高三数学考试

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

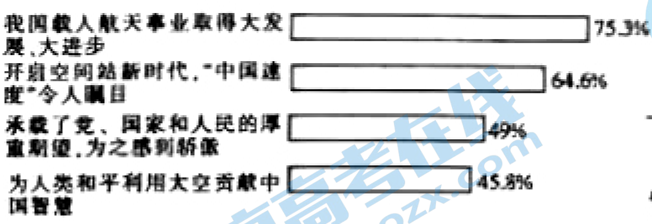
1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-6>0\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{5\}$　　B. $\{4,5\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{2,3,4,5\}$

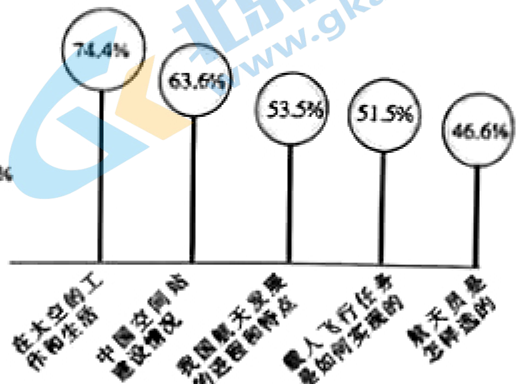
2. 下列四个向量中，与向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$ 共线的是

A. $(3,2)$　　B. $(3,-2)$　　C. $(4,-6)$　　D. $(4,6)$

3. 2021 年 7 月，中国青年报社社会调查中心通过问卷网，对 2047 名 14～35 岁青少年进行的专项调查显示，对于神舟十二号航天员乘组出征太空，98.9%的受访青少年都表示了关注. 针对两个问题“关于此次神舟十二号飞行乘组出征太空，你有什么感受（问题 1）”和“青少年最关注哪些方面（问题 2）”，问卷网统计了这 2047 名青少年回答的情况，得到如图所示的两个统计图，据此可得到的正确结论为



问题 1



问题 2

A. 对于神舟十二号太空之旅，只有极少的受访青少年关注航天员是怎样选的

B. 对于神舟十二号飞行乘组出征太空，超过七成的受访青少年认为开启空间站新时代，“中国速度”令人瞩目

C. 对于神舟十二号太空之旅，青少年关注最多的是航天员在太空的工作和生活

D. 对于神舟十二号飞行乘组出征太空，超过八成的受访青少年充分感受我国载人航天事业取得大发展、大进步

4. 若虚数 z 满足 $2iz=z^2$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 4　　D. 0 或 2

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$，$g(x)=x^2-2x$，则

A. $f(x+1)$ 为奇函数，$g(x-1)$ 为偶函数

B. $f(x+1)$ 为奇函数，$g(x+1)$ 为偶函数

C. $f(x+\dfrac{1}{2})$ 为奇函数，$g(x-1)$ 为偶函数

D. $f(x+\dfrac{1}{2})$ 为奇函数，$g(x+1)$ 为偶函数

6. 若 $\tan(\alpha+2\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=2$，则 $\tan(\alpha+5\beta)=$

A. $\dfrac{11}{5}$　　B. $\dfrac{11}{2}$　　C. $\dfrac{2}{11}$　　D. $\dfrac{5}{11}$

7. 含有海藻碘浓缩液的海藻碘盐，是新一代的碘盐产品. 海藻中的碘 80% 为无机碘，10%～20% 为有机碘，海藻碘盐兼备无机碘和有机碘的优点. 某超市销售的袋装海藻碘食用盐的质量 X(单位：克)服从正态分布 $N(400,4)$，某顾客购买了 4 袋海藻碘食用盐，则至少有 2 袋的质量超过 400 克的概率为

A. $\dfrac{11}{16}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{5}{8}$　　D. $\dfrac{5}{16}$

8. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 P，Q 是 C 上位于 x 轴上方的任意两点，且 $PF_1 /\!/ QF_2$. 若 $|PF_1|+|QF_2|\geqslant b$，则 C 的离心率的取值范围是

A. $(0,\dfrac{1}{2}]$　　B. $[\dfrac{1}{2},1)$　　C. $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$　　D. $[\dfrac{\sqrt{3}}{2},1)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 若直线 $3x+4y+n=0(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 C：$(x-2)^2+y^2=a_n^2(a_n>0)$ 相切，则

