秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2021年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数　学

2021.03.16

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上，并在答题卡相应位置上填涂考生号。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合 $A=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，则 $\complement_{\mathrm{R}}A=$

A．$\{x|-2<x<1\}$　　B．$\{x|-1<x<2\}$

C．$\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1\}$　　D．$\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$

3．2020年11月10日，我国“奋斗者”号载人深潜器在马里亚纳海沟成功坐底，下潜深度达到惊人的10909m，创造了我国载人深潜的新记录．当“奋斗者”号下潜至某一深度时，处于其正上方海面处的科考船用声呐装置向“奋斗者”号发射声波．已知声波在海水中传播的平均速度约为1450m/s，若从发出至回收到声波所用时间为6s，则“奋斗者”号的实际下潜深度约为

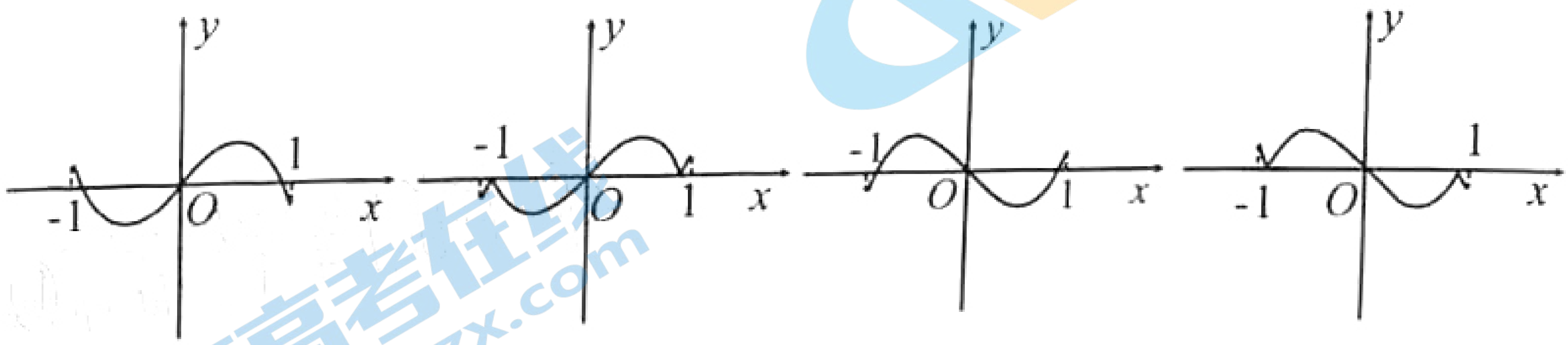
A．2900m　　B．4350m　　C．5800m　　D．8700m

4. $a>b+1$是$2^a>2^b$的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

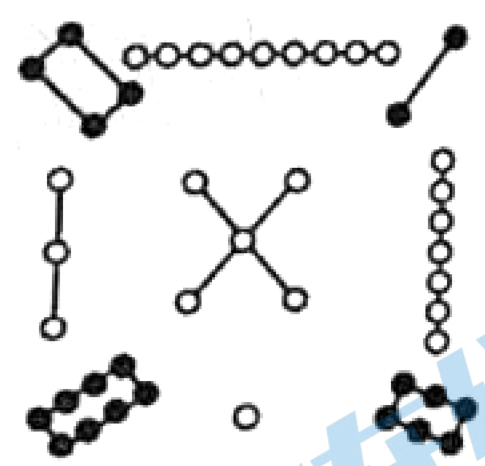
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 函数$f(x)=x^3-\sin x$在$[-1,\ 1]$上的图像大致为



A.　　B.　　C.　　D.

6. 如图，洛书（古称龟书），是阴阳五行术数之源．在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图像，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数．若从四个阴数和五个阳数中随机选取3个数，则选取的3个数之和为奇数的方法数为



A. 30　　B. 40　　C. 44　　D. 70

7. 已知$A(-1,0)$，$B(0,2)$，直线$l:2x-2ay+3+a=0$上存在点P，满足$|PA|+|PB|=\sqrt{5}$，则l的倾斜角的取值范围是

A. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

8. 已知$e\approx2.71828$是自然对数的底数，设$a=\sqrt{3}-\frac{3}{e}$，$b=\sqrt{2}-\frac{2}{e}$，$c=e^{\sqrt{2}-1}-\ln 2$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知点 O 为坐标原点，直线 $y=x-1$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，则

A．$|AB|=8$

B．$OA\perp OB$

C．$\triangle AOB$ 的面积为 $2\sqrt{2}$

D．线段 AB 的中点到直线 $x=0$ 的距离为2

10．已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x$，则

A．$f(x)$ 的最大值为3

B．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C．$f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},1\right)$ 对称

D．$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为4，EF 是棱 AB 上的一条线段，且 $EF=1$，点 Q 是棱 A_1D_1 的中点，点 P 是棱 C_1D_1 上的动点，则下面结论中正确的是

A．PQ 与 EF 一定不垂直

B．二面角 $P-EF-Q$ 的正弦值是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C．$\triangle PEF$ 的面积是 $2\sqrt{2}$

D．点 P 到平面 QEF 的距离是常量

12．在数学课堂上，教师引导学生构造新数列：在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列．将数列1，2进行构造，第1次得到数列1，3，2；第2次得到数列1，4，3，5，2；…；第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次得到数列1，x_1，x_2，x_3，…，x_k，2；…．记 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_k+2$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 S_n，则

A．$k+1=2^n$

B．$a_{n+1}=3a_n-3$

C．$a_n=\frac{3}{2}(n^2+3n)$

D．$S_n=\frac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7$，则 $m=$________.

14. 某车间为了提高工作效率，需要测试加工零件所花费的时间，为此进行了 5 次试验，这 5 次试验的数据如下表：

零件数 x（个）	10	20	30	40	50
加工时间 y（min）	62	a	75	81	89

若用最小二乘法求得回归直线方程为 $\hat{y}=0.67x+54.9$，则 a 的值为________.

