高三下学期 2 月份阶段性质量检测

高三数学

2023.2

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(1,-1)$，则 $i\cdot\bar{z}=$（　）

A. $1+i$　　B. $-1-i$　　C. $1-i$　　D. $-1+i$

（2）集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x\geq 3\}$，$B=\{x|ax+1\leq 0,a\in\mathbf{Z}\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

（3）若 $a=\log_3 0.4, b=\sin\frac{2\pi}{5}, c=2^{-\frac{1}{2}}$，则有（　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

（4）对于直线 m，n 和平面 α，β，使 $m\perp\alpha$ 成立的一个充分条件是

A. $m\perp n$，$n\mathbin{/\mkern-5mu/}\alpha$　　B. $m\mathbin{/\mkern-5mu/}\beta$，$\beta\perp\alpha$

C. $m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$　　D. $m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$

（5）已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=2$，$|a_2|<2$，它的前 n 项和为 S_n，则下列命题正确的是（　）

A. 数列 $\{S_n\}$ 是递增数列　　B. 数列 $\{S_n\}$ 是递减数列

C. 数列 $\{S_n\}$ 存在最小项　　D. 数列 $\{S_n\}$ 存在最大项

（6）投壶是从先秦延续至清末的中国传统礼仪和宴饮游戏．晋代在广泛开展投壶活动中，对投壶的壶也有所改进，即在壶口两旁增添两耳，因此在投壶的花式上就多了许多名目，如"贯耳(投入壶耳)"．每一局投壶，每一位参赛者各有四支箭，投入壶口一次得1分，投入壶耳一次得2分，现有甲、乙两人进行投壶比赛(两人投中壶口、壶耳是相互独立的)，甲四支箭已投完，共得3分，乙投完2支箭，目前只得1分，乙投中壶口的概率为 $\frac{1}{3}$，投中壶耳的概率为 $\frac{1}{5}$．四支箭投完，以得分多者赢．请问乙赢得这局比赛的概率为（　）

A. $\frac{13}{75}$　　B. $\frac{3}{75}$　　C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{8}{75}$

（7）若 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_1+a_3+a_5=$（　）

A. 121　　B. -122　　C. -121　　D. 122

(8) 如果圆$(x-a)^2+(y-a)^2=9$上恰有两个点到原点的距离为 1，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-4,4)$　　　　B. $(-3,3)$

C. $(-2\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+1)$　　　　D. $(-2\sqrt{2},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2\sqrt{2})$

(9) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, x\le a\\ -2x, \quad x>a\end{cases}$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

(10) 在平面直角坐标系中，定义 $d(P,Q)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ 为两点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 之间的“折线距离”，则下列命题中：

①若 $A(-1,3),B(1,0)$，则有 $d(A,B)=5$；

②到原点的“折线距离”等于 1 的所有点的集合是一个圆；

③若 C 点在线段 AB 上，则有 $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$；

④到 $M(-1,0),N(1,0)$ 两点的“折线距离”相等的点的轨迹是直线 $x=0$.

真命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第二部分（非选择题 共 110 分）

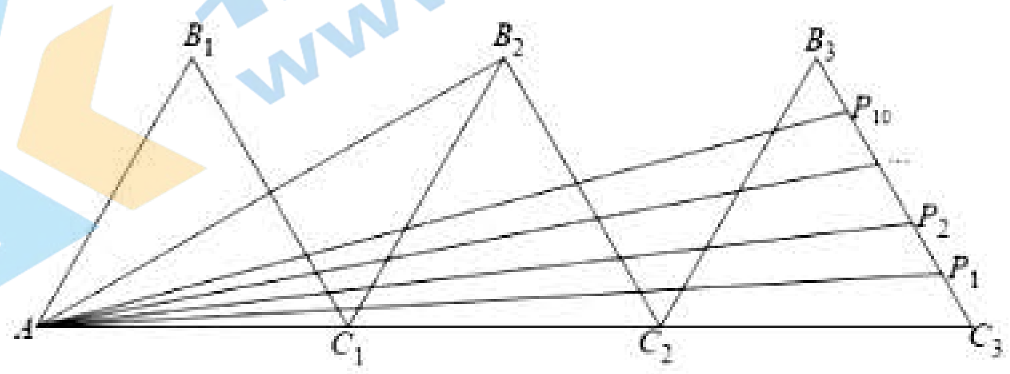
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{e^x-1}$ 的定义域是______.

(12) 已知双曲线 $y^2+mx^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$______.

(13) 已知直线 $l_1:(a-3)x+(1-a)y-1=0, l_2:(a-1)x+(2a-3)y+1=0$，则当实数 $a=$____时，$l_1 // l_2$.