A. $a_1=\dfrac{6}{5}$　　B. 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

C. 圆 C 可能经过坐标原点　　D. 数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 23

10. “端午节”为中国国家法定节假日之一，已被列入世界非物质文化遗产名录，吃粽子便是端午节食俗之一. 全国各地的粽子包法各有不同. 如图，粽子可包成棱长为 6 cm 的正四面体状的三角粽，也可做成底面半径为 $\dfrac{3}{2}$ cm，高为 6 cm(不含外壳)的圆柱状竹筒粽. 现有两碗馅料，若一个碗的容积等于半径为 6 cm 的半球的体积，则(参考数据：$\sqrt{2}\pi\approx4.44$)


A. 这两碗馅料最多可包三角粽 35 个　　B. 这两碗馅料最多可包三角粽 36 个

C. 这两碗馅料最多可包竹筒粽 21 个　　D. 这两碗馅料最多可包竹筒粽 20 个

11. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在一个周期内的图象经过 $A(-\frac{5\pi}{18},0)$，$B(-\frac{\pi}{9},-1)$，$C(\frac{\pi}{9},0)$，$D(\frac{2\pi}{9},1)$ 这四个点中的三个点，则

A. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$　　B. $\varphi=-\frac{\pi}{9}$　　C. $\omega=2$　　D. $\omega=3$

12. 设 $a=\ln\frac{4}{3}$，$b=\frac{7}{32}$，$c=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{8}$，$d=0.4^{2.1}$，则

A. $c>a$　　B. $b>c$　　C. $a>b$　　D. $a>d$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡的相应位置．

13. $y^2(x-y)^8$ 的展开式中 x^3y^7 的系数为___▲___．

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，F_1，F_2 分别是 C 的左、右焦点，P 为 C 右支上一点．若 $|PF_1|=m-1$，则 $|PF_2|=$___▲___．

15. 曲线 $y=x^2$ 在点 $A(-1,-1)$ 处的切线与曲线 $y=x^3$ 的另一个公共点为 $B(m,n)$，则 $m+n=$___▲___．

16. 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别为棱 BC，CC_1，AA_1 上一点，$BE=2CF$，且 $EF/\!/$平面 B_1D_1G．当三棱锥 $C-DEF$ 的体积取得最大值时，三棱锥 $C-DEF$ 的侧面积为___▲___，B_1G 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为___▲___．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

a，b，c 分别为△ABC 内角 A，B，C 的对边．已知 $a=4$，$ab\sin A\sin C=c\sin B$．

(1) 若 $bc=16$，求 b^2+c^2；

(2) 若 $B=2A$，求 b．

18.（12 分）

甲、乙、丙三台机床同时生产一种零件，在 10 天中，甲、乙机床每天生产的次品数如下表所示：

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天
甲	0	1	0	2	2	3	3	1	2	0
乙	2	4	1	1	0	2	1	1	0	1

(1) 若从这 10 天中随机选取 1 天，设甲机床这天生产的次品数为 X，求 X 的分布列；

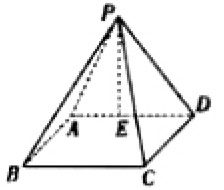
(2) 已知丙机床这 10 天生产次品数的平均数为 1.4，方差为 1.84．以平均数和方差为依据，若要从这三台机床中淘汰一台，你应该怎么选择？这三台机床你认为哪台性能最好？

19.（12 分）

如图，在底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，E 为棱 AD 上一点，$PE\perp$ 底面 $ABCD$.

(1)证明：$AB\perp PD$.

(2)若 $AE=2$，$AB=DE=PE=3$，求二面角 $B-PC-D$ 的大小.



20.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $a_1=-2b_1=4$，且$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，$\{a_n+b_n\}$是公比为 2 的等比数列.

(1)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求$\{|b_n|\}$的前 n 项和 T_n.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2a)\ln x+a$.

(1)从①$a=3$，②$a=-1$ 这两个条件中选择一个，求 $f(x)$零点的个数；

(2)若 $a>0$，讨论函数 $y=xf(x)$的单调性.

注：若第(1)问选择两个条件分别解答，则按第一个解答计分.

22.（12 分）

已知抛物线 E 的顶点为坐标原点，对称轴为 x 轴，且直线 $y=x+1$ 与 E 相切.

(1)求 E 的方程.