15. 已知圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线相交于四个点，按顺时针排列依次记为 M，N，P，Q，且 $|MN|=2|PQ|$，则 C 的离心率为________.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是边长为6的等边三角形，$PA=PB=PC=\sqrt{21}$，先在三棱锥 $P-ABC$ 内放入一个内切球 O_1，然后再放入一个球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1 及三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面都相切，则球 O_1 的体积为________，球 O_2 的表面积为________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知△ABC的内角 A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=3$，$\cos 2B=\cos(A+C)$，$a\sin A+c\sin C=6\sin B$.

（1）求 B；

（2）求△ABC 的周长.

18．(12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d \neq 0$，a_2是a_1，a_5的等比中项，$S_5 = 25$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n + b_{n+1} = S_n$，求$b_2 - b_{20}$．

19．(12 分)

在边长为 2 的菱形$ABCD$中，$\angle BAD = 60^\circ$，点E是边AB的中点(如图1)，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，连接A_1B，A_1C，得到四棱锥$A_1 - BCDE$（如图2）．

（1）证明：平面$A_1BE \perp$平面$BCDE$；

（2）若$A_1E \perp BE$，连接CE，求直线CE与平面A_1CD所成角的正弦值．

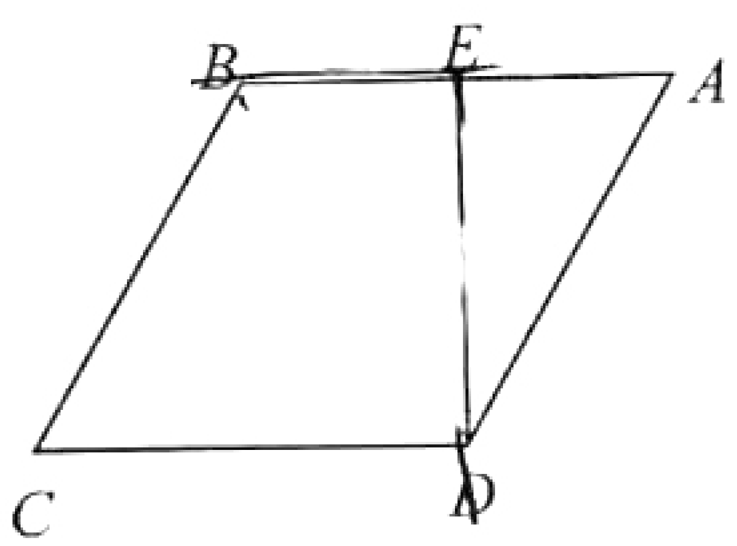


图1

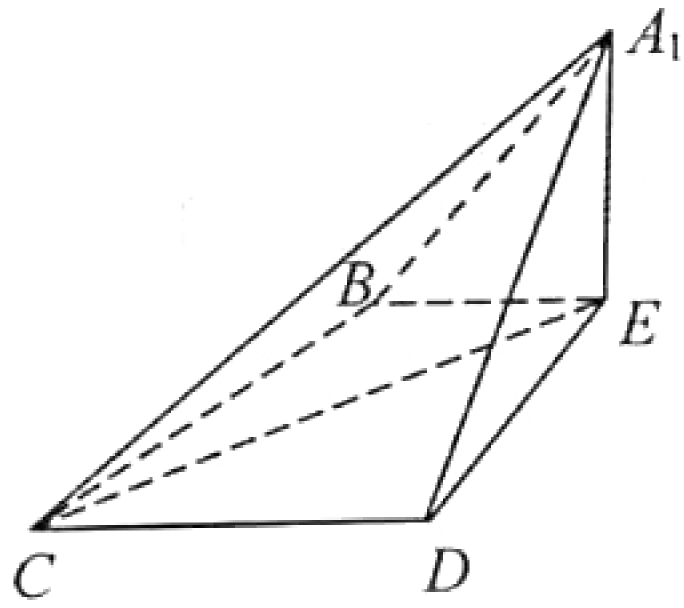


图2

20．(12 分)

某中学举行篮球趣味投篮比赛，比赛规则如下：每位选手各投 5 个球，每一个球可以选择在A区投篮也可以选择在B区投篮，在A区每投进一球得 2 分，投不进球得 0 分；在B区每投进一球得 3 分，投不进球得 0 分，得分高的选手胜出．已知参赛选手甲在A区和B区每次投篮进球的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$，且各次投篮的结果互不影响．

（1）若甲投篮得分的期望值不低于 7 分，则甲选择在A区投篮的球数最多是多少个？

（2）若甲在A区投 3 个球且在B区投 2 个球，求甲在A区投篮得分高于在B区投篮得分的概率．

21. （12 分）

已知点 $A(1,0)$，点 B 是圆 O_1：$(x+1)^2+y^2=16$ 上的动点，线段 AB 的垂直平分线与 BO_1 相交于点 C，点 C 的轨迹为曲线 E.

（1）求 E 的方程；

（2）过点 O_1 作倾斜角互补的两条直线 l_1，l_2，若直线 l_1 与曲线 E 交于 M，N 两点，直线 l_2 与圆 O_1 交于 P，Q 两点，当 M，N，P，Q 四点构成四边形，且四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ 时，求直线 l_1 的方程.

22. （12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）证明：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 恒过定点；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_2>2x_1$，证明：$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\frac{4}{\mathrm{e}}$.

