工作秘密 严禁外传
擅自泄露 严肃追责

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数　学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷　(选择题,共60分)

一、选择题: 本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid \lg x<1\}$,$B=\{x\mid x>3\}$,则 $A\cup B=$

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(3,10)$　　(C) $(-\infty,+\infty)$　　(D) $(3,+\infty)$

2. 已知 i 为虚数单位,则复数 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$ 的虚部为

(A) $-\mathrm{i}$　　(B) i　　(C) -1　　(D) 1

3. 命题"$\forall x>0,x^2+x+1>0$"的否定为

(A) $\exists x_0\leqslant 0,x_0^2+x_0+1\leqslant 0$　　(B) $\forall x\leqslant 0,x^2+x+1\leqslant 0$

(C) $\exists x_0>0,x_0^2+x_0+1\leqslant 0$　　(D) $\forall x>0,x^2+x+1\leqslant 0$

4. 袋子中有5个大小质地完全相同的球,其中3个红球和2个白球,从中不放回地依次随机摸出两个球,则摸出的两个球颜色相同的概率为

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{2}{5}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{4}{5}$

5. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$,$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值为

(A) $-\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) -3　　(D) 3

6. 在△ ABC 中，已知 $AB=AC$，D 为 BC 边中点，点 O 在直线 AD 上，且 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BO}=3$，则 BC 边的长度为

(A) $\sqrt{6}$　　(B) $2\sqrt{3}$　　(C) $2\sqrt{6}$　　(D) 6

7. 已知圆柱的两个底面的圆周在体积为 $\frac{32\pi}{3}$ 的球 O 的球面上，则该圆柱的侧面积的最大值为

(A) 4π　　(B) 8π　　(C) 12π　　(D) 16π

8. 已知 P 是曲线 $y=-\sin x(x\in[0,\pi])$ 上的动点，点 Q 在直线 $x-2y-6=0$ 上运动，则当 $|PQ|$ 取最小值时，点 P 的横坐标为

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $\frac{2\pi}{3}$　　(D) $\frac{5\pi}{6}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=n^2$，记数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，$n\in\mathbf{N}^*$．则 T_{20} 的值为

(A) $\frac{19}{39}$　　(B) $\frac{38}{39}$　　(C) $\frac{20}{41}$　　(D) $\frac{40}{41}$

10. 某工厂产生的废气经过过滤后排放，过滤过程中废气的污染物数量 P(mg/L) 与时间 t(h) 之间的关系为 $P=P_0e^{-kt}$．如果前 2 小时消除了 20%的污染物，则污染物减少 50%大约需要的时间为(参考数据：$\ln 2\approx 0.69$，$\ln 3\approx 1.10$，$\ln 5\approx 1.61$)

(A) 4h　　(B) 6h　　(C) 8h　　(D) 10h

11. 已知 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，A 为抛物线上的动点，点 $B(-\frac{1}{2},0)$．则当 $\frac{|AB|}{|AF|}$ 取最大值时，$|AB|$ 的值为

(A) 2　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 1

12. 已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长均为 $\sqrt{2}$，M，N 分别为棱 AD、BC 的中点，F 为棱 AB 上异于 A、B 的动点．有下列结论：

①线段 MN 的长度为 1；

②存在点 F，满足 $CD\perp$ 平面 FMN；

③ $\angle MFN$ 的余弦值的取值范围为 $[0,\frac{\sqrt{5}}{5})$；

④△ FMN 周长的最小值为 $\sqrt{2}+1$．

其中所有正确结论的编号为

(A)①③　　(B)①④　　(C)①②④　　(D)②③④

第Ⅱ卷 （非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x<1,\\ 2^x+1, & x\geq 1.\end{cases}$ 若 $f(a)=2$，则 a 的值为______．

14. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7=\dfrac{1}{9}$，且 $a_2a_4=1$，则该数列的公比的值为______．

15. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第一象限内的交点为 P，直线 PF_1 与双曲线的渐近线在第二象限内的交点为 Q．若点 Q 恰好为线段 PF_1 的中点，则直线 PF_1 的斜率的值为______．

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减．若 $a=f(\log_{0.2}0.3)$，$b=f(\log_3 0.1)$，$c=f(2^{0.7})$，则 a,b,c 的大小关系为______．（用符号“$<$”连接）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $(\sqrt{2}b-a)\cos C=c\cos A$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{2}$，$c(a\cos B-b\cos A)=b^2$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