(2)设 P 为 E 的准线上一点，过 P 作 E 的两条切线，切点为 A，B，直线 AB 的斜率存在，且直线 PA，PB 与 y 轴分别交于 C，D 两点.

①证明：$PA\perp PB$.

②试问$\dfrac{|PC|\cdot|AB|}{|PB|\cdot|CD|}$是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查一元二次不等式的解法与集合的交集，考查运算求解能力.

由 $x^2-x-6>0$，得 $x<-2$ 或 $x>3$，则 $A\cap B=(4,5)$.

2. C 【解析】本题考查向量共线的条件，考查运算求解能力.

因为 $-2\times(-6)-3\times4=0$，所以向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$ 与向量 $(4,-6)$ 共线.

3. C 【解析】本题考查统计图表的识别，考查读图能力.

由图可知，对于神舟十二号太空之旅，46.6%的受访青少年关注航天员是怎样选的，有将近一半的青少年关注此问题，所以 A 错误. 而 75.3%<0.8，64.6%<0.7，所以 B，D 均错误. 对于神舟十二号太空之旅，很多青少年都特别关注航天员，有 74.4%的受访青少年关注他们在太空的工作和生活，所以 C 正确.

4. B 【解析】本题考查复数的模，考查待定系数法的应用.

设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R},b\neq0)$，因为 $2i\bar{z}=z^2$，所以 $2i(a-bi)=a^2-b^2+2abi$.

则 $2a=2ab$，$a^2-b^2=2b$，又 $b\neq0$，解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=3,\\b=1.\end{cases}$ 故 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

5. D 【解析】本题考查函数的奇偶性，考查逻辑推理能力.

因为 $f(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2x}$，$f(x+1)=\frac{1}{2x+1}$，$g(x+1)=x^2-1$，$g(x-1)=(x-2)^2-1$，

所以 $f(x+\frac{1}{2})$ 为奇函数，$g(x+1)$ 为偶函数，$f(x+1)$ 与 $g(x-1)$ 均为非奇非偶函数.

6. B 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $\tan(\alpha+2\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=2$，所以 $\tan3\beta=\tan[(\alpha+2\beta)-(\alpha-\beta)]=\frac{3-2}{1+3\times2}=\frac{1}{7}$，

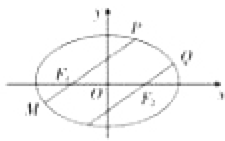
所以 $\tan(\alpha+5\beta)=\tan[(\alpha+2\beta)+3\beta]=\frac{3+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{11}{2}$.

7. A 【解析】本题考查正态分布与二项分布的应用，考查抽象概括能力.

因为 X(单位：克)服从正态分布 $N(400,4)$，所以 $P(X>400)=\frac{1}{2}$.

设 4 袋海藻碘食用盐中质量超过 400 克的袋数为 Y，则 $Y\sim B(4,\frac{1}{2})$，则至少有 2 袋的质量超过 400 克的概率为 $1-P(X=0)-P(X=1)=1-(1-\frac{1}{2})^4-C_4^1(1-\frac{1}{2})^3\times\frac{1}{2}=\frac{11}{16}$.

8. C 【解析】本题考查椭圆的性质，考查直观想象与数学运算的核心素养.



如图，延长 PF_1 交 C 于 M.

根据椭圆的对称性可知 $|QF_2|=|F_1M|$.

则 $|PF_1|+|QF_2|=|PF_1|+|MF_1|=|PM|$.

因为焦点弦 PM 长度的最小值为 $\frac{2b^2}{a}\geq b$，所以 $\frac{b}{a}\geq\frac{1}{2}$，则 $0<e=\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. BCD 【解析】本题考查直线与圆以及等差数列，考查运算求解能力与推理论证能力.

因为直线 $3x+4y+n=0(n\in\mathbf{N}^*)$ 与圆 $C_n:(x-2)^2+y^2=a_n^2(a_n>0)$ 相切，所以 $a_n=\frac{n+6}{5}$，则 $a_1=\frac{7}{5}$，数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{1}{5}$ 的等差数列. 因为 $a_n=\frac{n+6}{5}$，所以 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 $\frac{1}{5}\times\frac{10\times(7+16)}{2}=23$. 又 $a_4=2$，所以当 $n=4$ 时，圆 C 可能经过坐标原点.

