ 的值判断结论③；④四边形 $OAMB$ 面积表示成 x_0 的函数，利用基本不等式求最小值判断结论④.

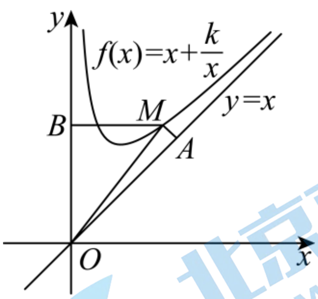
【详解】函数 $f(x)=x+\dfrac{k}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其最小值为 2，

当 $k\le 0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{k}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，没有最小值，不合题意，则有 $k>0$，

$f(x)=x+\dfrac{k}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{k}{x}}=2\sqrt{k}$，当且仅当 $x=\dfrac{k}{x}$，即 $x=\sqrt{k}$ 时等号成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值 $2\sqrt{k}$，得 $2\sqrt{k}=2$，解得 $k=1$，结论①成立；

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，设 $M\left(x_0,x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)(x_0>0)$，则 $|MB|=x_0$，$|OB|=x_0+\dfrac{1}{x_0}$，



由点 M 到直线 $y=x$ 的距离可得，$|MA|=\dfrac{\left|x_0-\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}x_0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2x_0}$，

$\frac{\sqrt{2}}{2x_0}=2023$时，解得$x_0=\frac{\sqrt{2}}{4046}$，此时$|MA|=2023$，结论②错误；

$|MA|\cdot|MB|=\frac{\sqrt{2}}{2x_0}\cdot x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，结论③成立；

MA所在直线方程为$y-\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)=-\left(x-x_0\right)$，与方程$y=x$联立，解得$y=x=x_0+\frac{1}{2x_0}$，

则有$A\left(x_0+\frac{1}{2x_0},x_0+\frac{1}{2x_0}\right)$，则$|OA|=\sqrt{2}\left(x_0+\frac{1}{2x_0}\right)$，

四边形$OAMB$面积$S=S_{\triangle MAO}+S_{\triangle MBO}=\frac{1}{2}|MB|\cdot|OB|+\frac{1}{2}|OA|\cdot|MA|$

$$=\frac{1}{2}x_0\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2x_0}\times\sqrt{2}\left(x_0+\frac{1}{2x_0}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{4x_0^2}\geq 1+2\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2\cdot\frac{1}{4x_0^2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当$\frac{1}{2}x_0^2=\frac{1}{4x_0^2}$，即$x_0=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$时等号成立，

所以四边形$OAMB$面积的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，结论④正确.

故答案为：①③④

【点睛】方法点睛：

由函数在定义域内的最小值求出k的值，得到$f\left(x\right)$的解析式，设M坐标，表示出$|MB|$和$|MA|$，判断$|MA|=2023$是否有解，计算$|MA|\cdot|MB|$是否为定值，利用基本不等式求四边形$OAMB$面积的最小值.

三、解答题共6小题，共85分．解答应写出文字说明，演算步验或证明过程.

16.【答案】(1) $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$（$k\in Z$）；

(2) $[-2,1]$

【分析】(1) 通过先展开再合一构造新的三角函数，根据三角函数求解增区间；

(2) 根据定义域求出整体的范围，再根据函数图像求出值域.

【小问1详解】

$$f\left(x\right)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=4\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}$$

$$=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}=\sin 2x+2\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\sqrt{3}$$

$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in \mathrm{Z}$），

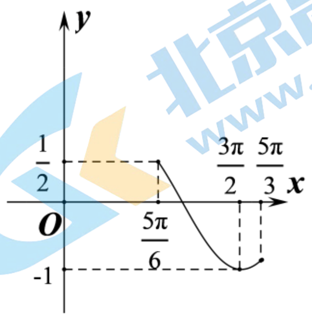
解得 $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{12}+k\pi$（$k\in \mathrm{Z}$），

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$（$k\in \mathrm{Z}$）；

【小问 2 详解】

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 时 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{5\pi}{3}\right]$，所以 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，

如图所示，



所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\in[-2,1]$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-2,1]$.

17. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\pm\sqrt{3}$

【分析】（1）由圆的方程求出圆心和半径，根据圆心到直线的距离与半径的大小关系即可证明；

（2）利用垂径定理求出弦长，进而利用面积公式得到关于 a 的方程，直接求解即可.

【小问 1 详解】

由圆 $C:(x-a)^2+(y-1)^2=2$ 可知，圆心坐标为 $C(a,1)$，半径 $r=\sqrt{2}$，

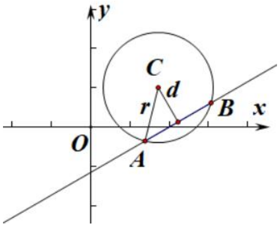
所以圆心 C 到直线 $l:x-ay-2=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|a-a-2|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}}$，

因为 $a>1$，所以 $1+a^2>2$，

所以 $\sqrt{1+a^2}>\sqrt{2}$，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{1+a^2}}<\sqrt{2}$，即 $d<r$，

所以，直线 l 与圆 C 相交.

【小问 2 详解】



因为直线l与圆C相交于 A， B 两点，

所以$d<r$，即$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}<\sqrt{2}$，解得$a>1$或$a<-1$，

由（1）可得，$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\left(\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{2a^2-2}{1+a^2}}$，

所以，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{2a^2-2}{1+a^2}}\times\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{2\sqrt{2a^2-2}}{1+a^2}=1$，

整理得，$a^4-6a^2+9=0$，即$\left(a^2-3\right)^2=0$，

解得，$a^2=3$，

所以$a=\pm\sqrt{3}$.

18.【答案】（1）证明见详解

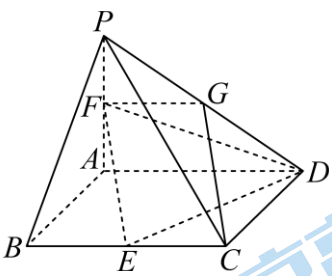
（2）$\frac{\sqrt{2}}{6}$

【分析】（1）取PD的中点G，连接GF,CG，可证$EF\ /\!/\ CG$，结合线面平行的判定定理分析证明；

（2）若条件①：根据面面垂直的性质定理可证$PA\perp$平面$ABCD$，建系，利用空间向量求面面夹角；若条件②：根据线面垂直的判定定理可证$PA\perp$平面$ABCD$，建系，利用空间向量求面面夹角.

【小问 1 详解】

取PD的中点G，连接GF,CG，



因为G,F分别为PD,PA的中点，则$GF\ /\!/\ AD$，且$GF=\frac{1}{2}AD$，

又因为$ABCD$为矩形，且E分别为BC的中点，则$CE\ /\!/\ AD$，且$CE=\frac{1}{2}AD$，

可得$GF\ /\!/\ CE$，且$GF=CE$，即$CEFG$为平行四边形，则$EF\ /\!/\ CG$，

且 $EF \not\subset$ 平面 PCD，$CG \subset$ 平面 PCD，所以 EF // 平面 PCD.

【小问 2 详解】

若选条件①：因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$，$PA \perp AB$，$PA \subset$ 平面 PAB，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

如图，以 A 为坐标原点，AB, AD, AP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,2,0), D(0,2,0), P(0,0,1), E(1,1,0), F\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

可得 $\overrightarrow{DE}=(1,-1,0), \overrightarrow{DF}=\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$，

设平面 EFD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x-y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-2y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1, z=4$，可得 $\vec{n}=(1,1,4)$，

由题意可知：平面 PAB 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，

可得 $\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{1}{3\sqrt{2}\times 1}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，

所以平面 EFD 与平面 PAB 夹角的余弦值 $\frac{\sqrt{2}}{6}$；

若选条件②：连接 AC，

可知 $AC=\sqrt{5}, AP=1, PC=\sqrt{6}$，即 $AC^2+AP^2=PC^2$，可得 $PA \perp AC$，

且 $PA \perp AB$，$AC \cap AB = A$，$AC, AB \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

如图，以 A 为坐标原点，AB, AD, AP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,2,0), D(0,2,0), P(0,0,1), E(1,1,0), F\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

可得 $\overrightarrow{DE}=(1,-1,0), \overrightarrow{DF}=\left(0,-2,\frac{1}{2}\right)$，