18. （本小题满分 12 分）

某种机械设备随着使用年限的增加，它的使用功能逐渐减退，使用价值逐年减少，通常把它使用价值逐年减少的“量”换算成费用，称之为“失效费”．某种机械设备的使用年限 x（单位：年）与失效费 y（单位：万元）的统计数据如下表所示：

使用年限 x（单位：年）	1	2	3	4	5	6	7
失效费 y（单位：万元）	2.90	3.30	3.60	4.40	4.80	5.20	5.90

（Ⅰ）由上表数据可知，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请用相关系数加以说明；（精确到 0.01）

（Ⅱ）求出 y 关于 x 的线性回归方程，并估算该种机械设备使用 10 年的失效费．

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$．

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距最小二乘估计计算公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$．

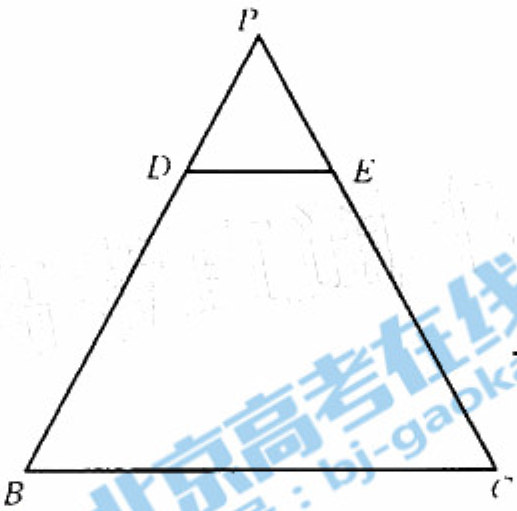
参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=14.00$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2=7.08$，$\sqrt{198.24}\approx 14.10$．

19.（本小题满分 12 分）

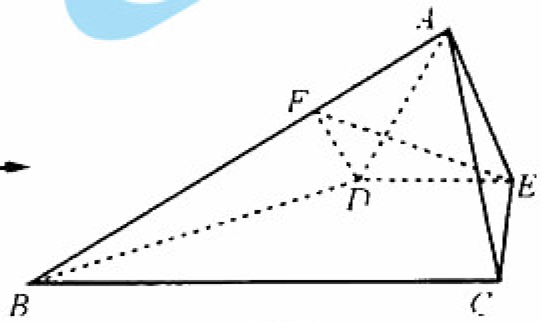
如图①，在等腰三角形 PBC 中，$PB=PC=3\sqrt{5}$，$BC=6$，D,E 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DP}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EP}$．将 $\triangle PDE$ 沿直线 DE 折起到 $\triangle ADE$ 的位置，连接 AB,AC，得到如图②所示的四棱锥 $A-BCED$，点 F 在棱 AB 上且满足 $BF=2AF$．

（Ⅰ）证明：$DF\ /\!/$ 平面 ACE；

（Ⅱ）当 $AB=\sqrt{29}$ 时，求三棱锥 $A-DEF$ 的体积．



图①



图②

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，其长半轴长为 2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设经过点 $B(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 D，E 两点，点 E 关于 x 轴的对称点为 F，直线 DF 与 x 轴相交于点 G，记△ BEG 与△ BDG 的面积分别为 S_1,S_2，求 $|S_1-S_2|$ 的最大值．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}-(a-1)\ln x-2$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）若 $f(x)$ 存在唯一极值点，且极值为 0，求 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的零点个数．

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑．

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-6=0$．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（Ⅰ）求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程；

（Ⅱ）若点 $P(x,y)$ 在直线 l 上且 $y>0$，射线 OP 与曲线 C 相交于异于 O 点的点 Q，求 $\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 的最小值．

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

设函数 $f(x)=3|x+1|+|2x-1|$ 的最小值为 m．

（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）若 $a,b\in(0,+\infty)$，证明：$(\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant m^2$．

成都市2018级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.A; 2.D; 3.C; 4.B; 5.D; 6.A; 7.B; 8.C; 9.C; 10.B; 11.C; 12.B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. -1; 14. $\frac{1}{3}$; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $b<c<a$.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)由已知及正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin B\cos C-\sin A\cos C=\sin C\cos A$. ……2分

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$. ……3分

$\because A+C=\pi-B$, $\therefore \sin(A+C)=\sin B$.