10. AC 【解析】本题考查简单几何体的体积的应用，考查运算求解能力与空间想象能力.

棱长为 6 cm 的正四面体的体积 $V_1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\times\sqrt{6^2-(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2}=18\sqrt{2}(\text{cm}^3)$，底面半径为 $\frac{3}{2}$ cm，高为 6 cm 的圆柱的体积 $V_2=\pi\times(\frac{3}{2})^2\times 6=\frac{27\pi}{2}(\text{cm}^3)$，半径为 6 cm 的半球的体积 $V_3=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times 6^3=144\pi(\text{cm}^3)$，因为 $\frac{144\pi}{18\sqrt{2}}\times 2=8\sqrt{2}\pi\approx 35.5$，$\frac{144\pi}{\frac{27\pi}{2}}\times 2=\frac{64}{3}\approx 21.3$，所以这两碗馅料最多可包三角粽 35 个，最多可包竹筒粽 21 个.

11. AD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质，考查推理论证能力与数形结合的数学思想.

因为 $-\frac{\pi}{9}-(-\frac{5\pi}{18})=\frac{1}{2}[\frac{2\pi}{9}-(-\frac{\pi}{9})]=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 在一个周期内的图象不经过点 C，

则 $T=\frac{\pi}{6}\times 4=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=3$. 因为 $f(\frac{2\pi}{9})=1$，所以 $\frac{2\pi}{9}\times 3+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

12. ACD 【解析】本题考查基本初等函数及两数大小的比较，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

设函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)-\ln x$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，

则 $f(x)\geq f(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $f(\frac{3}{4})>0$，

即 $\frac{1}{2}\times(\frac{9}{16}-1)-\ln\frac{3}{4}>0$，即 $\ln\frac{4}{3}>\frac{7}{32}$. 因为 $d=0.4^{2.1}<0.4^2=0.16<0.2<\frac{7}{32}$，

又 $c=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{8}>\frac{1}{2}\ln\frac{16}{9}=\ln\frac{4}{3}=a$，所以 $c>a>b>d$.

13. -56 【解析】本题考查二项式定理，考查运算求解能力.

因为 $(x-y)^8$ 的展开式中 x^3y^5 的系数为 $C_8^3\times(-1)^5=-56$，所以 $y^2(x-y)^8$ 的展开式中 x^3y^7 的系数为 -56.

14. 3 【解析】本题考查双曲线的性质与定义，考查直观想象与数学运算的核心素养.

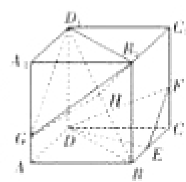
因为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，所以 $\sqrt{\frac{m}{4}}=\sqrt{2}$，解得 $m=8$. 因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a=4$，$|PF_1|=m-1=7$，所以 $|PF_2|=3$.

15. 10 【解析】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力.

因为 $y'=3x^2$，所以曲线 $y=x^3$ 在点 $A(-1,-1)$ 处的切线方程为 $y+1=3(x+1)$，即 $y=3x+2$. 将 $y=3x+2$ 代入 $y=x^3$，得 $x^3-3x-2=x^3-4x+x-2=(x-2)(x+1)^2=0$，

解得 $x=2$ 或 -1，故 $m=2$，$n=8$，$m+n=10$.

16. $\frac{63}{16}$；$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 【解析】本题考查三棱锥的侧面积与线面角，考查直观想象与数学建模的核心素养.



设 $CF=x$，则 $BE=2x$，因为 $0<CF<3$，$0<BE<3$，所以 $0<x<\frac{3}{2}$.

三棱锥 $C-DEF$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(3-2x)\times 3=\frac{1}{4}\times 2x(3-2x)\leq\frac{1}{4}\times(\frac{2x+3-2x}{2})^2=\frac{9}{16}$，当且仅当 $x=\frac{3}{4}$ 时，等号成立，此时三棱锥 $C-DEF$ 的体积取得最大值，其侧面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times(\frac{3}{4}+\frac{3}{2})+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{63}{16}$. 因为 $EF\,/\!/$ 平面 B_1D_1G，

所以易证 $EF\,/\!/\,D_1G$，从而 $\triangle CEF$ 与 $\triangle A_1D_1G$ 相似，因为 $\frac{CF}{CE}=\frac{1}{2}$，所以 G 为棱 AA_1 的中点，取 BD_1 的中点 H，连接 GH，HB_1，可证 $GH\perp$ 平面 BDD_1B_1，所以 B_1G 与平面 BDD_1B_1 所成的角为 $\angle GB_1H$，故