2021广州市一模数学小题答案

单选题	1	2	3	4
	A	C	B	A
	5	6	7	8
	C	B	D	A
多选题	9	10	11	12
	AC	BC	BCD	ABD
填空题	13	-1		
	14	68		
	15	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$		
	16	$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{4}{9}\pi$		

2021 年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数 $z=\dfrac{2-i}{1-i}$ 在复平面内对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【答案】A

2．已知集合 $A=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，则 $\complement_{R}A=$

A．$\{x|-2<x<1\}$　　B．$\{x|-1<x<2\}$

C．$\{x|x\leq-2或x\geq1\}$　　D．$\{x|x\leq-1或x\geq2\}$

【答案】C

3．2020 年 11 月 10 日，我国“奋斗者”号载人深潜器在马里亚纳海沟成功坐底，下潜深度达到惊人的10909m，创造了我国载人深潜的新纪录.当“奋斗者”号下潜至某一深度时，处于其正上方海面处的科考船用声呐装置向“奋斗者”号发射声波.已知声波在海水中传播的平均速度约为1450m/s，若从发出至回收到声波所用时间为6s，则“奋斗者”号的实际下潜深度约为

A．2900m　　B．4350m　　C．5800m　　D．8700m

【答案】B

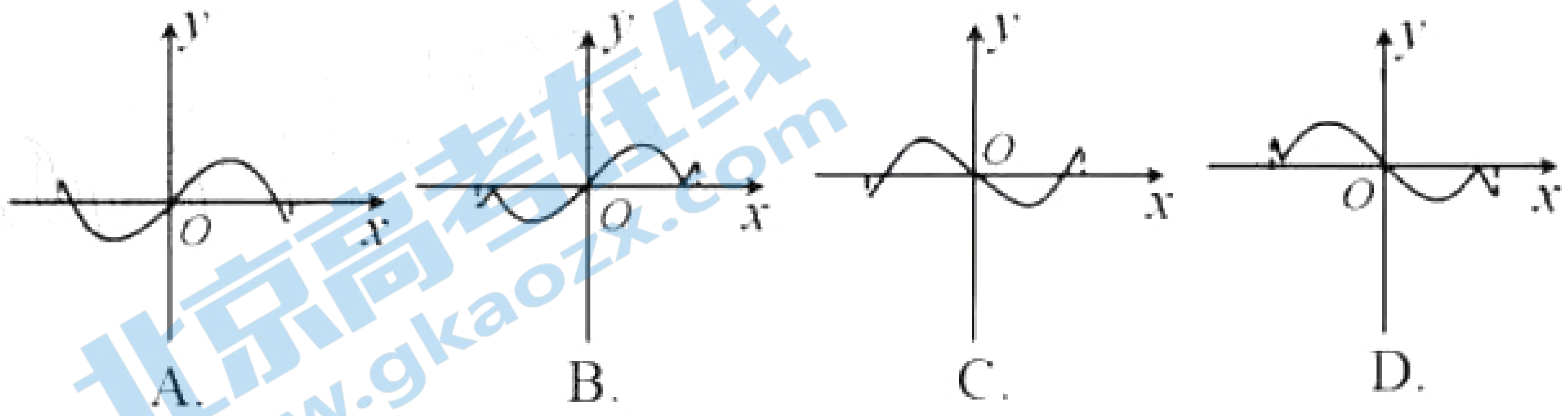
4．$a>b+1$是$2^a>2^b$的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

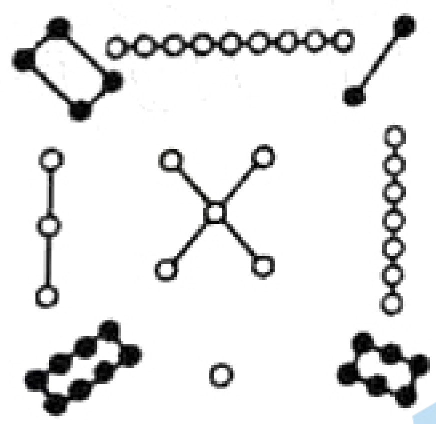
【答案】A

5．函数$f(x)=x^3-\sin x$在$[-1,1]$上的图像大致为



【答案】C

6．如图，洛书（古称龟书），是阴阳五行术数之源.在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图像，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数.若从四个阴数和五个阳数中随机选取3个数，则选取的3个数之和为奇数的方法数为



A．30　　B．40　　C．44　　D．70

【答案】B

7．已知$A(-1,0)$，$B(0,2)$，直线$l:2x-2ay+3+a=0$上存在点P，满足$|PA|+|PB|=\sqrt{5}$，则l的倾斜角的取值范围是

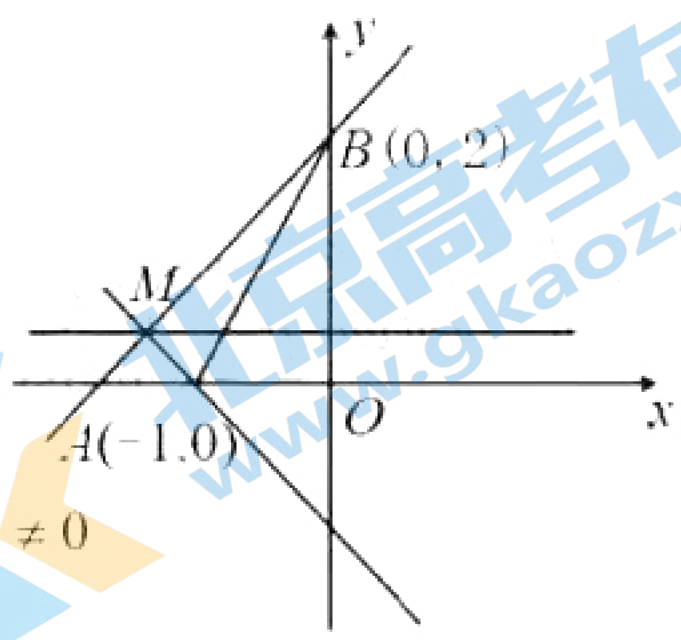
A．$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

C．$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D．$\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

【答案】D

【解析】直线$2x-2ay+3+a=0$，过定点$M\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

$|PA|+|PB|=\sqrt{5}=AB$ ，$\therefore P$ 在线段 AB 上，



$k_{MA}=-1$ ，$k_{MB}=1$ ，$\therefore$ 直线 l 斜率的取值范围 $[-1,1]$

设倾斜角为 α ，$\tan\alpha\in[-1,1]$ ，则 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

又 $\because l:2x-2ay+3+a=0$ ，不能表示斜率为 0 的直线，$\therefore\alpha\neq0$

$\therefore\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4}\pi,\pi\right)$ ，选 D.