(14) 如图所示，三个边长为 2 的等边三角形有一条边在同一直线上，边 B_3C_3 上有 10 个不同的点 P_1，P_2，…，P_{10}，记 $M_i=\overrightarrow{AB_2}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,10)$，则 $M_1+M_2+\cdots+M_{10}=$______.



（15）设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在实数 $T(T>0)$，使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x)<f(x+T)$，则称 $f(x)$ 为“$T-$严格增函数”，对于“$T-$严格增函数”，有以下四个结论：

①“$T-$严格增函数” $f(x)$ 一定在 D 上单调递增；

②“$T-$严格增函数” $f(x)$ 一定是“$nT-$严格增函数”（其中 $x\in \mathbf{N}^*$，且 $n\geq 2$）

③函数 $f(x)=[x]$ 是“$T-$严格增函数”（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

④函数 $f(x)=x-[x]$ 不是“$T-$严格增函数”（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

其中，所有正确的结论序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

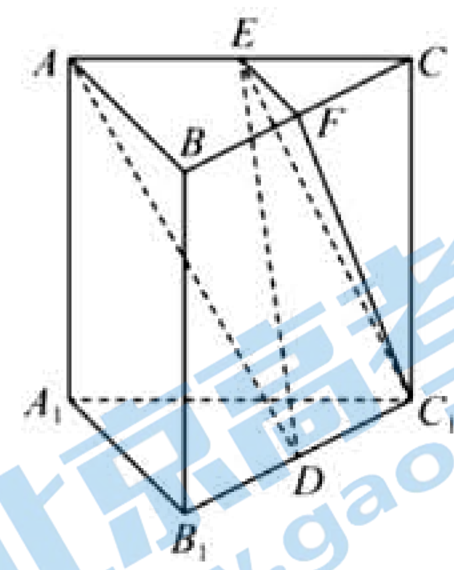
已知函数 $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅱ）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $f(\frac{A}{2})=\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$，$c=1$，求△ABC 的面积.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1A\perp$ 平面 ABC，$4A_1A=3AB$，△ABC 是等边三角形，D,E,F 分别是棱 B_1C_1,AC,BC 的中点.



（Ⅰ）证明：AD // 平面 C_1EF；

（Ⅱ）求平面 ADE 与平面 C_1EF 所成锐二面角的余弦值；

（Ⅲ）求点 B_1 到平面 C_1EF 的距离.

（18）（本小题 14 分）

在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i=\frac{R_i}{N}$，其中 P_i 为第 i 题的难度，R_i 为答对该题的人数，N 为参加测试的总人数．现对某校高三年级 240 名学生进行一次测试，共 5 道客观题．测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，随机抽取了 20 名学生的答题数据进行统计，结果如下：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	16	16	14	14	4

（Ⅰ）根据题中数据，估计这 240 名学生中第 5 题的实测答对人数；

（Ⅱ）从抽样的 20 名学生中随机抽取 2 名学生，记这 2 名学生中第 5 题答对的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）定义统计量 $S=\frac{1}{n}[(P_1'-P_1)^2+(P_2'-P_2)^2+\cdots+(P_n'-P_n)^2]$，其中 P_i' 为第 i 题的实测难度，P_i 为第 i 题的预估难度 $(i=1,2,\cdots,n)$．规定：若 $S<0.05$，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理．判断本次测试的难度预估是否合理．

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，右焦点为 F，点 $A(a,0)$，且 $|AF|=1$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 F 的直线 l（不与 x 轴重合）交椭圆 C 于点 M，N，直线 MA，NA 分别与直线 $x=4$ 交于点 P，Q，求 $\angle PFQ$ 的大小．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\ln x$，$(a>0)$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$f(x_1)+f(x_2)>\frac{-3-2\ln 2}{4}$．

（21）（本小题 15 分）

对于有限数列 $\{a_n\}$，$n\le N$，$N\ge 3$，$N\in\mathbf{N}^*$，定义：对于任意的 $k\le N$，$k\in\mathbf{N}^*$，有：

（i）$S^*(k)=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_k|$；

（ii）对于 $c\in\mathbf{R}$，记 $L(k)=|a_1-c|+|a_2-c|+|a_3-c|+\cdots+|a_k-c|$．对于 $k\in\mathbf{N}^*$，若存在非零常数 c，使得 $L(k)=S^*(k)$，则称常数 c 为数列 $\{a_n\}$ 的 k 阶 ω 系数．

（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-2)^n$，计算 $S^*(4)$，并判断 2 是否为数列的 4 阶 ω 系数；

（Ⅱ）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-39$，且数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数为 3，求 m 的值；

（Ⅲ）设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，满足 $-1,2$ 均为数列 $\{a_n\}$ 的 m 阶 ω 系数，且 $S^*(m)=507$，求 m 的最大值．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。