$\tan\angle GB_1H=\frac{GH}{HB_1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

17. 解：(1)因为 $a=4$，$ab\sin A\sin C=c\sin B$，所以 $4b\sin A\sin C=c\sin B$，……………… 1 分

所以 $4bc\sin A=bc$，则 $\sin A=\frac{1}{4}$。……………… 3 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$bc=16$，所以 $16=b^2+c^2\pm32\times\frac{\sqrt{15}}{4}$，……………… 4 分

则 $b^2+c^2=16\pm8\sqrt{15}$，……………… 5 分

又 $b^2+c^2>0$，所以 $b^2+c^2=16+8\sqrt{15}$。……………… 6 分

(2)因为 $B=2A$，所以 $\sin B=\sin 2A$，且 A 为锐角，……………… 7 分

所以 $\sin B=2\sin A\cos A$，……………… 8 分

则 $b=2a\cos A=8\times\frac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{15}$。……………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问若由已知条件先直接得到 $4bc\sin A=bc$，再得到 $\sin A=\frac{1}{4}$，不扣分；若最后得到 $b^2+c^2=16+8\sqrt{15}$，但过程中未体现 $\cos A=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$，要扣 1 分。

【2】若第(2)问最后的结果错误，但得到 $b=2a\cos A$，扣 1 分。

18. 解：(1)依题意得 X 的可能取值为 0，1，2，3，……………… 1 分

$P(X=0)=P(X=2)=\frac{3}{10}=0.3$，……………… 2 分

$P(X=1)=P(X=3)=\frac{2}{10}=0.2$，……………… 3 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.3	0.2	0.3	0.2

……………… 4 分

(2)$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(0+1+0+2+2+3+3+1+2+0)=1.4$，……………… 5 分

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(2+4+1+1+0+2+1+1+0+1)=1.3$，……………… 6 分

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}[3\times(0-1.4)^2+2\times(1-1.4)^2+3\times(2-1.4)^2+2\times(3-1.4)^2]=1.24$，……………… 7 分

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}[2\times(0-1.3)^2+5\times(1-1.3)^2+2\times(2-1.3)^2+(4-1.3)^2]=1.21$，……………… 8 分

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{丙}>\bar{x}_{乙}$，$s_{丙}^2>s_{甲}^2>s_{乙}^2$，……………… 9 分

所以次品数的平均数最小的是乙，稳定性最好的也是乙，稳定性最差的是丙，……………… 10 分

故应淘汰丙机床，乙机床的性能最好。……………… 12 分

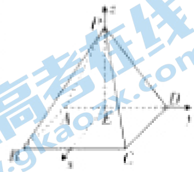
评分细则：

【1】若 X 的分布列正确，但未求每个 X 对应的概率，不扣分。

【2】若未写"次品数的平均数最小的是乙，稳定性最好的也是乙，稳定性最差的是丙"，而直接得出结论"应淘汰丙机床，乙机床的性能最好"，要扣 1 分。

19. (1)证明：因为 $PE\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PE\perp AB$，……………… 1 分

在矩形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，……………… 2 分



因为 $AD \cap PE = E$，所以 $AB \perp$ 平面 PAD. ……………………………… 3 分

因为 $PD \subset$ 平面 PAD，所以 $AB \perp PD$. ……………………………… 4 分

(2)解：以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{ED}$ 的方向为 y 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，则 $P(0,0,3)$，$B(3,-2,0)$，$C(3,3,0)$，$D(0,3,0)$.

$\overrightarrow{BC}=(0,5,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-3,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$. ……………………………… 6 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，即 $\begin{cases}3x+3y-3z=0,\\-3x=0.\end{cases}$ ……………………………… 7 分

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ……………………………… 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，

则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $\begin{cases}3x'+3y'-3z'=0,\\5y'=0.\end{cases}$ ……………………………… 9 分

令 $x'=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. ……………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………… 11 分

由图可知，二面角 $B-PC-D$ 为钝角，所以二面角 $B-PC-D$ 为 $\dfrac{2\pi}{3}$(或 120°). ……………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问未写 $PD \subset$ 平面 PAD，不扣分.

【2】第(2)问解析中得到平面的一个法向量不唯一，只要与参考答案中求得的法向量共线即可得分.