8．已知 $e\approx2.71828$ 是自然对数的底数，设 $a=\sqrt{3}-\dfrac{3}{e}$ ，$b=\sqrt{2}-\dfrac{2}{e}$ ，$c=e^{\sqrt{2}-1}-\ln2$ ，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

【答案】A

【解析】令 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{x}{e}$ ，$x\in[2,3]$ ，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-2\sqrt{x}}{2e\sqrt{x}}<0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $[2,3]\searrow$ ，$f(2)>f(3)$ ，$\therefore b>a$

$g(x)=e^x-(x+1)$ ，$g'(x)=e^x-1=0$ ，$x=0$

$g(x)$ 在 $(-\infty,0)\searrow$ ，$(0,+\infty)\nearrow$ ，$g(x)_{min}=g(0)=0$ ，

$\therefore e^x\geq x+1$ 且 $x=0$ 时取“=”，$e^{\sqrt{2}-1}>\sqrt{2}$ ①

$h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ，$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$ ，$x=e$ ，$h(x)$ 在 $(0,e)\nearrow$ ，$(e,+\infty)\searrow$

$\therefore h(x)\leq h(e)=\dfrac{1}{e}$ ，$\therefore\dfrac{\ln2}{2}<\dfrac{1}{e}$ ，$\therefore\dfrac{2}{e}>\ln2$ ，即 $-\ln2>-\dfrac{2}{e}$ ②

由①②可知 $e^{\sqrt{2}-1}-\ln2>\sqrt{2}-\dfrac{2}{e}$ ，即 $c>b$ ，

$\therefore c>b>a$ ，选 A.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知点 O 为坐标原点，直线 $y=x-1$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点，则

A．$|AB|=8$　　B．$OA\perp OB$

C．$\triangle AOB$的面积为$2\sqrt{2}$　　D．线段AB的中点到直线$x=0$的距离为2

【答案】 AC

10．已知函数$f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x$，则

A．$f(x)$的最大值为3　　B．$f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{8}$对称

C．$f(x)$的图像关于点$\left(-\dfrac{\pi}{8},1\right)$对称　　D．$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调递增

【答案】 BC

11．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，EF是棱AB上的一条线段，且$EF=1$，点Q是棱A_1D_1的中点，点P是棱C_1D_1上的动点，则下面结论中正确的是

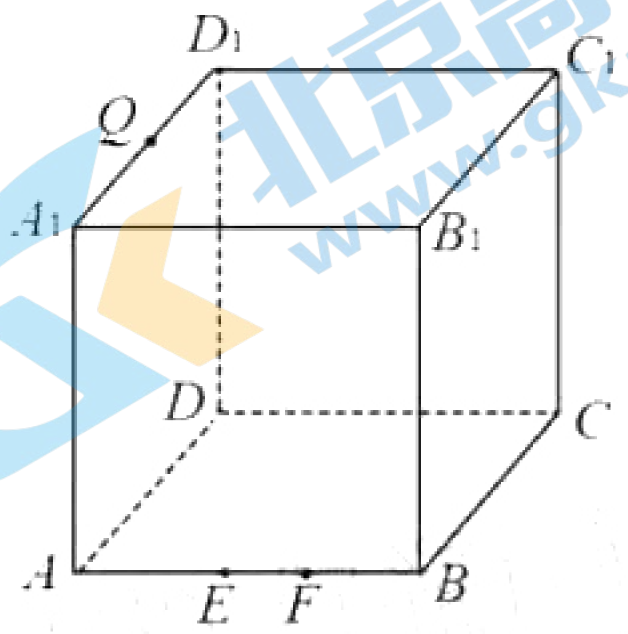
A．PQ与EF一定不垂直　　B．二面角$P-EF-Q$的正弦值是$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

C．$\triangle PEF$的面积是$2\sqrt{2}$　　D．点P到平面QEF的距离是常量

【答案】 BCD

【解析】 当P与D_1重合时，$PQ\perp$平面ABB_1A_1，$EF\subset$平面ABB_1A_1，

$\therefore PQ\perp EF$，A错；



以D为坐标原点建系，

设$E(4,t,0)$，$F(4,t+1,0)$，$P(0,n,4)$，$Q(2,0,4)$

设平面PEF的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}，\therefore\begin{cases}y_1=0\\ -4x_1+(n-t)y_1+4z_1=0\end{cases}$$

不妨设$x_1=1$，则$z_1=1$，$y_1=0$，$\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$

设平面QEF的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{QE}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}y_2=0\\ 2x_2+y_2-4z_2=0\end{cases}$

不妨设 $z_2=1$，则 $x_2=2$，$y_2=0$，$\overrightarrow{n_2}=(2,0,1)$

设二面角 $P-EF-Q$ 为 α，则 $\cos\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，B 对；

P 到 EF 的距离 $d=4\sqrt{2}$，$S_{\triangle PEF}=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot1=2\sqrt{2}$，C 对；

平面 PEF 就是平面 ABC_1D_1，Q 到平面 PEF 的距离是 $\dfrac{1}{2}A_1D=2\sqrt{2}$

$V_{Q-PEF}=\dfrac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=8$

又 $\because Q$ 到 AB 的距离为定值，$\therefore S_{\triangle QEF}$ 为定值

设 P 到平面 QEF 的距离为 h，$\therefore 8=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle QEF}h$，

$\therefore h$ 为定值，D 对；

选 BCD.