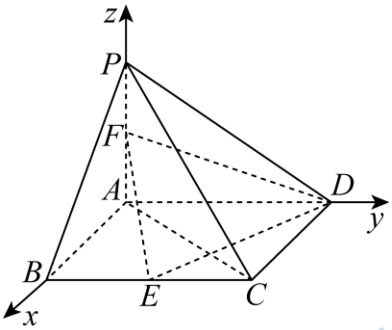
设平面 EFD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x-y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-2y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1, z=4$，可得 $\vec{n}=(1,1,4)$，

由题意可知：平面 PAB 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，

可得 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

所以平面 EFD 与平面 PAB 夹角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.



19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(2) 2

【分析】(1) 根据短轴长求出 b，再由离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，及 $a^2=b^2+c^2$ 求出 c，a，即可求出椭圆方程；

(2) 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立直线和椭圆方程，得出 $y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{t^2+2}$，根据题意表示出点 B 坐标，再由斜率公式求解即可.

【小问 1 详解】

因为椭圆的短轴长为 4，所以 $2b=4$，$b=2$，因为离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $c=2$，$a=2\sqrt{2}$，所以椭圆 E 的方程 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

【小问 2 详解】

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ x=ty+2\end{cases}$，化简可得 $(t^2+2)y^2+4ty-4=0$，

令 $\Delta=(4t)^2-4(t^2+2)\cdot(-4)=32t^2+32>0$，即 $t^2+1>0$，

$y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{t^2+2}$，

因为 $A(3,2)$ 不在直线 l 上，所以 $3\neq 2t+2$，即 $t\neq\dfrac{1}{2}$，

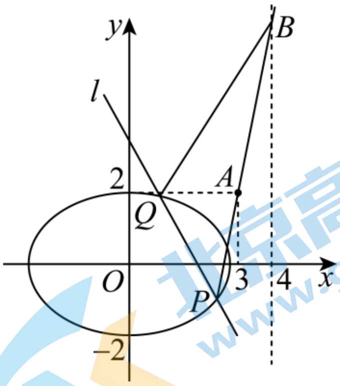
则直线 PA 方程为：$y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1-3}(x-3)$，令 $x=4$，则 $y=\dfrac{y_1-2}{x_1-3}+2=\dfrac{y_1+2x_1-8}{x_1-3}$，

因为直线 PA 与 $x=4$ 交于点 B，所以 $B\left(4,\dfrac{y_1+2x_1-8}{x_1-3}\right)$，

所以 $k_{QB}=\dfrac{\dfrac{y_1+2x_1-8}{x_1-3}-y_2}{4-x_2}=\dfrac{2ty_1-4-ty_1y_2+\left(y_1+y_1\right)}{ty_1+t\left(y_1+y_1\right)-t^2y_1y_2-2}$，

将 $y_1+y_2=\dfrac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{t^2+2}$ 代入，可得 $k_{QB}=\dfrac{2ty_1-4}{ty_1-2}=2$，

所以直线 QB 的斜率为 2.



20.【答案】（1） $a=2,b=1$

（2） $(-\infty,0)\cup(0,1)$；递增区间为 $(-\infty,-1)$，单调递减区间为 $(-1,0)$，$(0,1)$；

（3）1

【分析】（1）求出函数的导数，根据导数的几何意义列出相应的等式，即可求得答案；

（2）根据函数解析式可求得其定义域；结合（1）的结果，可得函数的导数的表达式，判断导数的正负，即可求得单调区间；

（3）结合（2）的结论以及零点存在定理，即可判断函数零点个数.，

【小问 1 详解】

由函数 $f\left(x\right)=ax+\dfrac{b}{x}+2\ln\left(1-x\right)$ 可知其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$，

则 $f'\left(x\right)=a-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2}{1-x}$，故 $f'\left(-1\right)=a-b-1$，$f\left(-1\right)=-a-b+2\ln2$，

因为曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,f\left(-1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y+3-2\ln2=0$，

故 $f'\left(-1\right)=a-b-1=0$，$f\left(-1\right)=-a-b+2\ln2=-3+2\ln2$，

解得 $a=2,b=1$；

【小问 2 详解】

由（1）可知 $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1}{x}+2\ln\left(1-x\right)$，需满足 $\begin{cases}x\neq0\\1-x>0\end{cases}$，