20. 解：(1)因为 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，$a_1=4$，所以 $a_n=n+3$. ……………………………… 2 分

又 $\{a_n+b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，$a_1+b_1=2$，所以 $a_n+b_n=2^n$. ……………………………… 4 分

故 $b_n=2^n-a_n=2^n-n-3$. ……………………………… 5 分

(2)因为 $b_{n+1}-b_n=2^n-1>0$，所以 $\{b_n\}$ 为递增数列. ……………………………… 6 分

又 $b_1=-2$，$b_2=-1$，$b_3=2$，故当 $n\geq3$ 时，恒有 $b_n>0$.

故 $|b_n|=\begin{cases}n+3-2^n, & n<3,\\2^n-n-3, & n\geq3.\end{cases}$ ……………………………… 7 分

记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-(4+5+\cdots+n+3)=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{n(n+7)}{2}=2^{n+1}-\dfrac{n^2+7n+4}{2}$. ……………………………… 9 分

当 $n<3$ 时，$T_n=-S_n=-2^{n+1}+\dfrac{n^2+7n+4}{2}$； ……………………………… 10 分

当 $n\geq3$ 时，$T_n=-b_1-b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n=-S_2+S_n-S_2=S_n-2S_2=2^{n+1}-\dfrac{n^2+7n-8}{2}$. ……………………………… 11 分

综上，$T_n=\begin{cases}-2^{n+1}+\dfrac{n^2+7n+4}{2}, & n<3,\\2^{n+1}-\dfrac{n^2+7n-8}{2}, & n\geq3.\end{cases}$ ……………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问未得到 $a_n+b_n=2^n$，但写了 $a_1+b_1=2$，给 1 分.

【2】第(2)问得到 $T_n=\begin{cases}2, & n=1,\\3, & n=2,\\2^{n+1}-\dfrac{n^2+7n-8}{2}, & n\geq3,\end{cases}$ 不扣分.

21. 解：(1)选①，因为 $a=3$，所以 $f(x)=(x-6)\ln x+3$，则 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{6}{x}$. ……………………………… 1 分

记 $h(x)=\ln x+1-\frac{6}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}>0$，且 $h(2)<0$，$h(3)>0$. ………… 2 分

因此方程 $f'(x)=0$ 有唯一解，不妨设 $f'(x_0)=0$，$2<x_0<3$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. ………… 3 分

所以 $f(x)_{min}=f(x_0)<f(3)=3(1-\ln 3)<0$. ………… 4 分

又因为 $f(1)=f(6)=3>0$， ………… 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 和 $(x_0,6)$ 内各有一个零点，故 $f(x)$ 零点的个数为 2. ………… 6 分

选②，因为 $a=-1$，所以 $f(x)=(x+2)\ln x-1$，则 $f'(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$. ………… 1 分

记 $h(x)=\ln x+1+\frac{2}{x}$，则 $h'(x)=\frac{x-2}{x^2}$，当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$. ………… 2 分

因此 $h(x)_{min}=h(2)=\ln 2+2>0$， ………… 3 分

所以 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………… 4 分

又因为 $f(1)=-1<0$，$f(e)=e+1>0$， ………… 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 内存在唯一零点，故 $f(x)$ 零点的个数为 1. ………… 6 分

(2) 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

设函数 $g(x)=xf(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax$，$x>0$，

则 $g'(x)=(2x-2a)\ln x+x-a=(x-a)(2\ln x+1)$. ………… 7 分

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\sqrt{e}}{e}$，$x_2=a$.

当 $0<a<\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，由 $g'(x)>0$，得 $x\in(0,a)\cup(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty)$；由 $g'(x)<0$，得 $x\in(a,\frac{\sqrt{e}}{e})$. 故 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(\frac{\sqrt{e}}{e},+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,\frac{\sqrt{e}}{e})$ 上单调递减. ………… 9 分

当 $a=\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………… 10 分

当 $a>\frac{\sqrt{e}}{e}$ 时，由 $g'(x)>0$，得 $x\in(0,\frac{\sqrt{e}}{e})\cup(a,+\infty)$；由 $g'(x)<0$，得 $x\in(\frac{\sqrt{e}}{e},a)$. 故 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{e}}{e})$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{\sqrt{e}}{e},a)$ 上单调递减. ………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问若用极限说明 $f(x)$ 两边函数值的正负，而未用具体函数值的正负来说明，扣 1 分.