12．在数学课堂上，教师引导学生构造新数列：在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列.将数列 1，2 进行构造，第 1 次得到数列 1，3，2；第 2 次得到数列 1，4，3，5，2，…；第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次得到数列 1，x_1，x_2，x_3，…，x_k，2；…记 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_k+2$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

A．$k+1=2^n$　　　　B．$a_{n+1}=3a_n-3$

C．$a_n=\dfrac{3}{2}(n^2+3n)$　　　　D．$S_n=\dfrac{3}{4}(3^{n+1}+2n-3)$

【答案】ABD

【解析】第 1 次构造有 $2+1$ 个数，此时 $k=1=2-1$

第 2 次构造有 $4+1$ 个数，此时 $k=3=4-1$

第 3 次构造有 $8+1$ 个数，此时 $k=7=8-1$

……

第 n 次构造有 2^n+1 个数，此时 $k=2^n-1$

$\therefore k+1=2^n$，A 对；

$a_{n+1}=1+(x_1+1)+x_1+(x_1+x_2)+x_2+(x_2+x_3)+\cdots+(x_{k-1}+x_k)+x_k+(x_k+2)+2$

$=1+x_1+x_2+\cdots+2+(x_1+1+x_1+x_2+x_2+x_3+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_k+2)$

$=a_n+(2x_1+2x_2+\cdots+2x_k+3)=a_n+2(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+2)-3$

$=a_n+2a_n-3=3a_n-3$，B 对；

$a_1=6$，$\because a_{n+1}=3a_n-3$，$\therefore a_{n+1}-\frac{3}{2}=3\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$，$a_1-\frac{3}{2}\neq 0$，

$\therefore \dfrac{a_{n+1}-\frac{3}{2}}{a_n-\frac{3}{2}}=3$，$\therefore \left\{a_n-\frac{3}{2}\right\}$ 是 3 为公比的等比数列，

$\therefore a_n-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}$，$a_n=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}+\frac{3}{2}$，C 错；

$S_n=\frac{9}{2}\cdot\frac{1-3^n}{1-3}+\frac{3}{2}n=\frac{9}{4}(3^n-1)+\frac{3}{2}n=\frac{3}{4}(3^{n+1}-3)+\frac{3}{2}n=\frac{3}{4}\left[3^{n+1}+2n-3\right]$，D 对；

故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．设向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7$，则 $m=$________.

【答案】-1

14．某车间为了提高工作效率，需要测试加工零件所花费的时间，为此进行了 5 次试验，这 5 次试验的数据如下表：

零件数 x（个）	10	20	30	40	50
加工时间 y(min)	62	a	75	81	89

若用最小二乘法求得回归直线方程为 $\hat{y}=0.67x+54.9$，则 a 的值为________.

【答案】68

15．已知圆$(x-1)^2+y^2=4$与双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两条渐近线相交于四个点，按顺时针排列依次记为$M,N,P,Q$，且$|MN|=2|PQ|$，则$C$的离心率为________.

【答案】$e=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【解析】$|MN|=2|PQ|$

令$M(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则$x_1=-2x_2$或$x_2=-2x_1$，

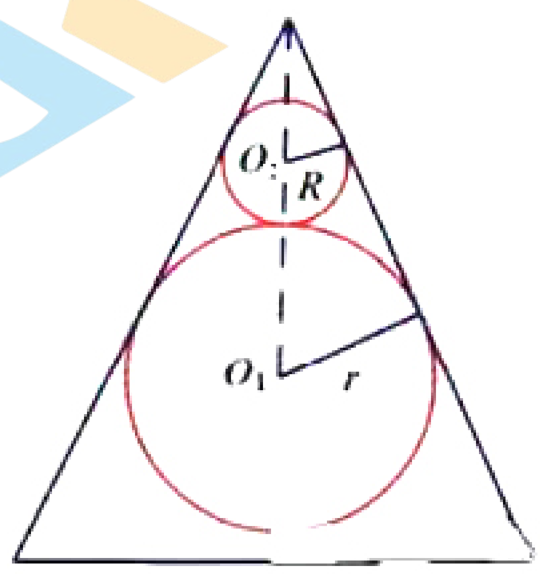
不妨设$x_2=-2x_1$，$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ (x-1)^2+y^2=4 \end{cases}$，消$y$可得$\frac{1}{e^2}x^2-2x-3=0$

$\begin{cases} x_1+x_2=2e^2 \\ x_1x_2=-3e^2 \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$，解得$e=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

16．已知三棱锥$P-ABC$的底面ABC是边长为6的等边三角形，$PA=PB=PC=\sqrt{21}$，先在三棱锥$P-ABC$内放入一个内切球O_1，然后再放入一个球O_2，使得球O_2与球O_1及三棱锥$P-ABC$的三个侧面都想切，则球O_1的体积为________，球O_2的表面积为________.（第一空2分，第二空3分）

【答案】$\frac{4}{3}\pi$；$\frac{4}{9}\pi$

【解析】$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$，



P到平面ABC的距离$d=\sqrt{21-(2\sqrt{3})^2}=3$

$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot9\sqrt{3}\cdot3=9\sqrt{3}$，

$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot6=6\sqrt{3}$

设球O_1的半径为r，$\therefore 9\sqrt{3}=\frac{1}{3}(18\sqrt{3}+9\sqrt{3})r$

$\therefore r=1$，$\therefore V_1=\frac{4}{3}\pi$

设球O_2的半径为R，则$\frac{R}{2-1-R}=\frac{1}{3}$，$\therefore R=\frac{1}{3}$

$\therefore$球O_2的表面积：$V=\frac{4}{9}\pi$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$b=3$，$\cos 2B=\cos(A+C)$，$a\sin A+c\sin C=6\sin B$.

（1）求B；

（2）求$\triangle ABC$的周长.

【解析】

（1）$\cos 2B=\cos(A+C)$，$\therefore 2\cos^2 B-1=-\cos B$，$\therefore \cos B=-1$（舍）或$\frac{1}{2}$

$B\in(0,\pi)$，$B=\frac{\pi}{3}$.