则其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$；

而 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{-2x^3+x-1}{x^2(1-x)}=\dfrac{-(x+1)(2x^2-2x+1)}{x^2(1-x)}$，

由于 $2x^2-2x+1=2(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}>0,1-x>0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<1$ 且 $x\neq 0$，

即 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-1)$，单调递减区间为 $(-1,0)$, $(0,1)$；

【小问 3 详解】

由（2）可知 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(-1)=-3+2\ln 2<0$，

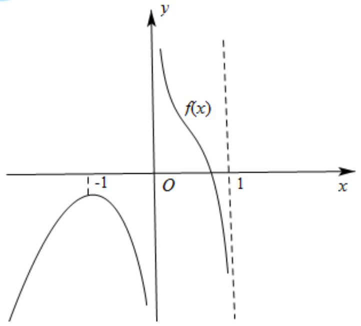
当 $x<0$ 且 x 无限趋近于 0 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2\ln(1-x)$ 的值趋向于负无穷大，

即 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内无零点；

当 $x>0$ 且 x 无限趋近于 0 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2\ln(1-x)$ 的值趋向于正无穷大，

当 $x<1$ 且 x 无限趋近于 1 时，$f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2\ln(1-x)$ 的值趋向于负无穷大，

由此可作出函数 $f(x)$ 的图象：



结合 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}+2e+2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}+2e+2\ln\left(\dfrac{e-1}{e}\right)>\dfrac{1}{e}+2e+2\ln\dfrac{e-1}{e^2}$

$>\dfrac{1}{e}+2e+2\ln\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{1}{e}+2e-4>0$，

$f\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)=1-\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{e^2}}+2\ln\dfrac{1}{e^2}=\dfrac{e^2-1}{e^2}+\dfrac{2e^2}{e^2-1}-4=\dfrac{e^2-1}{e^2}+\dfrac{2}{e^2-1}-2<0$，

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,1)$ 内的零点个数为 1.

【点睛】难点点睛：解答本题的难点是判断函数的零点个数时，要结合函数的单调性以及零点存在定理去判断，特别是特殊值的选取以及正负判断，计算比较复杂.

21.【答案】（1）$22,23,24$ 都是 $3-$ 好数

（2）证明见解析　（3）$\dfrac{2^{4047}+1}{3}$

【分析】（1）直接由$k-$好数的定义验证即可.

（2）证明m是$(k+1)-$好数时，分是否存在$c_i=0$使得$m=\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$两种情况讨论即可，证明$\dfrac{m}{2}$是$k-$好数时，将表达式$m=\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$中的数分成四类，即：$1,-1,2^{c_i}\ge 1,-2^{c_j}\le -1$，从而即可证明.

（3）注意到表达式$m=\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，由此联系到用二进制表示，通过归纳得知最小的$1-$坏数是 3，最小的$2-$坏数是 11，最小的$3-$坏数是 43，最小的$4-$坏数是 171，且注意到$3=11_{(2)},11=1011_{(2)}$，应该是在破坏数码和，通过分析得知，$k-$坏数要满足二进制至少有$(k+1)$个数码是 1，而且在二进制表示左右两头的 1 之间 0 段的数目至少是$(k-1)$，由此即可猜出最小的$k-$坏数是

$n=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2k-1},k\ge 1$，从而证明即可得解.

【小问 1 详解】

因为$22=(-1)^0\cdot 2^4+(-1)^0\cdot 2^2+(-1)^0\cdot 2^1$，

所以 22 是$3-$好数；

因为$23=(-1)^0\cdot 2^4+(-1)^0\cdot 2^3+(-1)^1\cdot 2^0$，

所以 23 是$3-$好数；

因为$24=(-1)^0\cdot 2^4+(-1)^0\cdot 2^2+(-1)^0\cdot 2^2$，

所以 24 是$3-$好数.