【2】选①时，除了选用 $f(1)=f(6)=3>0$，还可以使用其他函数值来说明，一个自变量在 $(0,2)$ 内，另一个自变量在 $[4,+\infty)$ 内即可.

【3】选②时，解析中，$f(1)=-1<0$，$f(e)=e+1>0$，这里的选值也不是唯一的，只要说明一个函数值小于 0，另一个函数值大于 0，即可得分.

【4】第(2)问未写令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\sqrt{e}}{e}$，$x_2=a$，其余步骤都正确，不扣分.

【5】第(1)问还可以这样做：选①，由 $f(x)=0$ 得 $\ln x=\frac{3}{6-x}$，结合 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{3}{6-x}$ 的图象及 $\ln 3>1$，可得 $f(x)$ 有 2 个零点；选②，由 $f(x)=0$ 得 $\ln x=\frac{1}{x+2}$，同理可得 $f(x)$ 有 1 个零点.

22. (1) 解：依题意可设 E 的方程为 $y^2=2px(p\neq 0)$， ………… 1 分

联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=x+1, \end{cases}$ 得 $x^2+2(1-p)x+1=0$， ………… 2 分

依题意得 $\Delta=4(1-p)^2-4=0$. …………………………………………………………………… 3 分

解得 $p=2$ 或 $p=0$（舍去），故 E 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………… 4 分

(2)①证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(-1,m)$.

设过点 P 且与 E 相切的直线 l 的斜率为 k，则 $l:y-m=k(x+1)$.

联立 $\begin{cases} y=kx+m+k, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4(m+k)=0$. ………………………………………… 5 分

则 $\Delta_1=16-16(m+k)k=0$.

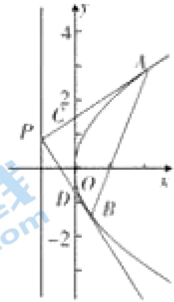
即 $k^2+mk-1=0$. …………………………………………………………………………………… 6 分

由题意知，直线 PA，PB 的斜率 k_1，k_2 为方程 $k^2+mk-1=0$ 的两根，

则 $k_1k_2=-1$，故 $PA\perp PB$. ……………………………………………………………………… 7 分

②解：不妨设 PA 的斜率 $k_1>0$，则 PB 的斜率 $k_2<0$.

设 PA，PB 的倾斜角分别为 θ_1，θ_2，直线 AB 的倾斜角为 θ_0 且斜率为 k_0.



$k_0=\tan\theta_0=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{\frac{1}{4}y_2^2-\frac{1}{4}y_1^2}=\dfrac{4}{y_2+y_1}$. ……………………………… 8 分

由①可知 $2y_1=\dfrac{4}{k_1}$，即 $y_1=\dfrac{2}{k_1}$，同理可得 $y_2=\dfrac{2}{k_2}$.

则 $k_0=\dfrac{2k_1k_2}{k_2+k_1}=\dfrac{-2}{-m}=\dfrac{2}{m}$. …………………………………………………… 9 分

因为 $\tan\angle PCD=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\theta_1)=\dfrac{1}{k_1}$，

$\tan\angle PBA=\tan(\theta_2-\theta_0)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_0}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_0}=\dfrac{k_2-\frac{2}{m}}{1+k_2\cdot\frac{2}{m}}=\dfrac{mk_2-2}{m+2k_2}$. ……………………… 10 分

所以 $\tan\angle PBA-\tan\angle PCD=\dfrac{mk_2-2}{m+2k_2}-\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{m(-1+k_1k_2)-2(k_1+k_2)}{k_1(m+2k_2)}=\dfrac{-2m+2m}{k_1(m+2k_2)}=0$.

则 $\tan\angle PCD=\tan\angle PBA$，从而 $\angle PCD=\angle PBA$. ………………………………………… 11 分

又 $PA\perp PB$，则 $Rt\triangle PCD\backsim Rt\triangle PBA$，所以 $\dfrac{PC}{CD}=\dfrac{PB}{BA}$，故 $\dfrac{|PC|\cdot|AB|}{|PB|\cdot|CD|}=1$ 为定值. ………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问解析第一行写为"设 E 的方程为 $y^2=2px(p>0)$"，不扣分.

【2】第(2)问若只是得到结论 $\dfrac{|PC|\cdot|AB|}{|PB|\cdot|CD|}$ 为定值，而没有过程，给 1 分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。