$\therefore \sqrt{2}\sin B\cos C=\sin B$. ……4分

又 $\because \sin B\neq 0$, $\therefore \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……5分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{4}$. ……6分

(Ⅱ)由已知及余弦定理,得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$. ……8分

化简,得 $a^2=2b^2$. ……9分

又 $\because a=\sqrt{2}$, $\therefore b=1$. ……10分

$\therefore$ $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$. ……12分

18.解:(Ⅰ)由题意,知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$, ……1分

$\bar{y}=\frac{2.90+3.30+3.60+4.40+4.80+5.20+5.90}{7}=4.30$, ……2分

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$. ……3分

$\therefore r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.10}\approx0.99$. ……5分

因为 y 与 x 的相关系数近似为0.99,所以 y 与 x 的线性相关程度相当大,从而可以用

线性回归模型拟合 y 与 x 的关系． ……6 分

（Ⅱ）$\because \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{28}=0.5$， ……8 分

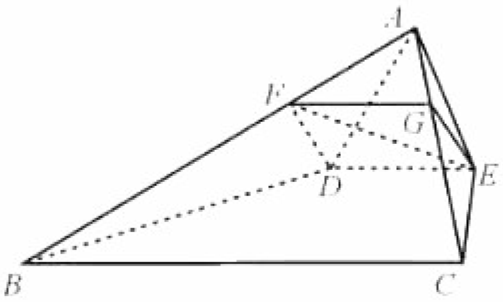
$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.3-0.5\times4=2.3$． ……9 分

$\therefore$ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.5x+2.3$． ……10 分

将 $x=10$ 代入线性回归方程，得 $\hat{y}=0.5\times10+2.3=7.3$．

$\therefore$估算该种机械设备使用 10 年的失效费为 7.3 万元． ……12 分

19. 解：（Ⅰ）如图，在棱 AC 上取点 G 满足 $CG=2AG$，连接 EG，FG． ……1 分



$\because BF=2AF$，$\therefore FG\parallel BC$ 且 $FG=\dfrac{1}{3}BC$．

又由题意，可得 $DE\parallel BC$ 且 $DE=\dfrac{1}{3}BC$．

$\therefore DE=FG$ 且 $DE\parallel FG$．

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 为平行四边形． ……3 分

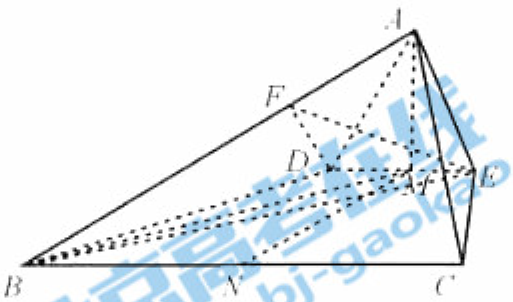
$\therefore DF\parallel EG$．

又 $\because DF\not\subset$ 平面 ACE，$EG\subset$ 平面 ACE，

$\therefore DF\parallel$ 平面 ACE． ……5 分

（Ⅱ）如图，分别取 DE，BC 的中点 M，N，连接 AM，MN，BM，BE．

由题意，知 $MN\perp BC$，$AM=2$，$MN=4$，$BN=3$．



在 Rt△BMN 中，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在△ABM 中，$\because AB=\sqrt{29}$，

$\therefore AM^2+BM^2=2^2+5^2=29=AB^2$.

$\therefore AM\perp BM$． ……7 分

又 $\because AM\perp DE$，$BM\cap DE=M$，BM，$DE\subset$ 平面 $BCED$，

$\therefore AM\perp$ 平面 $BCED$． ……8 分

$\because BF=2AF$，

$\therefore$ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=V_{F-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{B-ADE}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}$． ……10 分

又 $\because V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot AM=\dfrac{1}{6}DE\cdot MN\cdot AM=\dfrac{1}{6}\times2\times4\times2=\dfrac{8}{3}$， ……11 分

$\therefore$ 三棱锥 $A-DEF$ 的体积 $V_{A-DEF}=\dfrac{1}{3}V_{A-BDE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{8}{9}$． ……12 分

20. 解：（Ⅰ）由已知，得 $a=2$. $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. ……1 分

$\because$ 椭圆 C 经过点 $A(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\therefore \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$. ……3 分

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4 分

(Ⅱ)由题意,知直线 l 的斜率存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$,$D(x_1,y_1)$,$E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty-1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$,消去 x,得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$. ……5 分

$\because \Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$,

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$. ……6 分

$\because$ F 为点 E 关于 x 轴的对称点,$\therefore F(x_2,-y_2)$.