【小问 2 详解】

由题意m是$k-$好数当且仅当$m=\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，$a_1,a_2,\cdots,a_k,c_1,c_2,\cdots,c_k$是非负整数，分以下两种情形来说明$m$是$(k+1)-$好数，

情形一：若存在$c_i=0$，不妨设为$c_1=0,2^{c_1}=1$，此时$(-1)^{a_1}=1$或$(-1)^{a_1}=-1$，

则当$k\ge 2$时，$m=1+\sum\limits_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，或$m=-1+\sum\limits_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，

因此$m=(-1)^0\cdot 2^1+(-1)^1\cdot 2^0+\sum\limits_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，或$m=(-1)^1\cdot 2^1+(-1)^0\cdot 2^0+\sum\limits_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，

即此时m是$(k+1)-$好数；

当$k=1$时，$m=(-1)^{a_1}\cdot 2^{c_1}$，由题意$m>0$，因此不妨取$a_1=0,(-1)^{a_1}=1$，即$m=2^{c_1}$，

因为m是偶数，所以$c_1 \ge 1, c_1 - 1 \ge 0$，从而$m = (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1}$是$(k+1)-$好数；

情形二：若不存在$c_i = 0$，则任取c_i，均有$c_i \ge 1$，当然也有$c_1 \ge 1$，而此时$(-1)^{a_1} = 1$或$(-1)^{a_1} = -1$，

则当$k \ge 2$时，$m = 2^{c_1} + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，或$m = -2^{c_1} + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，

由情形一可知，当$c_1 \ge 1, c_1 - 1 \ge 0$时，$2^{c_1} = (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1}$，

因此$m = (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1} + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，或$m = (-1)^1 \cdot 2^{c_1-1} + (-1)^1 \cdot 2^{c_1-1} + \sum_{i=2}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$，

即此时m是$(k+1)-$好数；

当$k = 1$时，$m = (-1)^{a_1} \cdot 2^{c_1}$，由题意$m > 0$，因此不妨取$a_1 = 0, (-1)^{a_1} = 1$，即$m = 2^{c_1}$，

因为$c_1 \ge 1, c_1 - 1 \ge 0$，从而$m = (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_1-1}$是$(k+1)-$好数；

综上所述：若m是偶数且是$k-$好数，则m是$(k+1)-$好数.

若m是偶数且是$k-$好数，接下来我们说明$\frac{m}{2}$是$k-$好数，

即已知$m = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i}$是偶数，$a_1, a_2, \cdots, a_k, c_1, c_2, \cdots, c_k$是非负整数，

由以上分析可知$(-1)^{a_i} = 1$或$(-1)^{a_i} = -1$，$2^{c_i} = 1, (c_i = 0)$或$2^{c_i} \ge 2, (c_i \ge 1)$是偶数，

且$(-1)^0 \cdot 2^1 + (-1)^1 \cdot 2^0 = 1$，$2^{c_i} = (-1)^0 \cdot 2^{c_i-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_i-1}$，$-2^{c_i} = (-1)^1 \cdot 2^{c_i-1} + (-1)^1 \cdot 2^{c_i-1}$，

不妨设$(-1)^{a_i} \cdot 2^{c_i} = 1, (a_i = 0, c_i = 0, 1 \le i \le p)$，$(-1)^{a_i} \cdot 2^{c_i} = -1, (a_i = 1, c_i = 0, p+1 \le i \le p+q)$，

$m_i = (-1)^{a_i} \cdot 2^{c_i} = 2^{c_i}, (a_i = 0, c_i \ge 1, p+q+1 \le i \le p+q+r)$，

$n_i = (-1)^{a_i} \cdot 2^{c_i} = -2^{c_i}, (a_i = 1, c_i \ge 1, p+q+r+1 \le i \le p+q+r+s)$，

所以$m = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{a_i}2^{c_i} = p - q + \sum_{i=p+q+1}^{p+q+r} m_i + \sum_{i=p+q+r+1}^{p+q+r+s} n_i$，

因为$m, m_i = 2^{c_i}, n_i = -2^{c_i}, c_i \ge 1$均是偶数，

所以$\sum_{i=p+q+1}^{p+q+r} m_i + \sum_{i=p+q+r+1}^{p+q+r+s} n_i$是偶数，$p - q = m - \left(\sum_{i=p+q+1}^{p+q+r} m_i + \sum_{i=p+q+r+1}^{p+q+r+s} n_i\right)$是偶数，