（2）$a\sin A+c\sin C=6\sin B$，$\therefore a^2+c^2=6b=18$，①

又$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\therefore 9=18-ac$，$\therefore ac=9$②

由①②解得$a=c=3$，$\therefore\triangle ABC$周长为9.

18（12分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d\neq 0$，a_2是a_1,a_5的等比中项，$S_5=25$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n+b_{n+1}=S_n$，求b_2-b_{20}.

【解析】

（1）$\because a_2$是a_1,a_5的等比中项，

$\therefore a_2^2=a_1a_5$，$\therefore(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

$\therefore d^2=2a_1d$，又$\because d\neq 0$，$d=2a_1$①

$S_5=5a_1+10d=25$②

由①②解得$a_1=1$，$d=2$，$a_n=2n-1$，$S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

（2）$b_n+b_{n+1}=n^2$，$n\geq 2$时，$b_{n-1}+b_n=(n-1)^2$

$\therefore b_{n+1}-b_{n-1}=2n-1$，$\therefore\begin{cases}b_4-b_2=2\times 3-1\\ b_6-b_4=2\times 5-1\\ \vdots \\ b_{20}-b_{18}=2\times 19-1\end{cases}$

$\therefore b_{20}-b_2=\dfrac{9(5+37)}{2}=189$，$\therefore b_2-b_{20}=-189$.

19.（12分）在边长为2的菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60^\circ$，点E是边AB的中点（如图1），将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，连接A_1B、A_1C，得到四棱锥A_1-BCDE（如图2）.

（1）证明：平面$A_1BE\perp$平面$BCDE$；

（2）若$A_1E\perp BE$，连接CE，求直线CE与平面A_1CD所成角的正弦值.

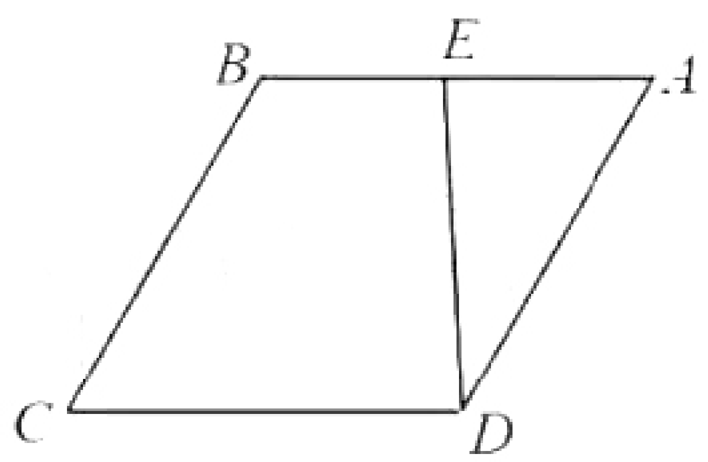


图1

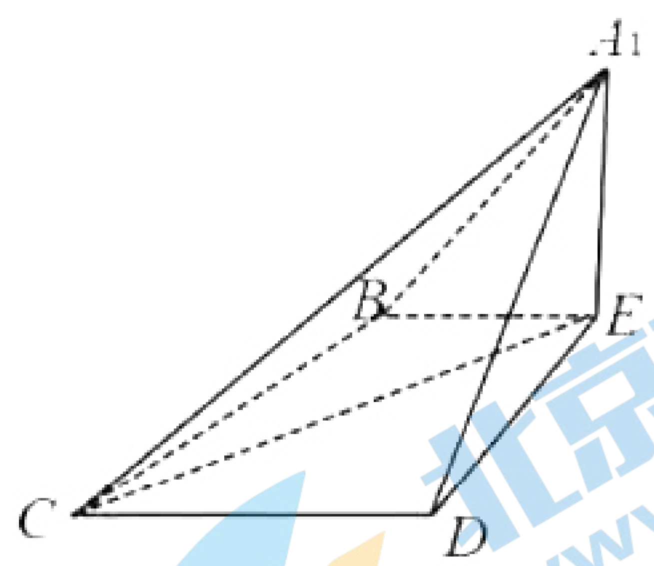


图2

【解析】

法一：

（1）证明：连接BD.

$\because ABCD$为菱形，$\therefore AB=AD$.

又$\because\angle BAD=60^\circ$，$\therefore\triangle ABD$为正三角形.

$\because E$为AB中点，$\therefore DE\perp AB$，

$\therefore DE \perp BE$，$DE \perp A_1E$，$BE \cap A_1E = E$，$BE、A_1E \subset$ 平面 A_1BE

$\therefore DE \perp$ 平面 A_1BE，又$\because DE \subset$ 平面 $BCDE$，

$\therefore$ 平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$.

（2）$\because A_1E \perp BE$，$\therefore EB、ED、EA_1$ 两两垂直，

以 E 为坐标原点，分别以 $EB、ED、EA_1$ 分别为 $x、y、z$ 轴建立直角坐标系 $E-xyz$.

$\because$ 菱形的边长为 2，$\therefore DE = \sqrt{3}$，$\therefore D(0,\sqrt{3},0)$

$\because AE = 1$，$\therefore A_1(0,0,1)$，$CD = 2$，$\therefore C(2,\sqrt{3},0)$

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$

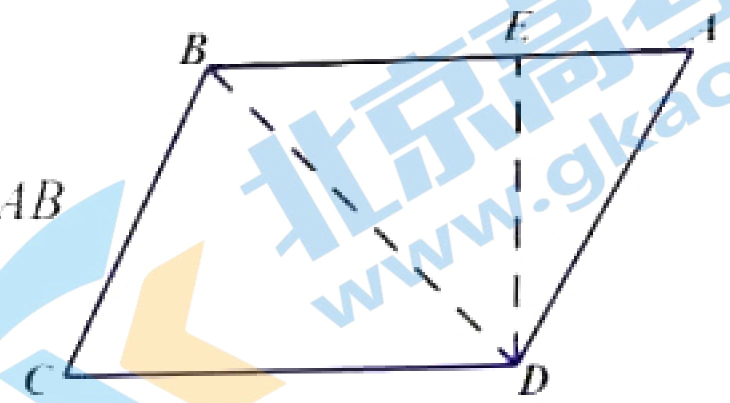
$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{A_1D} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 0 \\ \sqrt{3}y - z = 0 \end{cases}$$