$\therefore$ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,

即 $y-y_1=\dfrac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$. ……7 分

令 $y=0$,则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\dfrac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot(-\dfrac{3}{2t})-1=-4$.

$\therefore G(-4,0)$. ……8 分

$\therefore |S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1+y_2|=\dfrac{3}{2}|y_1+y_2|=\dfrac{3|t|}{t^2+4}$

$=\dfrac{3}{|t|+\dfrac{4}{|t|}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{|t|\cdot\dfrac{4}{|t|}}}=\dfrac{3}{4}$. ……11 分

$\therefore$ 当且仅当 $|t|=\dfrac{4}{|t|}$,即 $t=\pm2$ 时,$|S_1-S_2|$ 取得最大值 $\dfrac{3}{4}$. ……12 分

21. 解:(Ⅰ)由已知,可得 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x^2}(x>0)$. ……1 分

①若 $a\leqslant 0$,则当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,与 $f(x)$ 存在极值点矛盾; ……2 分

②若 $a>0$,则由 $f'(x)=0$ 得 $x=a$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,a)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 存在唯一极小值点 $x=a$. …… 3 分

$\therefore f(a)=a+1-(a-1)\ln a-2=(a-1)(1-\ln a)=0$. ……4 分

$\therefore a=1$ 或 $a=\mathrm{e}$. ……5 分

(Ⅱ)①当 $a\leqslant 1$ 时,$f'(x)\geqslant 0$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立,$\therefore f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\because f(1)=a-1\leqslant 0$,$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+\dfrac{a}{\mathrm{e}}-a-1=(\mathrm{e}-1)(1-\dfrac{a}{\mathrm{e}})>0$,

$\therefore$ 由零点存在性定理,$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上有 1 个零点; ……7 分

②当 $1<a<\mathrm{e}$ 时,

$\because$ 当 $x\in[1,a)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(a,\mathrm{e}]$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,a)$ 上单调递减,在 $(a,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=(a-1)(1-\ln a)>0$,此时 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上无零点； ……9 分

③当 $a\geqslant e$ 时，$\because f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,e]$ 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减．

$\because f(1)=a-1>0$，$f(e)=(e-1)(1-\dfrac{a}{e})\leqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,e]$ 上有 1 个零点． ……11 分

综上，当 $1<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上无零点；

当 $a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant e$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上有 1 个零点． ……12 分

22. 解：（Ⅰ）由曲线 C 的参数方程，得曲线 C 的普通方程为

$(x-1)^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$． ……1 分

由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，得

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$， ……3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$，即 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=3$． ……5 分

（Ⅱ）设点 P 的极坐标为 (ρ_1,θ)，点 Q 的极坐标为 (ρ_2,θ)，其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$．

由（Ⅰ）知 $|OP|=\rho_1=\dfrac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$，$|OQ|=\rho_2=2\cos\theta$． ……7 分

$$\therefore \frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\frac{6}{1+\cos 2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta}$$

$$=\frac{6}{1+2\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})}.$$ ……9 分

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \dfrac{\pi}{6}<2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$．$\therefore -\dfrac{1}{2}<\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})\leqslant 1$．

$\therefore$ 当 $\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{6})=1$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\dfrac{|OP|}{|OQ|}$ 取得最小值 2． ……10 分

23. 解：（Ⅰ）当 $x<-1$ 时，$f(x)=-3x-3-2x+1=-5x-2>3$； ……1 分

当 $-1\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x+3-2x+1=x+4\in[3,\dfrac{9}{2}]$； ……2 分

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x+3+2x-1=5x+2>\dfrac{9}{2}$． ……3 分

综上，当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\min}=3$，$\therefore m=3$． ……5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），即证 $(\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 9$．

$\because a,b\in(0,+\infty)$，

$\therefore \dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}$，$\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}$． ……7 分

$\therefore (\dfrac{1}{a}+1+\dfrac{b^2}{a})(\dfrac{1}{b}+1+\dfrac{a^2}{b})\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}}=9$． ……9 分

当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}=1=\dfrac{b^2}{a},\\[2mm] \dfrac{1}{b}=1=\dfrac{a^2}{b}\end{cases}$ 即 $a=b=1$ 时，等号成立． ……10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。