所以$\frac{m}{2} = \frac{p-q}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=p+q+1}^{p+q+r} m_i + \frac{1}{2}\sum_{i=p+q+r+1}^{p+q+r+s} n_i$，

$= \frac{p-q}{2}\left[(-1)^0 \cdot 2^1 + (-1)^1 \cdot 2^0\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=p+q+1}^{p+q+r}\left[(-1)^0 \cdot 2^{c_i-1} + (-1)^0 \cdot 2^{c_i-1}\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=p+q+r+1}^{p+q+r+s}\left[(-1)^1 \cdot 2^{c_i-1} + (-1)^1 \cdot 2^{c_i-1}\right]$，

综上所述，若m是偶数且是$k-$好数，则$\frac{m}{2}$也是$k-$好数.

【小问 3 详解】

记$n=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2k-1},k\geq1$，设$m<n$：

①若m的二进制表示中只有至多有k个 1，那么m显然是$k-$好数；

②若m的二进制表示中有至少有$(k+1)$个 1，那么m的二进制表示至多有$(2k-1)$位。

此时，m的二进制表示中的那些 0 隔出了若干个 1 串。

如果一个 1 串的长度为 1，它一定能表示为2^t，

如果一个 1 串的长度大于 1，它一定能表示为2^u-2^v，

假设m是$k-$坏数，长度为 1 的 1 串的数量为p，长度大于 1 的 1 串的数量为q，

那么就意味着$p+2q>k$，

记$K=p+2q$，

如果我们标出每个 1 串最左边和最右边的 1，那么这些 1 两两不相邻，且总数目为K，

但事实上，由于一共至多有$(2k-1)$位，所以$K\leq k$，产生矛盾，

这就意味着m一定是$k-$好数.

这就说明，小于n的正整数都是$k-$好数，

接下来我们用反证法来证明n是$k-$坏数，

假设n是$k-$好数，

由于n的二进制表示中，1 的个数是大于k的，

所以n的那个表示里，肯定存在负号项，

也就是说n可以表示成两个正整数P,Q之差，不妨设$n=P-Q$，

且P,Q的二进制中 1 的个数之和不超过k，

而且我们还可以同时去掉P,Q的那些位数相同的 1，全都变成 0，

所以n可以表示成两个正整数P,Q的差，P,Q的二进制中 1 的个数之和不超过k，且没有相同位置的 1，

那么就设P,Q的二进制表示中，1 的数量分别是u,v，

则$u+v\leq k$，

那么：(1) P的二进制表示中，最左最右两个 1 之间的 0 段的数目至多有$(u-1)$个；

(2)每给P减掉一个2^t（且P的2^t位为 0），最左最右两个 1 之间的 0 段的数目至多增加 1 个，

增加 1 个当且仅当减掉的这个位置左边最近的 1 的左边还是 1，且这个位置的右边是 0.

(3) n的二进制表示中，最左最右两个 1 之间有$(k-1)$个 0 段.

由(1)(2)我们知道，n的二进制表示中，最左最右两个 1 之间的 0 段的数目至多有$(u+v-1)$个，

结合(3)就可以知道$(u+v)$必须等于k，且(1)，(2)，(3)的每个不等关系都取等.

由于(1)的不等关系取等，

所以 P 的最后一位必须是 0；

但 n 的最后一位是 1，

所以 Q 的最后一位是 1，

但是由于(2)的不等关系取等，

所以最后在减掉 $2^0=1$ 这步时，右边还有 0，

而这不可能，因为已经是最后一位了，

所以假设不成立，

从而 n 是 $k-$坏数，

所以最小的 $k-$坏数是 $n=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2k-1}=1+\dfrac{2\times\left(1-2^{2k}\right)}{1-2^2}=\dfrac{2\times4^k+1}{3},k\geq1$，

因此最小的 $2023-$坏数是 $\dfrac{2\times4^{2023}+1}{3}=\dfrac{2^{4047}+1}{3}$.

【点睛】关键点点睛：第一问比较常规，按新定义验证即可；第二问的关键主要是注意到表达式的结构，分类讨论即可；而第三问的关键是主要要联想到二进制表示，并且要通过归纳分析，演绎推理证明猜想，从而顺利求解.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！