不妨设 $y = 1$，则 $z = \sqrt{3}$，$x = 0$，$\vec{n} = (0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CE} = (-2,-\sqrt{3},0)$

设 CE 与平面 A_1CD 所成角为 α，

$$\sin\alpha = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{CE},\vec{n} \right\rangle\right| = \frac{\left|\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times 2} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

法二：



（1）连接 BD，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AB = AD$

又$\because \angle BAD = 60^\circ$，$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，$\therefore DE \perp AB$

$\therefore DE \perp BE$，$DE \perp A_1E$，又$\because BE \cap A_1E = E$，

$\therefore DE \perp$ 平面 A_1BE

$\because DE \subset$ 平面 $BCDE$，$\therefore$ 平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$.

（2）$\because A_1E \perp BE$，$A_1E \perp DE$，$BE \cap DE = E$，$\therefore A_1E \perp$ 平面 $BCDE$

$\because DE = \sqrt{3}$，$CD = 2$，$\therefore CE = \sqrt{7}$，$A_1D = AD = 2$，$CD = 2$

$CD \perp A_1D$，$\therefore S_{\triangle A_1CD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

设 E 到平面 A_1CD 的距离为 h，CE 与平面 A_1CD 所成角为 θ，

$\therefore \sin\theta = \dfrac{h}{CE} = \dfrac{h}{\sqrt{7}}$，由$V_{E-A_1CD} = V_{A_1-CDE}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1CD} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\times\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

20．（12 分）某中学举行篮球趣味投篮比赛，比赛规则如下：每位选手各投 5 个球，每一个球可以选择在 A 区投篮也可以选择在 B 区投篮，在 A 区每投进一球得 2 分，投不进球得 0 分；在 B 区每投进一球得 3 分，投不进球得 0 分，得分高的选手胜出.已知参赛选手甲在 A 区和 B 区每次投篮进球的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$，且各次投篮的结果互不影响.

（1）若甲投篮得分的期望值不低于 7 分，则甲选择在 A 区投篮的球数最多是多少个？

（2）若甲在 A 区投 3 个球且在 B 区投 2 个球，求甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分的概率.

法　：

（1）在 A 区投 n 次，在 B 区投 $5-n$ 次，

在 A 区得分 X 可取 $0,2,\cdots,2n$

$P(X=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$，$P(X=2)=C_{n}^{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$P(X=2n)=C_{n}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

则 $EX=0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+2\cdot C_{n}^{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots+2n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

在 B 区得分 Y 可取 $0,3,\cdots,3(5-n)$

$P(Y=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$，$P(Y=3)=C_{5-n}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$，$P(Y=3(5-n))=\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$

$EY=0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}+3\cdot C_{5-n}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}+\cdots+3(5-n)\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$，甲得分 $X+Y$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

当 $n=2$ 时

$E(X)+E(Y)=C_{2}^{1}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\times 4+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times 0+C_{3}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times 3+C_{3}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times 6$

$+C_{3}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times 9=\frac{43}{6}>7$ 满足

当 $n=3$ 时 $E(X)+E(Y)=\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times 0+C_{3}^{1}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times 2+C_{3}^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\frac{1}{3}\times 4+\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\times 6$

$+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times 0+C_{2}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times 3+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\times 6=7$ 满足

当 $n=4$ 时 $E(X)+E(Y)=\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\times 0+C_{4}^{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times 2+C_{4}^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times 4$

$+C_{4}^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\frac{1}{3}\times 6+C_{4}^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\times 8+\left(\frac{1}{2}\right)\times 0+\left(\frac{1}{2}\right)\times 3=\frac{41}{6}<7$ 不满足

$\therefore$ 甲选择在 A 区投篮的球数最多是 3 个.

（2）甲在 A 区投篮得分高于 B 区投篮得分有以下结果

① A 区域 2 分，B 区域 0 分，此时概率为 $P_1=\mathrm{C}_3^1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

② A 区域 4 分，B 区域 0 或 3 分，此时概率为 $P_2=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

③ A 区域 6 分，B 区域 0 或 3 分，此时概率为 $P_3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

记"甲在 A 区投篮得分高于在 B 区投篮得分"为 A

$$P(A)=P_1+P_2+P_3=\mathrm{C}_3^1\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\mathrm{C}_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{11}{18}.$$

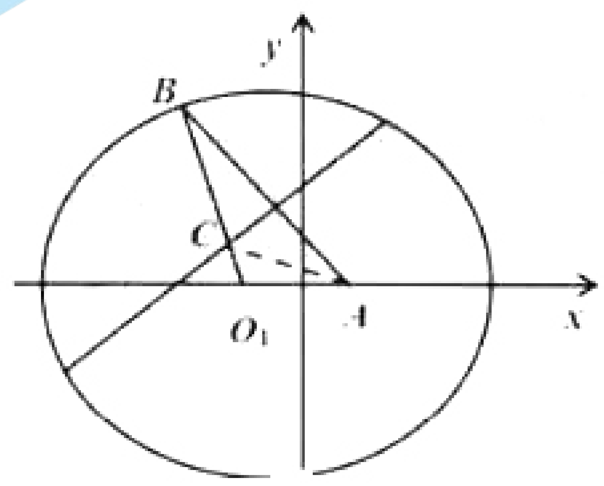
21．（12 分）已知点 $A(1,0)$，点 B 是圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=16$ 上的动点，线段 AB 的垂直平分线与 BO_1 相交于点 C，点 C 的轨迹为曲线 E.

（1）求 E 的方程；

（2）过点 O_1 作倾斜角互补的两条直线 l_1,l_2，若直线 l_1 与曲线 E 交于 M、N 两点，直线 l_2 与圆 O_1 交于 P,Q 两点，当 M、N、P、Q 四点构成四边形，且四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ 时，求直线 l_1 的方程.

【解析】

法一：



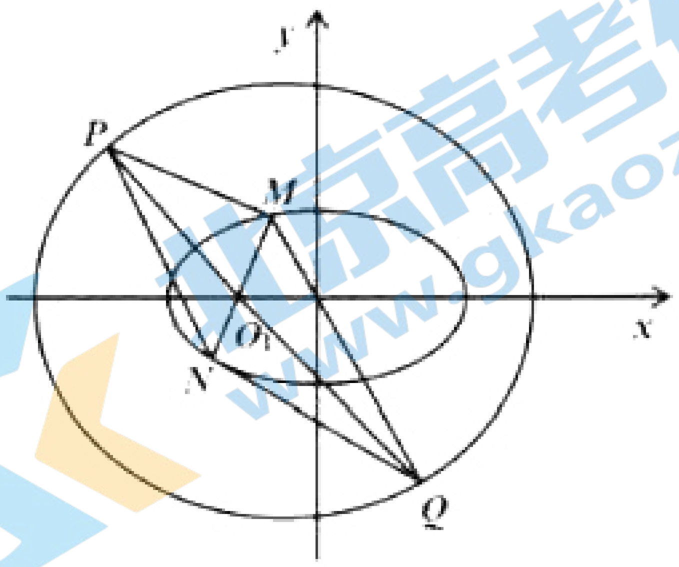
（1）$\because$ AB 的垂直平分线与 BO_1 相交于点 C，$\therefore CA=CB$，

故 $O_1B=CO_1+BC=CO_1+CA=4>O_1A$，

$\therefore$ C 的轨迹为椭圆，且 $2a=4$，$a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{3}$

椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线l_1的方程为$y=k(x+1)$



$$\begin{cases}y=k(x+1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$$

$$\Delta=64k^4-(12+16k^2)(4k^2-12)=144(k^2+1)$$

$$\therefore MN=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}=\frac{12(k^2+1)}{3+4k^2},$$

$$\sin\angle PO_1M=|\sin 2\theta|=\left|\frac{2k}{1+k^2}\right|$$

$$\therefore S_{四边形MNPQ}=\frac{1}{2}MN\cdot PQ\sin\angle PO_1M=\frac{1}{2}\cdot\frac{12(k^2+1)}{3+4k^2}\cdot 8\cdot\frac{|2k|}{1+k^2}$$

$$=\left|\frac{96k}{3+4k^2}\right|=8\sqrt{3}\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$直线l_1的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$.

法二：

（1）C在AB的垂直平分线上，$\therefore CA=CB$，

$\therefore CA+CO_1=CB+CO_1=BO_1=4$，

$\therefore C$在O_1、A为焦点的椭圆上，$2a=4$，$a=2$，$c=1$，$\therefore b^2=3$，

$\therefore$曲线E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设$MN:y=k(x+1)$，即$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

$$\begin{cases}kx-y+k=0\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=0\end{cases}$$，消y可得$(4k^2+3)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{4k^2+3}\\x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$$

$PQ:y=-k(x+1)$，即$kx+y+k=0$

设 M 到 PQ 距离为 d_1，N 到 PQ 距离为 d_2，$PQ=2r=8$

$S_{MPNQ}=\frac{1}{2}d_1\cdot 8+\frac{1}{2}d_2\cdot 8=8\sqrt{3}$，$\therefore d_1+d_2=2\sqrt{3}$

$d_1=\frac{|kx_1+y_1+k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_2=\frac{|kx_2+y_2+k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\because M$、N 在 l_2 的异侧，则 $(kx_1+y_1+k)(kx_2+y_2+k)<0$

$$\therefore d_1+d_2=\frac{|k(x_1-x_2)+y_1-y_2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|2k||x_1-x_2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|2k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$=\frac{2|k|\sqrt{\left(\frac{-8k^2}{4k^2+3}\right)^2-\frac{16k^2-48}{4k^2+3}}}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{3}$$

$\therefore k^2=\frac{3}{4}$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore l_1: y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$.

22．（12 分）已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbf{R})$.

（1）证明：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 恒过定点；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_2>2x_1$，证明：$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\frac{4}{e}$.

【解析】

（1）切点 $(1,1-a)$，$f'(x)=\ln x+1-2ax+1=\ln x-2ax+2$，$k=f'(1)=2-2a$

$f(x)$ 在 $(1,1-a)$ 处的切线方程为 $y=(2-2a)(x-1)+1-a=(2-2a)x-1+a$

$y=a(1-2x)+2x-1$ 恒过定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

（2）$\because f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，

$\therefore x\ln x-ax^2+x=0$ 即 $\ln x-ax+1=0$ 的两根分别为 x_1,x_2

$$\therefore 0=\frac{\ln x_1+1}{x_1}=\frac{\ln x_2+1}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{2+\ln x_1+\ln x_2}{x_1+x_2}=\frac{2+\ln x_1x_2}{x_1+x_2}$$

$\therefore 2+\ln x_1x_2=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}\cdot(x_1+x_2)=\dfrac{\dfrac{x_1}{x_2}+1}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t$，$\therefore t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore 2+\ln x_1x_2=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t$，令 $g(t)=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t$，$g'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$

令 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，$h'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{t^2-2t+1}{t^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}\geq 0$

$\therefore h(t)$ 在 $(0,1)$ 上↗，$\therefore h(t)<h(1)=0$，

$\therefore$ 当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h(t)<0$，$g'(t)<0, g(t)$↘

$\therefore g(t)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\ln 2\Rightarrow 2+\ln x_1x_2>3\ln 2\Rightarrow x_1x_2>\dfrac{8}{e^2}$

$\therefore \sqrt{x_1^2+x_2^2}>\sqrt{2x_1x_2}>\sqrt{\dfrac{16}{e^2}}=\dfrac{4}{e}$，证毕！

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多